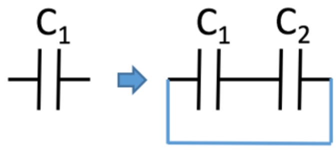
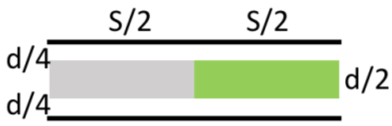
5° ESERCITAZIONE – venerdì 30 ottobre 2020

5.1) Due condensatori piani uguali hanno in aria, se posti in parallelo, la stessa capacità che avrebbero se, posti in serie, lo spazio fra le armature di entrambi venisse riempito completamente da olio isolante.
Determinare la suscettività elettrica dell'olio.
>>> soluzione: $\chi = 3$

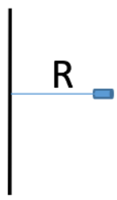



5.2) Il condensatore $C_1$, con carica iniziale $Q_0$, viene collegato come in figura al condensatore $C_2$ inizialmente scarico. Determinare l'energia del sistema nelle due configurazioni. I valori di $C_1$ e $C_2$ sono uguali.
[$\frac{1}{2} Q_0^2/C$; $\frac{1}{4} Q_0^2/C$]




5.3) In un condensatore piano con armature di superficie S distanti d sono presenti parallele alle armature, a distanza d/4, due lastre piane di superficie S/2 e spessore d/2. Una lastra è conduttrice, l'altra isolante con costante dielettrica relativa $\varepsilon_r$.
Determinare, trascurando gli effetti di bordo, la capacità del condensatore.
>>> soluzione: $\varepsilon_o S/d\ (1+2\varepsilon_r)/(1+\varepsilon_r)$

5.4) Una sottile lastra isolante spessa h = 2 mm di forma quadrata (L = 10 cm) è disposta parallelamente (a distanza d = 5 cm) a una distribuzione piana di carica con densità $\sigma = + 10\ nC/m^2$. Sapendo che la lastra ha una costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 2$ determinare le densità di carica di polarizzazione sulle due facce della lastra e la differenza di potenziale che si stabilisce fra di esse. Trascurare gli effetti di bordo.
>>> soluzione: 2,5 $nC/m^2$; 0,56 V




5.5) Un minuscolo cilindretto di materiale dielettrico ($\varepsilon_r = 3$) di volume $\tau = 10^{-9}\ m^3$ è posto radialmente a distanza R = 20 cm dall'asse di un filo indefinito uniformemente carico ($\lambda = 10\ \mu C/m$). Determinare la forza di attrazione esercitata dal filo sul cilindretto. {F= – grad U}
>>> soluzione: -16 nN verso il filo

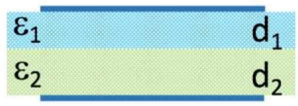
5.6) Un condensatore sferico di raggi $R_1$ e $R_2$ è riempito da un guscio sferico di dielettrico isotropo, lineare ma non omogeneo. La costante dielettrica relativa dipende quindi dal raggio: vale 2 sulla superfice a contatto con l'armatura interna e 4 sulla superficie a contatto con l'armatura esterna.
Calcolare la carica di polarizzazione di volume quando sull'armatura interna viene posta una carica Q = 10 nC
{Sugg.: il dielettrico è complessivamente neutro…}
>>> soluzione: $Q_{polVol} = -2,5\ nC$

5.7) In un lungo cilindro isolante di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 2$ e raggio R = 1 cm viene depositata una carica con densità $\rho = kr$ con r distanza dall'asse e $k = 2\ mC/m^4$. Calcolare la differenza di potenziale fra due punti, uno sull'asse del cilindro e l'altro sulla sua superficie laterale.
>>> soluzione: 12V

5.8) Una carica elettrostatica è distribuita all'interno di un **guscio sferico** dielettrico di raggi $R_1$ e $R_2$ con polarizzazione $\mathbf{P} = k\mathbf{r}$. Calcolare il valore del campo elettrico in tutto lo spazio.
{Iniziare col ricavare le densità di carica di polarizzazione superficiali e di volume}

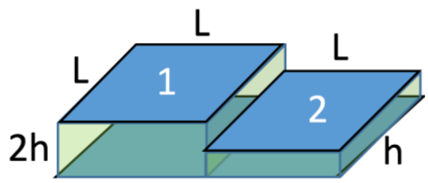
>>> soluzione: $\sigma_P(R_1) = -kR_1$; $\sigma_P(R_2) = +kR_2$; $\rho_P = -3k$ ➔ $E(R_1<r<R_2) =[-kR_1^3- k(r^3-R_1^3)]/(\varepsilon_0\, r^2)$

5.9) Un condensatore piano con armature di area S è riempito da due lastre di dielettrico, una di spessore $d_1$ = 0,9 cm e di costante dielettrica relativa $\varepsilon_{r1}$ = 3 l'altra di spessore $d_2$ = 0,4 cm e costante dielettrica relativa $\varepsilon_{r2}$ = 2. Ai capi del condensatore è applicata una differenza di potenziale $\Delta V$ = 5 V. Calcolare i valori $E_1$ e $E_2$ dei moduli di campo elettrico nei due dielettrici e la densità di carica totale di polarizzazione $\sigma_{PTOT}$ sulla superficie di separazione dei due dielettrici.



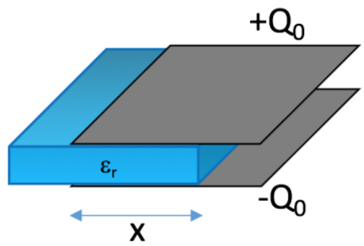

>>> soluzione: $E_1$ = 333 V; $E_2$ = 500 V; $\sigma_{PTOT}$ = 1,5 nC/m$^2$

5.10) Nella struttura di condensatori riportata in figura le armature superiori sono due quadrati di lato L = 10 cm, le distanze fra le coppie di armature sono h = 2 mm e 2h e la costante dielettrica relativa dell'isolante è $\varepsilon_r$ =2.
Il sistema, complessivamente neutro, è isolato mentre le armature superiori 1 e 2 sono collegate elettricamente fra loro. Determinare:
a) l'energia elettrostatica accumulata nel sistema di condensatori sapendo che sull'armatura inferiore è presente una carica Q = - 10 nC;
b) la carica di polarizzazione complessivamente affacciata all'armatura inferiore.




>>> soluzione: U = 0,37 $\mu$J; $Q_P$ = 5 nC

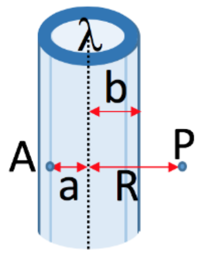
5.11) Un condensatore piano con carica $Q_0$, ha le armature quadrate di lato L distanti d. Fra le armature è parzialmente inserita (vedi figura) una lastra isolante a sezione quadrata anch'essa di lato L spessa d. Calcolare, in funzione della penetrazione x della lastra, l'espressione della densità di carica di polarizzazione sulla superficie superiore del dielettrico di suscettività costante $\chi$ nota.




>>> soluzione: $C = \varepsilon Lx/d + \varepsilon_0 L(L-x)/d = \varepsilon_0 L(L+\chi x)/d$; $\sigma_p = -P = -\varepsilon_0\chi E = -\varepsilon_0\chi\, Q_0/C\ 1/d = -\chi Q_0/[L(L+\chi x)]$

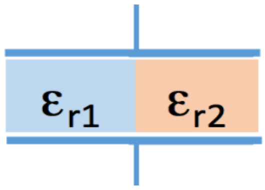
5.12) Una sfera conduttrice con carica Q = - 1 nC è circondata da un guscio sferico isolante di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r$ = 5. Calcolare il valore della carica di polarizzazione presente sulla superficie esterna dell'isolante.
>>> soluzione: $Q_P = Q\,\chi/\varepsilon_r$

5.13) Sull'asse di un lungo guscio cilindrico (raggio interno a ed esterno b) di materiale dielettrico con costante dielettrica relativa $\varepsilon_r$ è inserita una carica con densità lineare $\lambda$. Determinare l'espressione della differenza di potenziale $V_P$ - $V_A$ fra un punto P a distanza dall'asse R > b e un punto A sulla superficie interna del guscio. Il guscio cilindrico, inizialmente neutro, e immerso nel vuoto




>>> soluzione: $D=\lambda/2\pi r$; $\Delta V=-\lambda/2\pi\varepsilon_0\, [\ln(R/b)+1/\varepsilon_r \ln(b/a)]$

5.14) In un guscio dielettrico ($\varepsilon_r$ = 3) cilindrico di lunghezza infinita e raggi a = 1 cm e b = 2 cm è distribuita una carica con densità uniforme $\rho$ = 1 $\mu$C/m$^3$. Calcolare, fra un punto a distanza b dall'asse e uno a distanza R = 4 cm, la differenza di potenziale $V_b$-$V_R$
{alcuni dati possono essere non necessari per la soluzione}
>>> soluzione: 11,7 V




5.15) Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto una capacità $C_0$ = 10 nF. Viene riempito per metà volume con un dielettrico di costante relativa $\varepsilon_{r1}$ = 1,4 e per l'altra metà con un dielettrico di costante $\varepsilon_{r2}$ = 1,6. Calcolare il nuovo valore della capacità C e il rapporto fra le cariche di polarizzazione sui due dielettrici.

>>> soluzione: 15 nF; $\sigma_{p1}/\sigma_{p2}$ = 2/3

5.16) Determinare la capacità per unità di lunghezza di un condensatore costituito da un lungo filo di rame di raggio $R_1$ = 1 cm circondato da una guaina isolante ($\varepsilon_r$ = 2) cilindrica coassiale di raggi $R_2$ = 3 cm e $R_3$ = 4 cm racchiusa da un ulteriore guscio di zinco di raggi $R_3$ e $R_4$ = 6 cm. Fra $R_1$ e $R_2$ c'è il vuoto.

Calcolare intensità del campo elettrico e densità di energia elettrostatica nei punti distanti $R_0$ = 2 cm dall'asse del filo centrale quando al condensatore viene applicata una tensione di 10 V.

>>> soluzione: C/l = 45 pF/m; $E(R_0)$ = 0,4 kV/m; u = 0,7 $\mu$J/$m^3$

5.17) Una lastra isolante spessa h = 2 mm di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r$ = 3 viene inserita in un condensatore piano parallelamente alle armature che distano d = 5 mm.


Determinare le densità di carica di polarizzazione all'interno del condensatore quando fra le armature è presente una d.d.p. V = 11 V.

>>> soluzione: 17,9 nC/$m^2$

5.18) Fra le armature distanti d = 1 mm di un condensatore piano (S = 8 $cm^2$) sono presenti due lamine isolanti di spessore uguale costituite da due materiali utilizzati per realizzare circuiti stampati: bachelite e vetronite (FR4).

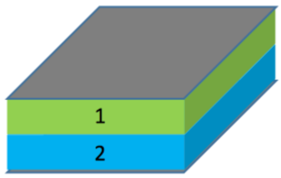
Determinare, quando fra le armature c'è una differenza di potenziale di 50 V:

a) la densità di carica libera positiva

b) le cariche di polarizzazione

c) le densità di energia nei due materiali

d) il momento di dipolo elettrico della lastra 1 di bachelite.



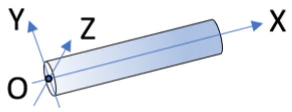

Verificare e) che caricando il condensatore a 15 kV viene superata la rigidità dielettrica della bachelite.

- bachelite: $\varepsilon_{r1}$ = 8; $E_{MAX}$ = 10 MV/m
- vetronite: $\varepsilon_{r2}$ = 5; $E_{MAX}$ = 20 MV/m

>>> soluzione: a) 2,7 $\mu$C/$m^2$; b) 1,9 nC e 1,7 nC; c) 51 mJ/$m^3$ e 82 mJ/$m^3$; d) 0,95 pCm; e) 11 MV/m

5.19) Un condensatore cilindrico isolato, di altezza h = 5 cm, in vuoto mostra una ddp fra le armature pari a $V_0$. Il condensatore viene riempito con olio isolante e la ddp diventa V = $V_0$/4. Calcolare la carica di polarizzazione sulla superficie dell'olio che bagna l'armatura interna del condensatore di raggio R = 3 mm sulla quale è accumulata una carica Q = +1 nC.

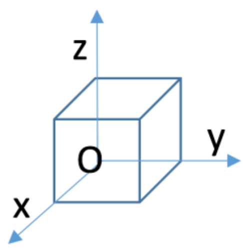
>>> soluzione: -0,75 nC




5.20) Un cilindretto dielettrico sottile di sezione S e lunghezza L è disposto lungo l'asse X. Il materiale è polarizzato nella direzione delle X crescenti: $P_x(x) = ax^2+b$ per $0 < x < L$ ; $P_y = P_z = 0$.
Determinare: le densità di carica di polarizzazione sulle superfici in x = 0, x = L e laterale, la carica totale di volume e verificare la neutralità del cilindretto.
>>> soluzione: $Q_{pSup}(0) = -bS$, $Q_{pSup}(L) = (aL^2+b)S$; $Q_{pVol} = -aSL^2$

5.21) Una carica puntiforme Q è posta al centro di una sfera di raggio R = 10 cm costituita da materiale omogeneo, lineare e isotropo di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$. Ricavare l'espressione della densità di carica di polarizzazione sulla superficie della sfera e il suo valore per Q = 0,3 nC.
>>> soluzione: 1,8 nC/m$^2$

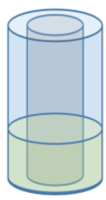
5.22) Un cubo di materiale dielettrico di lato L disposto lungo gli assi come indicato in figura è polarizzato: $\overrightarrow{P(x,y,z)} = (a\,z + b)\,\hat{k}$ con a e b costanti.
Calcolare le espressioni delle densità di carica di polarizzazione sulle sei superfici e nel volume del cubo.
Verificare che il cubo sia complessivamente neutro
>>> soluzione: $\sigma_p(z=0) = -b$; $\sigma_p(z=L) = a\,L + b$; $\rho_p(z) = -\,a$




5.23) Un blocco di dielettrico lineare, omogeneo e isotropo viene polarizzato uniformemente.
Il campo elettrico misurato in vuoto all'interno di un sottile taglio effettuato parallelamente al vettore polarizzazione vale $E_{//} = 400$ V/m; quello all'interno di un sottile taglio effettuato perpendicolarmente al vettore polarizzazione vale $E_{\perp} = 500$ V/m.
Ricavare il valore della suscettività del dielettrico.

5.24) Un condensatore piano ha le armature di superficie S distanti d = 1 mm. Fra le armature ci sono uno strato di aria spesso $d_0$ e una lastra di isolante ($\chi = 1$) spessa $d_1 = d_0$. Il condensatore viene caricato a Q = 1 $\mu$C. Determinare il momento di dipolo elettrico della lastra isolante.
>>> soluzione: 0,25 nCm


5.25) SENSORE DI LIVELLO: un condensatore cilindrico di raggio interno $R_1 = 2$ cm e raggio esterno $R_2 = 2{,}2$ cm, lungo d = 20 cm, posto verticalmente, viene riempito di acqua ($\varepsilon_r = 80$) fino al livello x. Al variare di x varia la capacità del condensatore. Determinare di quanto varia C al variare di x.
>>> soluzione: dC/dx = 0,46 nF/cm



5.1) $C+C = C'C'/(C'+C') \rightarrow C' = 4\,C \rightarrow \varepsilon_r = 4$

5.4) $\sigma_p = \pm\, \chi/\varepsilon_r\, \sigma/2$ $\quad V = \sigma h/2\varepsilon$

5.5) $F_r = -2\chi\tau/\varepsilon_0\, (\lambda/2\pi\varepsilon_r)^2\, 1/R^3$

5.6) $Q_{polVol} = -[\chi(R_1)/\varepsilon_r(R_1)-\chi(R_1)/\varepsilon_r(R_1)]\, Q$

5.7) $V = KR^3/(9\varepsilon_0\varepsilon_r)$

5.8) E dipende da tutte le cariche, anche quelle di polarizzazione. Utilizzare Gauss per calcolare E

5.9) $C = \varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 S/(\varepsilon_{r1}d_2+\varepsilon_{r2}d_1)$ $\quad \sigma = CV/S$ $\quad E_i = \sigma/(\varepsilon_0\varepsilon_{ri})$ $\quad \sigma_{PTOT} = \sigma_{p1}-\sigma_{p2} = \sigma\, \chi_1/\varepsilon_{r1} - \sigma\, \chi_2/\varepsilon_{r2}$

5.10) $U = ½\, Q^2/(3/2\, \varepsilon_0\varepsilon_r L^2/h)$; $Q_P = \chi\, Q/\varepsilon_r$

5.12) $\sigma_p = \mathbf{P}\, \mathbf{n} = \varepsilon_0\, \chi\, E_n = \varepsilon_0\, \chi\, D_n/\varepsilon_0\varepsilon_r = \chi/\varepsilon_r\, D_n = \chi/\varepsilon_r\, Q/4\pi R^2$ $\quad Q_P = \text{int}\, \sigma_p\, dS = \chi/\varepsilon_r\, Q$

5.14) $\Delta V = \rho\, (b^2-a^2)/(2\, \varepsilon_0)\, \ln(R/b)$

5.15) $C = \varepsilon_o S/2d\, (\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})$; $\sigma_{p1}/\sigma_{p2} = P_1/P_2 = (\varepsilon_0\chi_1 E)/(\varepsilon_0\chi_2 E)$

5.16) $E(R_1<r<R_2) = \lambda/(2\pi\varepsilon_0\, r)$; $\; E(R_2<r<R_3) = \lambda/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\, r)$; $\quad \Delta V = \lambda/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r)\, [\varepsilon_r \ln(R_2/R_1) + \ln(R_3/R_2)]$

$\lambda/(2\pi\varepsilon_0) = \Delta V\varepsilon_r/[\varepsilon_r \ln(R_2/R_1) + \ln(R_3/R_2)]$; $C_1/l = 2\pi\varepsilon_0/\ln(R_2/R_1)$; $C_2/l = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r/\ln(R_3/R_2)$

5.17) $\sigma_p = \chi/\varepsilon_r\;\; \varepsilon_0 V/[(d-h)+h/\varepsilon_r]$

5.18) a) $\sigma=2V/d\; \varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}/(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})$; $\;$ $b_i$) $\sigma S\chi_i/\varepsilon_{ri}$; $\;$ $c_i$) $½\, \sigma^2/(\varepsilon_0\, \varepsilon_{ri})$; $\;$ d) $2\sigma\chi_1/\varepsilon_{r1}\, Sd$;

e) $E_1= \sigma'/(\varepsilon_0\varepsilon_{r1})= 300\sigma/(8\varepsilon_0)$

5.19) $\varepsilon_r = 4$; $Q_p = -\chi/\varepsilon_r\, Q$

5.20) $\rho_p = -\text{div}\, \mathbf{P} = -2ax \rightarrow Q_{pVol} = -aSL^2$

5.21) $\sigma_p = \chi/\varepsilon_r\, Q/(4\pi R^2) = 3Q/(16\pi R^2)$ $\quad$ E è nella materia!!!

5.22) $\sigma_p = \mathbf{P}\, \mathbf{n} \neq 0$ solo sulle facce parallele al piano XY. $\rho_p(z) = -\, \partial P/\partial z$

5.24) $p = \chi\, Q/(1+\chi)\, d/2$

5.25) $C(x) = 2\pi\varepsilon_0[\varepsilon_r\, x + (d-x)]/\ln(R_2/R_1)$

**ULTERIORI SUGGERIMENTI**

5.1) nel dielettrico il campo elettrico generato dalla carica Q sulle armature si riduce di $\varepsilon_r$, altrettanto fa la d.d.p. e quindi la capacità aumenta di $\varepsilon_r$

5.4) $\Phi_\Sigma(D) = Q \rightarrow D = \sigma/2$ ovunque; nella lastra $E = D/\varepsilon = \sigma/2\varepsilon \rightarrow V = \sigma h/2\varepsilon$;
$\sigma_p = \pm P = \pm\, \varepsilon_0\chi E = \pm\chi\sigma/2\varepsilon_r$

5.5) $\mathbf{p} = \mathbf{P}\tau$; $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}$; $E=\lambda/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\, r)$

5.6) $Q_{polSup}(R_1) = -4\pi R_1^2\sigma_p(R_1) = 4\pi R_1^2 P(R_1) = -4\pi R_1^2\varepsilon_0\chi(R_1)\, Q/[4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(R_1)R_1^2]$

5.7) la densità di carica non è costante; ricavando **E** fare attenzione nel calcolare la carica interna alla superfice di Gauss cilindrica: $E(r<R) = Kr^2/(3\varepsilon_0\varepsilon_r)$

5.8) $\sigma_P(R_1) = -kR_1$; $\sigma_P(R_2) = +kR_2$; $\rho_P = -\mathrm{div}\mathbf{P} = -3k$

$r<R_1 \rightarrow \quad 4\pi r^2\, E(r) = Q_{INT}/\varepsilon_0 = 0 \rightarrow E(r) = 0$;

$R_1<r<R_2 \rightarrow \quad 4\pi r^2\, E(r) = Q_{INT}/\varepsilon_0 = [4\pi R_1^2\sigma_P(R_1) + \int_{R1\rightarrow r} 4\pi r^2\rho_P dr]/\varepsilon_0 \rightarrow E(r)=[-kR_1^3 - k(r^3-R_1^3)]/(\varepsilon_0\, r^2)$

$R_2<r \rightarrow \quad 4\pi r^2\, E(r) = Q_{INT}/\varepsilon_0 = [4\pi R_1^2\sigma_P(R_1) + \int_{R1\rightarrow R2} 4\pi r^2\rho_P dr + 4\pi R_2^2\sigma_P(R_2)]/\varepsilon_0$
$\rightarrow E(r) = [-kR_1^3 - k(R_2^3-R_1^3) + kR_2^3]/(\varepsilon_0\, r^2) = 0$

5.10) $C_p = (\varepsilon L^2/h + \varepsilon L^2/2h)$; $U = ½\, Q^2/C_p$; $Q_P = P_1\, S + P_2\, S = (\varepsilon_0\chi\Delta V/2h + \varepsilon_0\chi\Delta V/h)S = 3/2\varepsilon_0\chi\; Q/Cp\; L^2/h$

5.14) $2\pi r\, h\, D = \rho\, \pi\, (b^2-a^2)\, h \rightarrow E=\rho\, (b^2-a^2)/(2\, \varepsilon_0\, r)$

5.16) $C/l = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r/[\varepsilon_r \ln(R_2/R_1) + \ln(R_3/R_2)]$; $E(R_0) = \Delta V\varepsilon_r/\{R_0[\varepsilon_r \ln(R_2/R_1) + \ln(R_3/R_2)]\}$;
$u(R_0) = ½\, \varepsilon_0\, E^2(R_0)$

5.17) $V = (d-h)\, \sigma/\varepsilon_0 + h\, \sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r \rightarrow \sigma = \varepsilon_0 V/[(d-h)+h/\varepsilon_r]$; $E= E_0/\varepsilon_r \rightarrow \sigma/\varepsilon_0 - \sigma_p/\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r \rightarrow \sigma_p = \chi/\varepsilon_r\, \sigma$

5.19) $E=E_0/\varepsilon_r \rightarrow V=V_0/\varepsilon_r$; $D = Q/h/(2\pi r)$; $E = D/\varepsilon_o\varepsilon_r$; $\sigma_p = -P = -\varepsilon_0\chi E$; $Q_p = 2\pi rh\sigma_p = -\chi/\varepsilon_r\, Q$

5.21) $\sigma_p = \mathbf{P}\, \mathbf{n} = P$; $\quad \mathbf{P} = \varepsilon_0\, \chi\, \mathbf{E} = \varepsilon_0\, \chi\, \mathbf{D}/\varepsilon = \chi/\varepsilon_r\, \mathbf{D}$; $\quad 4\pi r^2\, D = Q$

5.24) $E_1 = Q/(S\varepsilon_0\varepsilon_r)$; $p = P\, \tau = \varepsilon_0\, \chi\, E_1\, (S\, d_1) = \chi\, Q/\varepsilon_r\, d/2$