



FISICA

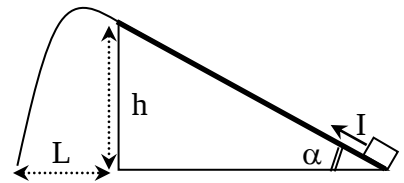
A.A. 2025-2026

Ingegneria Gestionale

4° prova - 13 Marzo 2026

1. Su di un piano inclinato liscio inclinato di 40° rispetto all'orizzontale, un corpo di massa $m=5\text{kg}$ è trattenuto in equilibrio da una forza applicata parallelamente al piano inclinato. Calcolare il valore di tale forza e della reazione normale. Determinare inoltre, nel caso tale forza venga ridotta del 50%, il tempo necessario affinché il corpo discenda dalla quota $h=2\text{ m}$ fino a terra ed il valore dell'accelerazione di discesa.

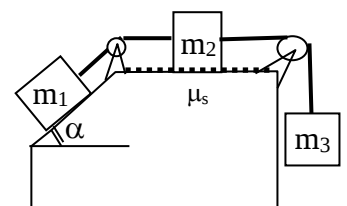
2. Un blocco di massa $m=2\text{kg}$ è posto alla base di una rampa di lancio priva di attrito ed inclinata di un angolo $\alpha=30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Al tempo $t=0$ il blocco viene lanciato con un impulso $I=10\text{ Ns}$ diretto lungo la rampa. Determinare in quanto tempo il blocco raggiunge la sommità alla quota $h=30\text{cm}$ e a quale velocità. Nei tempi successivi il blocco si distacca dalla rampa descrivendo una traiettoria parabolica. Determinare la distanza L del punto di atterraggio dalla rampa.



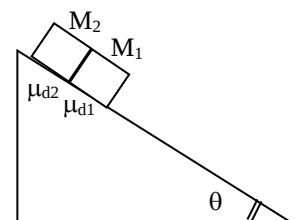
3. Un pattinatore su ghiaccio lanciato alla velocità di 10m/s su di un piano ghiacciato orizzontale si arresta lentamente nello spazio di 120m a causa delle forze di attrito tra pattini e ghiaccio. Determinare il coefficiente di attrito dinamico tra pattini e ghiaccio. Ricalcolare lo spazio di arresto supponendo che il piano ghiacciato sia inclinato di 1° rispetto all'orizzontale. Dare infine il valore dell'angolo del piano affinché il pattinatore si muova di moto rettilineo uniforme

4. Un blocco scivola lungo un piano liscio avente una inclinazione di $\theta=25^\circ$. Se il blocco parte da fermo dalla sommità e la lunghezza del piano inclinato è $s=3\text{m}$, trovare l'accelerazione del blocco e la sua velocità quando raggiunge il fondo. Ripetere l'esercizio supponendo che sul piano inclinato ci sia attrito (statico $\mu_s = 0.25$, dinamico $\mu_d = 0.20$).

5. Un blocco di massa $m_2=10\text{Kg}$ è posto su di un piano orizzontale scabro caratterizzato da un coefficiente di attrito statico $\mu_s=0.2$. Al blocco sono collegati, attraverso funi e pulegge tutte di masse trascurabili, altri due blocchi disposti come in figura; in particolare alla sinistra si trova un blocco di massa $m_1=6\text{Kg}$ disposto su un piano liscio inclinato di $\alpha=30^\circ$ rispetto all'orizzontale, mentre alla destra un blocco di massa m_3 è appeso al sistema, lungo la verticale. Determinate il valore minimo che deve avere la massa m_3 per poter trascinare tutto il sistema. Determinate l'intervallo di valori consentiti per m_3 affinché il sistema rimanga in equilibrio.



6. Due blocchi in contatto l'un con l'altro scivolano lungo un piano scabro inclinato di $\theta=35^\circ$ rispetto all'orizzontale. Sapendo che il blocco anteriore $M_1=3\text{ kg}$ è frenato da una forza di attrito di coefficiente $\mu_{d1}=0.8$ superiore all'attrito esercitato sul blocco posteriore di massa $M_2=2\text{ kg}$ ($\mu_{d2}=0.3$) determinare l'accelerazione comune di caduta del gruppo dei blocchi. Determinare inoltre l'intensità delle forze interne di contatto fra i due blocchi.





FISICA

A.A. 2025-2026

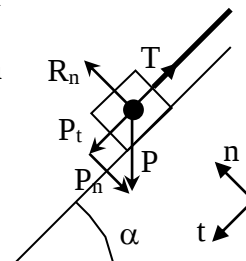
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 4° prova

1. Le forze agenti sulla massa sono 3: la forza peso $P=mg$ diretta verticalmente, la reazione normale del piano inclinato R_n diretta lungo la normale n , e la tensione di sostegno della fune diretta lungo il piano inclinato opposta all'asse t .

Applicando il II principio e proiettando le forze sui due assi t ed n si ottiene il sistema

$$\hat{n} \begin{cases} R_n - P_N = ma_N = 0 \\ P_t - T = ma_t = 0 \end{cases} \quad \text{dove la forza peso viene decomposta secondo le sue}$$

proiezioni lungo gli assi t ($P_t = P \sin \alpha$) ed n ($P_n = P \cos \alpha$). Dalla seconda ricaviamo il valore della tensione $T = P_t = mg \sin \alpha = 31.5 \text{ N}$.



Se la tensione viene ridotta del 50% al nuovo valore $T^* = P_t/2 = 15.7 \text{ N}$, il blocco non può più rimanere in quiete e scivola a valle con accelerazione

$$a_t = \frac{P_t - T^*}{m} = \frac{P - T/2}{m} = \frac{P_t}{2m} = \frac{g}{2} \sin \alpha = 3.15 \text{ m/s}^2$$

2. Il blocco è inizialmente fermo con quantità di moto nulla. Immediatamente dopo l'applicazione dell'impulso il blocco acquista una velocità iniziale di lancio aumentando la propria quantità di moto $\Delta p = mv_o = I$ da cui si ricava la velocità iniziale $v_o = I/m = 5 \text{ m/s}$.

Nella salita il blocco è soggetto alla forza peso P ed alla reazione normale R_n . Proiettando le forze lungo la normale e la tangenziale si ottiene:

$$\hat{n} \begin{cases} R_n - P \cos \alpha = 0 \\ -P \sin \alpha = ma \end{cases} \quad \text{da cui la decelerazione di salita } a = -g \sin \alpha$$

per integrazione si ottiene la **velocità**

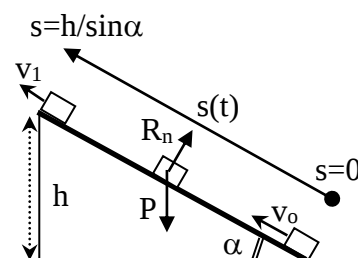
$$v(t) = v_o - gt \sin \alpha$$

e per ulteriore integrazione lo **spazio percorso**

$$s(t) = v_o t - gt^2 \sin \alpha / 2$$

Il **tempo di salita t^*** si ottiene imponendo $s(t^*) = v_o t^* - gt^{*2} \sin \alpha / 2 = h / \sin \alpha$ e risolvendo la

relativa equazione di 2° grado che fornisce la soluzione $t^* = \left(\frac{v_o - \sqrt{v_o^2 - 2gh}}{g \sin \alpha} \right) = 128 \text{ ms}$. Si noti



che è stata scartata la seconda soluzione con il segno + davanti al radicale. Questa corrisponderebbe ad un tempo successivo t^{**} . Infatti se la rampa fosse infinitamente lunga il blocco, raggiunta la quota h nell'istante t^* , la oltrepasserebbe per poi ridiscendervi a questo istante successivo t^{**}

La **velocità di uscita** dalla rampa è quindi $v_1 = v(t^*) = v_o - gt^* \sin \alpha = \sqrt{v_o^2 - 2gh} = 4.37 \text{ m/s}$.

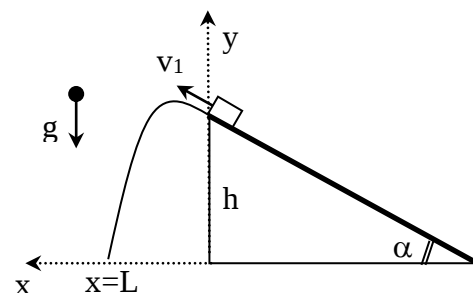
Moto parabolico successivo all'istante t^* :

Assumiamo di azzerare nuovamente il cronometro cominciando a contare il tempo t a partire da t^* .

Le equazioni cinematiche divengono ora

$$\text{lungo } x \begin{cases} x(t) = v_1 t \cos \alpha \\ v_x = v_1 \cos \alpha \\ a_x = 0 \end{cases} \quad \text{lungo } y \begin{cases} y(t) = h + v_1 t \sin \alpha - gt^2 / 2 \\ v_y = v_1 \sin \alpha - gt \\ a_y = -g \end{cases}$$

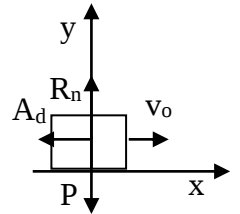
il tempo di volo del grave si ottiene dall'equazione:



$$y(t_v) = h + v_1 t_v \sin \alpha - g t_v^2 / 2 = 0 \quad \text{da cui} \quad t_v = \frac{v_1}{g} \left[\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2gh}{v_1^2}} \right]$$

$$\text{da cui si ricava la gittata } L = \frac{v_1^2}{g} \left[\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2gh}{v_1^2}} \right] = 2.10 \text{ m}$$

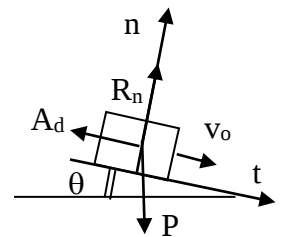
3. Studio della dinamica: sul pattinatore agiscono 3 forze, la forza peso P la reazione normale R_n e l'attrito dinamico A_d . Il peso e la reazione normale si equilibrano lungo l'asse y ($R_n = P = mg$). Lungo l'asse x rimane solo l'attrito dinamico $ma_x = -A_d = -\mu_d R_n = -\mu_d mg$, che è responsabile di una decelerazione costante $a_x = -\mu_d g$ (moto uniformemente ritardato). **Studio della cinematica:** integrando l'accelerazione si ottiene la velocità $v(t) = v_o - \mu_d g t$ (dove v_o è la velocità iniziale).



Integrando ulteriormente si ottiene lo spazio percorso $x(t) = v_o t - \mu_d g t^2 / 2$. L'istante di arresto si ottiene annullando la velocità $v(t^*) = v_o - \mu_d g t^* = 0$ da cui $t^* = v_o / \mu_d g$; a quell'istante il pattinatore ha percorso lo spazio $s = x(t^*) = v_o^2 / (2\mu_d g)$. Il valore di μ_d si ottiene invertendo l'espressione

trovata $\mu_d = v_o^2 / 2gs = 0.043$. Nel caso di piano ghiacciato inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale le 3 forze vanno proiettate lungo gli assi normale (n) e tangenziale (t). Le equazioni sono quindi

$$\hat{n} \begin{cases} R_n - mg \cos \theta = 0 \\ \hat{t} \begin{cases} mg \sin \theta - A_d = ma_t \end{cases} \end{cases} \quad \text{dove la forza peso } P$$

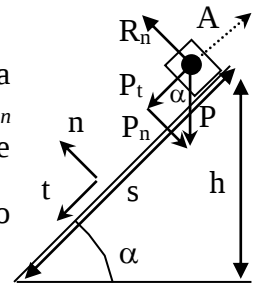


è stata decomposta in $P_t = mg \sin(\theta)$ e $P_n = mg \cos(\theta)$. Dalla prima equazione ricaviamo $R_n = mg \cos \theta$, dalla seconda ricaviamo invece l'accelerazione di discesa

$a_t = g(\sin \theta - \mu_d \cos \theta) = -0.2456$ che per $\theta = 1^\circ$ rimane ancora negativa (moto uniformemente ritardato). Il nuovo spazio percorso fino all'arresto diviene $s = v_o^2 / 2|a_t| = 203.6 \text{ m}$. Inclinando ulteriormente il piano si può ottenere anche $a_t = 0$ (moto rett. uniforme) per $\theta = \arctan(\mu_d) = 2^\circ 26'$.

4. Studio della dinamica: in assenza di attrito le forze agenti sul blocco sono 2: la forza peso $P = mg$ diretta verticalmente e la reazione normale del piano inclinato R_n diretta lungo la normale n . Applicando il II principio e proiettando le forze sui due

$$\hat{n} \begin{cases} R_n - P_n = ma_n = 0 \\ \hat{t} \begin{cases} P_t = ma_t \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} R_n = P_n = mg \cos \alpha \\ a_t = g \sin \alpha \end{matrix} \quad \text{dove la forza peso}$$



è stata decomposta secondo le sue proiezioni lungo gli assi t ($P_t = P \sin \alpha$) ed n

($P_n = P \cos \alpha$). **Studio della cinematica:** l'accelerazione di caduta è $a_t = g \sin \alpha = 4.14 \text{ m/s}^2$ (moto unif. accelerato). Integrando la velocità vale $v(t) = a_t t$ (velocità iniziale nulla). Integrando lo spazio

percorso è $s(t) = a_t t^2 / 2$. L'istante t^* al quale il blocco raggiunge la base del piano inclinato si

ottiene imponendo $s(t^*) = a_t t^{*2} / 2 = s$ da cui $t^* = \sqrt{2s / a_t}$; allora il blocco raggiunge la velocità

$v_{fin} = v(t^*) = a_t t^* = \sqrt{2sa_t} = \sqrt{2sg \sin \alpha} = \sqrt{2gh} = 4.98 \text{ m/s}$ (h è l'altezza iniziale del blocco). La

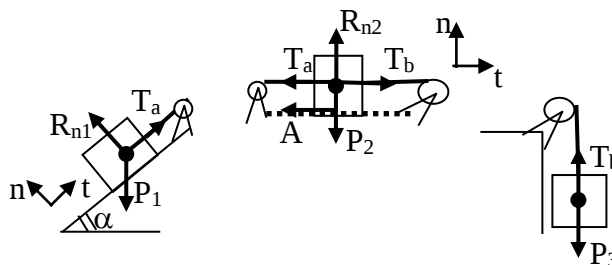
presenza dell'attrito modifica il sistema delle equazioni in $\hat{n} \begin{cases} R_n - P_n = 0 \\ \hat{t} \begin{cases} P_t - A = ma_t \end{cases} \end{cases}$. Dalla prima si ricava

$R_n = P_n = mg \cos \alpha$, mentre dalla seconda si chiarisce la natura dell'attrito (statico o dinamico). **Ipotesi statica:** Supponiamo che il corpo sia in quiete ($a_t = 0$). Il valore dell'attrito necessario per garantire questo stato è $A_s = P_t = mg \sin \alpha$. L'ipotesi è corretta se l'attrito richiesto risulta inferiore a quello massimo disponibile $A = P_t = mg \sin \alpha \leq \mu_s R_n = \mu_s mg \cos \alpha$ da cui $\tan(\alpha) \leq \mu_s$ che porta all'assurdo

$\tan(25^\circ) = 0.466 \leq 0.25$. L'ipotesi statica non è soddisfatta. Il corpo si muove con una accelerazione $a_t = (P_t - A_d)/m$ dove l'attrito dinamico vale $A_d = \mu_d R_n = \mu_d mg \cos \alpha$. Combinando le due espressioni si ottiene una accelerazione costante di valore $a_t = g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) = 2.37 \text{ m/s}^2$ (moto uniformemente accelerato). Le espressioni della velocità generica $v(t) = a_t t$, dello spazio percorso $s(t) = a_t t^2 / 2$, dell'istante t^* di fine corsa $t^* = \sqrt{2s/a_t}$ e della velocità finale $v_{fin} = v(t^*) = a_t t^* = \sqrt{2sa_t}$ sono analoghe al caso senza attrito. L'unica differenza è nel valore inferiore di a_t che porta alla velocità finale $v_{fin} = \sqrt{2sg(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)} = 3.77 \text{ m/s}$.

5. Il sistema rimane in equilibrio se la massa m_3 viene scelta nell'intervallo $M_{\min} \leq m_3 \leq M_{\max}$. Nel caso $m_3 > M_{\max}$ il sistema prende a muoversi verso destra. Nel caso $m_3 < M_{\min}$ il sistema prende a muoversi verso sinistra. I valori estremi $M_{\min}$, $M_{\max}$ vengono calcolati imponendo l'equilibrio delle forze su ciascuna massa singolarmente. Nel caso in cui $P_3 > P_1 \sin \alpha$ abbiamo

$$\begin{aligned} \text{massa } m_1; & \begin{cases} t) & T_a = P_1 \sin \alpha \\ n) & R_{n1} = P_1 \cos \alpha \end{cases} \\ \text{massa } m_2; & \begin{cases} t) & T_b - T_a - A = 0 \\ n) & R_{n2} = P_2 \end{cases} \\ \text{massa } m_3; & T_b = P_3 \end{aligned}$$



Si noti come in figura sia stato scelto un verso per la forza di attrito A corrispondente al caso $P_3 > P_1 \sin \alpha$. Il verso di A è ovviamente opposto quando invece $P_3 < P_1 \sin \alpha$. Combinando le equazioni si ottiene per la forza di attrito sul secondo blocco:

$$|A| = |T_b - T_a| = |P_3 - P_1 \sin \alpha| \leq A_{\max} = \mu_s R_{n2} = \mu_s P_2 \quad \text{che ha soluzione}$$

$$m_1 \sin \alpha - \mu_s m_2 \leq m_3 \leq m_1 \sin \alpha + \mu_s m_2 \quad \text{e quindi} \quad 1 \text{Kg} \leq m_3 \leq 5 \text{Kg}.$$

6. Studio delle forze sui singoli blocchi

Blocco anteriore

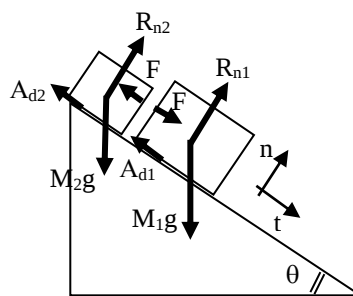
Scomponendo tutte le forze agenti lungo gli assi t, n

$$\begin{aligned} t) & \begin{cases} M_1 g \sin \theta - \mu_{d1} M_1 g \cos \theta + F = M_1 a \\ n) & R_{n1} = M_1 g \cos \theta \end{cases} \end{aligned}$$

Blocco posteriore

Scomponendo tutte le forze agenti lungo gli assi t, n

$$\begin{aligned} t) & \begin{cases} M_2 g \sin \theta - \mu_{d2} M_2 g \cos \theta - F = M_2 a \\ n) & R_{n2} = M_2 g \cos \theta \end{cases} \end{aligned}$$



$$\text{Dalle espressioni lungo l'asse del moto} \quad a = g \frac{(M_1 + M_2) \sin \theta - (\mu_{d1} M_1 + \mu_{d2} M_2) \cos \theta}{M_1 + M_2} = 0.804 \text{ m/s}^2$$

$$\text{la forza di contatto tra i blocchi è} \quad F = M_1(a - g \sin \theta + \mu_{d1} g \cos \theta) = \frac{M_1 M_2 (\mu_{d1} - \mu_{d2}) g \cos \theta}{M_1 + M_2} = 4.82 \text{ N}$$