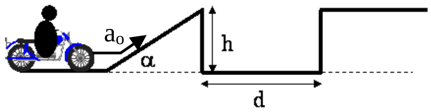
FISICA

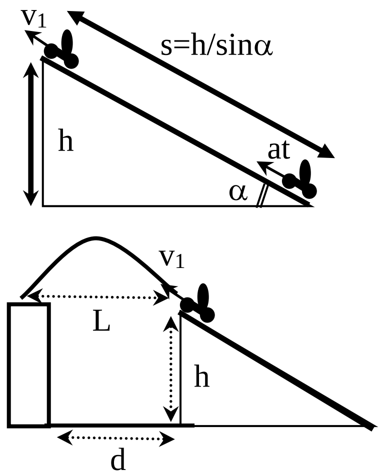
A.A. 2019-2020
Ingegneria Gestionale
4° appello del 11 Gennaio 2021
Esame completo - Soluzioni

1. Un motociclista sale una rampa inclinata di α=10° per saltare un fossato lungo d=20m da una altezza h=10m. Sapendo che il motociclista si trova inizialmente fermo alla base della rampa, determinare qual è la accelerazione a_{min} che deve applicare lungo tutta la rampa in salita per poter spiccare il salto minimo richiesto.



1. Soluzione.

1. Fase di salita sulla rampa



Durante la salita il motociclista è soggetto ad un moto uniformemente accelerato con i seguenti andamenti delle quantità cinematiche

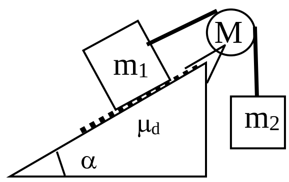
$\begin{cases} s = at^2/2 \\ v = at \end{cases}$. La rampa viene percorsa per tutta la sua lunghezza $s = \dfrac{h}{\sin\alpha}$

da cui si ottiene il tempo di percorrenza $t = \sqrt{\dfrac{2s}{a}} = \sqrt{\dfrac{2h}{a\sin\alpha}}$ e la velocità prima del salto $v_1 = at = \sqrt{\dfrac{2ah}{\sin\alpha}}$

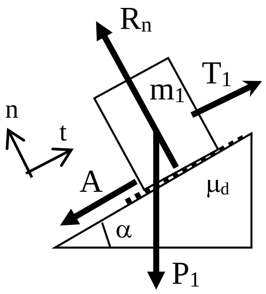
Volo libero

Nella fase di volo il motociclista è soggetto alla sola accelerazione di gravità. Poiché i punti iniziale e finale del volo si trovano alla stessa quota la gittata vale $L = \dfrac{2v_1^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$ che combinata con la precedente porta a $L = \dfrac{4 \cdot a \cdot h \cdot \cos\alpha}{g}$. Per saltare il fosso è necessario quindi $L \geq d$ che porta alla accelerazione minima sulla rampa $a_{\min} = \dfrac{d \cdot g}{4h \cdot \cos\alpha} =$ **4.98 m²/s**

2. Un blocco di massa m_1=8 kg è posto su di un piano scabro caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico μ_d=0.15 inclinato di un angolo α=30° rispetto all'orizzontale. Al blocco è collegato, attraverso una fune collegata ad una puleggia di massa M=2 kg un blocco di massa m_2=15 kg appeso al sistema, lungo la verticale. Determinate l'accelerazione con cui si muove il sistema.
[Il momento di inerzia della puleggia rispetto al proprio asse vale I=$Mr^2/2$].



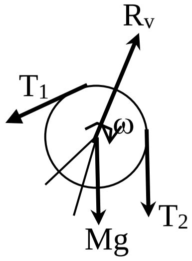
2. Soluzione



Equazioni per il blocco n.1 proiettate lungo gli assi n,t

$$\begin{cases} \hat{n} & R_n - m_1 g\cos\alpha = 0 \\ \hat{t} & T_1 - A_d - m_1 g\sin\alpha = m_1 a \end{cases}$$

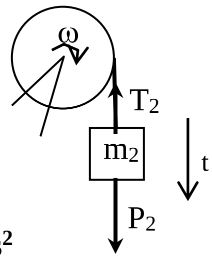
Equazione dei momenti per la puleggia



$$M_{T_2} + M_{T_1} = T_2 r - T_1 r = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{a}{r}$$

e più sinteticamente $T_2 - T_1 = \dfrac{I}{r^2}a$

Equazione per il blocco n.2 lungo l'asse del possibile moto t



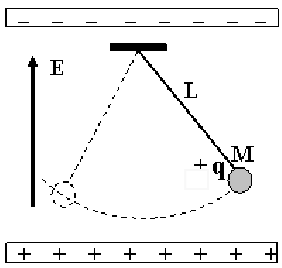
$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

che combinate danno luogo

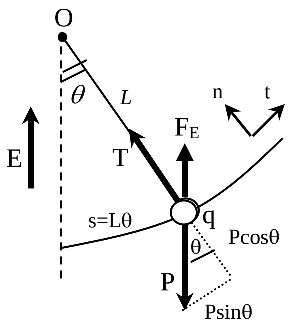
$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}\right)a_t = g\left(m_2 - m_1\sin\alpha - \mu_d m_1\cos\alpha\right)$$

da cui **l'accelerazione del sistema** $a_t = g\left(\dfrac{m_2 - m_1\sin\alpha - \mu_d m_1\cos\alpha}{m_2 + m_1 + M/2}\right)$ **= 4.07 m/s²**

3. Un campo elettrico uniforme E viene generato tra i due piatti paralleli di un condensatore con la polarità illustrata in figura. Una piccola sfera conduttrice di massa M e di carica +q viene sospesa ad un cardine con un filo di lunghezza L, tutto nello spazio interno al condensatore. Sapendo che il periodo di oscillazione di questo pendolo diminuisce del 20% quando il campo elettrico viene invertito determinare il valore del campo elettrico E (M=5 g; L= 50 cm; q=+10^{-5} C)



3. Soluz. Il pendolo oscilla grazie alla distribuzione delle 3 forze applicate: la forza peso **P**, la tensione della fune **T**, la forza elettrica **F_E** (il campo elettrico è inizialmente diretto verso l'alto). Scomponendo le forze sugli assi n,t si ottiene:



$$\begin{cases} n) & T - P\cos\theta + F_E\cos\theta = Mv^2/L \\ t) & -P\sin\theta + F_E\sin\theta = ML\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

Utilizzando la seconda espressione approssimata per piccole oscillazioni

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mg - qE}{ML}\right)\theta = 0 \quad \text{da cui il periodo} \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g - qE/M}}$$

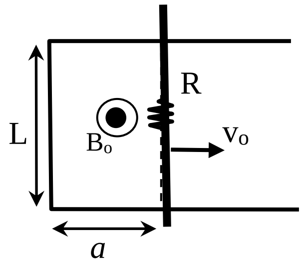
Nel caso in cui il campo elettrico è invertito il periodo diminuisce divenendo $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + qE/M}}$

Imponendo T_2/T_1=80%=1-p (dove p=20%=0.2) si ottiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L}{g + qE/M}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g - qE/M}}} = \sqrt{\frac{g - qE/M}{g + qE/M}} = 1 - p \text{ che quadrata diviene } \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \frac{1 - qE/M\,g}{1 + qE/M\,g} = (1-p)^2$$

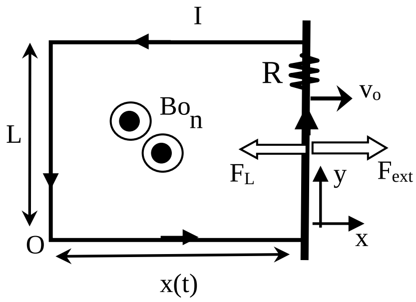
da cui si ricava il campo elettrico $E = \frac{Mg}{q}\frac{1-(1-p)^2}{1+(1-p)^2} =$ **1076 V/m**

4. Una barretta metallica conduttrice di lunghezza L=10cm e resistenza elettrica R=2Ω viene spinta lungo binari conduttori orizzontali, senza attrito e di resistenza trascurabile alla velocità costante v_o=5m/s. Nella regione in cui si muove la barretta è presente un campo magnetico uniforme verticale di induzione B_o. Sapendo che la potenza che occorre fornire per tenere in moto la bacchetta a velocità costante è P=3W determinare il modulo di Bo, la corrente e la differenza di potenziale sulla barretta.



4. L'orientazione della corrente circolante nella spira (antioraria) è scelta in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia stessa direzione e verso di $\vec{B}$. Quindi il **flusso concatenato** con la spira Φ_c è

$$\Phi_c = \iint \vec{B}\cdot\hat{n}\,dx\,dy = B_o\int_0^{x(t)} dx\int_0^L dy = B_o \cdot L \cdot x(t)$$



Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz si calcola

la **forza elettromotrice indotta** nella spira $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -B_o L v_o$

l'**intensità di corrente indotta** nel circuito $I = \frac{f_i}{R} = -\frac{B_o L}{R}v_o$

dove il segno meno indica che il verso effettivo della corrente è opposto a quello ipotizzato.

e la **forza di Lorentz** agente sulla barra $\vec{F}_L = I\int d\vec{l} \times \vec{B}_o$ contraria alla velocità $F_L = -\left(\frac{B_o^2 L^2}{R}\right)v_o$

Per muovere la barra alla velocità costante si applicare una forza esterna $F_{ext} = -F_L = \left(\frac{B_o^2 L^2}{R}\right)v_o$

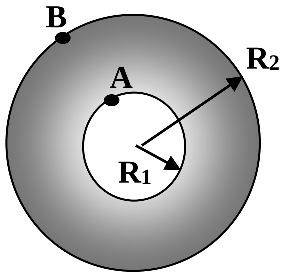
sviluppando una **potenza meccanica** $P = F_{ext}v_o = \frac{B_o^2 L^2 v_o^2}{R}$

Invertendo la relazione si ottiene il modulo dell'**induzione magnetica** $B_o = \dfrac{\sqrt{PR}}{v_o L} =$ **4.9 T**

conseguentemente l'intensità della **corrente indotta** $|I| = \dfrac{B_o L v_o}{R} = \sqrt{\dfrac{P}{R}} =$ **1.22A**

e la **forza elettromotrice indotta** $|f_i| = B_o L v_o = \sqrt{PR} =$ **2.45 V**

Esercizi sostitutivi per esonero



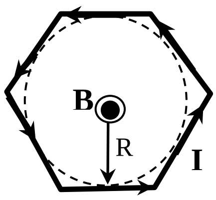
A. In una sfera cava di raggio interno R_1=4mm ed esterno R_2=6mm è presente una carica con densità volumetrica non uniforme dipendente dal raggio con legge $\rho(r)=a*r^3$. Sapendo che la differenza di potenziale fra il punto A e il punto B vale ΔV=100 V determinare il valore della costante *a*.

A. Soluzione. Per la simmetria del problema il campo elettrico $E_o(r)$ è radiale e può essere calcolato applicando la legge di Gauss. Per i punti interni $R_1<r<R_2$ il flusso di campo elettrico uscente da una generica superficie di raggio r vale $\Phi_{\Sigma\text{int}} = \int_{\Sigma\text{int}} \vec{E}_o \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$ che per Gauss deve valere Q_{int}/ε_o, dove $Q_{\text{int}} = \int \rho dV = \int_{R_1}^{r} \rho\left(4\pi r^2 dr\right) = 4\pi a \int_{R_1}^{r} r^5 dr = 4\pi a \dfrac{r^6 - R_1^6}{6}$

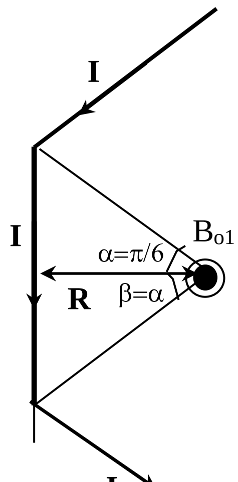
Combinando i due termini della legge di Gauss si ricava il campo interno $E_{\text{int}} = \dfrac{a}{6\varepsilon_o}\left(r^4 - \dfrac{R_1^6}{r^2}\right)$.

La ddp fra A e B si calcola come $\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E_{\text{int}} dr = \dfrac{a}{6\varepsilon_o}\left[\dfrac{R_2^5 - R_1^5}{5} + R_1^6\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right)\right]$

che invertita porta al valore $a = \Delta V \dfrac{6\varepsilon_o}{\dfrac{R_2^5 - R_1^5}{5} + R_1^6\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right)} =$ **5.26 10^3 C/m^6**



B. Calcolare il vettore induzione magnetica B_o nel centro della spira descritta in figura costituita da un esagono regolare di apotema R=4cm e percorsa dalla corrente continua I=2A. Confrontare il risultato con quello che si avrebbe nel caso in cui la stessa corrente percorresse una spira circolare di raggio R inscritta nell'esagono.



B. Soluzione. Vettore induzione magnetica generato dalla spira esagonale

La spira esagonale è formata da 6 tratti rettilinei di lato $2R\sqrt{3}$ percorsi dalla comune corrente I. Ciascun lato genera nel centro della spira un contributo di B_{o1} uscente dal piano del foglio di valore $B_{01} = \dfrac{\mu_o I}{4\pi}\dfrac{\sin\beta + \sin\alpha}{R}$ dove β=π/3,

α=2π/3, da cui $B_{01} = \dfrac{\mu_o I}{4\pi R}$. Anche gli altri cinque lati generano singolarmente lo stesso contributo per cui il valore complessivo è $B_{0,1} = \dfrac{3\mu_o I}{2\pi R} =$ **30 μT.**

Vettore induzione magnetica generato dalla spira circolare

Una spira circolare avrebbe creato nel centro un vettore di induzione magnetica $B_{0,2} = \dfrac{\mu_o I}{2R}$

Il rapporto delle intensità dei capi magnetici è tale che $B_{cerchio}/B_{esagono} = \pi/3 =$ **1.05**