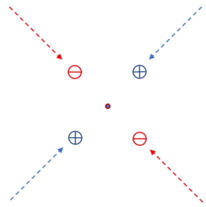
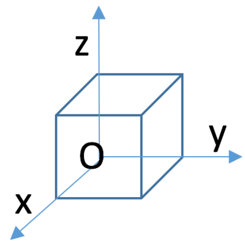
5° ESERCITAZIONE – mercoledì 24 ottobre 2018 (e molti altri esercizi)



1) Calcolare il lavoro che occorre compiere per spostare quattro cariche puntiformi dall'infinito fino ai vertici di un quadrato di lato d = 1 cm muovendole, nel piano, lungo traiettorie rettilinee fra loro perpendicolari (vedi figura). Due cariche sono positive (q = +1 nC) e due hanno la stessa carica, in modulo, ma di segno opposto.
>>> soluzione: $1/4\pi\varepsilon_0 \; q^2/d \; (-4 + \sqrt{2})$



2) Un cubo di materiale dielettrico di lato L disposto lungo gli assi come indicato in figura è polarizzato: $\overrightarrow{P(x,y,z)} = (a\,z + b)\,\hat{k}$ con a e b costanti.
Calcolare le espressioni delle densità di carica di polarizzazione sulle sei superfici e nel volume del cubo.
Verificare che il cubo sia comlessivamente neutro
>>> soluzione: $\sigma_p(0) = -b$; $\sigma_p(L) = a\,L + b$; $\rho_p(z) = -a$

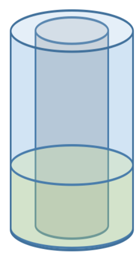
3) Una carica elettrostatica è distribuita all'interno di un **guscio sferico** dielettrico di raggi R_1 e R_2 con polarizzazione **P** = k**r**. Calcolare il valore del campo elettrico in tutto lo spazio.
{Iniziare col ricavare le densità di carica di polarizzazione superficiali e di volume}
>>> soluzione: $\sigma_P(R_1) = -kR_1$; $\sigma_P(R_2) = +kR_2$; $\rho_P = -3k$ ➔ $E(R_1<r<R_2) = [-kR_1^3 - k(r^3-R_1^3)]/(\varepsilon_0 \, r^2)$

4) Una carica puntiforme Q è posta al centro di una sfera di raggio R = 10 cm costituita da materiale omogeneo, lineare e isotropo di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$. Ricavare l'espressione della densità di carica di polarizzazione sulla superficie della sfera e il suo valore per Q = 0,3 nC.
>>> soluzione: 1,8 nC/m^2

5) Una sottile lastra isolante spessa h = 2 mm di forma quadrata (L = 10 cm) è disposta parallelamente (a distanza d = 5 cm) a una distribuzione piana di carica con densità $\sigma = +10\ nC/m^2$. Sapendo che la lastra ha una costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 2$ determinare le densità di carica di polarizzazione sulle due facce della lastra e la differenza di potenziale che si stabilisce fra di esse. Trascurare gli effetti di bordo.
>>> soluzione: 2,5 nC/m^2; 0,56 V

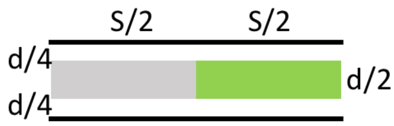
6) Due condensatori piani uguali hanno in aria, se posti in parallelo, la stessa capacità che avrebbero se, posti in serie, lo spazio fra le armature venisse riempito completamente da olio isolante.
Determinare la suscettività elettrica dell'olio.
>>> soluzione: $\chi = 3$

NEI SEGUENTI ESERCIZI DETERMINARE SOLO SE LE CAPACITA' SONO IN SERIE, PARALLELO O DIVERSAMENTE CONNESSE



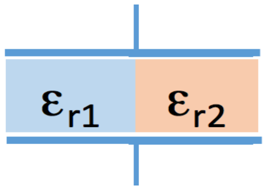
7) SENSORE DI LIVELLO: un condensatore cilindrico di raggio interno R_1 = 2 cm e raggio esterno R_2 = 2,2 cm, lungo d = 20 cm, posto verticalmente, viene riempito di acqua ($\varepsilon_r = 80$) fino al livello x. Al variare di x varia la capacità del condensatore. Determinare di quanto varia C al variare di x.
>>> soluzione: dC/dx = 0,42 nF/m

8) In un condensatore piano con armature di superficie S distanti d sono presenti parallele alle armature, a distanza d/4, due lastre piane di superficie S/2 e spessore d/2. Una lastra è conduttrice, l'altra isolante con costante dielettrica relativa ε_r.



Determinare, trascurando gli effetti di bordo, la capacità del condensatore.

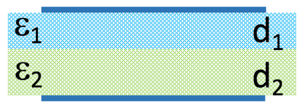
>>> soluzione: $\varepsilon_o S/d\ (1+2\varepsilon_r)/(1+\varepsilon_r)$



9) Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto una capacità C_0 = 10 nF. Viene riempito per metà volume con un dielettrico di costante relativa ε_{r1} = 1,4 e per l'altra metà con un dielettrico di costante ε_{r2} = 1,6. Calcolare il nuovo valore della capacità C e il rapporto fra le cariche di polarizzazione sui due dielettrici.

>>> soluzione: 15 nF; σ_{p1}/σ_{p2} = 2/3

10) Un condensatore piano con armature di area S è riempito da due lastre di dielettrico, una di spessore d_1 = 0,9 cm e di costante dielettrica relativa ε_{r1} = 3 l'altra di spessore d_2 = 0,4 cm e costante dielettrica relativa ε_{r2} = 2.



Ai capi del condensatore è applicata una differenza di potenziale ΔV = 5 V. Calcolare i valori E_1 e E_2 dei moduli di campo elettrico nei due dielettrici e la densità di carica totale di polarizzazione σ_{PTOT} sulla superficie di separazione dei due dielettrici.

>>> soluzione: E_1 = 333 V; E_2 = 500 V; σ_{PTOT} = 1,5 nC/m^2

11) Determinare la capacità per unità di lunghezza di un condensatore costituito da un lungo filo di rame di raggio R_1 = 1 cm circondato da una guaina isolante (ε_r = 2) cilindrica coassiale di raggi R_2 = 3 cm e R_3 = 4 cm racchiusa da un ulteriore guscio di zinco di raggi R_3 e R_4 = 6 cm. Fra R_1 e R_2 c'è il vuoto. Calcolare intensità del campo elettrico e densità di energia elettrostatica nei punti distanti R_0 = 2 cm dall'asse del filo centrale quando al condensatore viene applicata una tensione di 10 V.

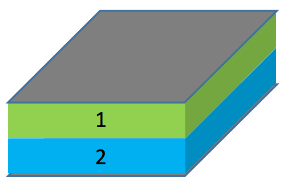
>>> soluzione: C/l = 45 pF/m; E(R_0) = 0,4 kV/m; u = 0,7 μJ/m^3

12) Un condensatore piano ha le armature di superficie S distanti d = 1 mm. Fra le armature ci sono uno strato di aria spesso d_0 e una lastra di isolante (χ = 1) spessa d_1 = d_0. Il condensatore viene caricato a Q = 1 μC. Determinare il momento di dipolo elettrico della lastra isolante.

>>> soluzione: 0,25 nCm

13) Fra le armature di un condensatore piano (S = 8 cm^2) sono presenti due lamine isolanti di spessore d = 0,5 mm di due materiali utilizzati per circuiti stampati: bachelite e vetronite (FR4). Determinare, quando fra le armature c'è una differenza di potenziale di 50 V,

a) la densità di carica libera positiva
b) le cariche di polarizzazione
c) le densità di energia nei due materiali
d) il momento di dipolo elettrico della lastra 1 di bachelite.



Verificare e) che caricando il condensatore a 15 kV viene superata la rigidità dielettrica della bachelite.

- bachelite: ε_{r1} = 8; E_{MAX} = 10 MV/m
- vetronite: ε_{r2} = 5; E_{MAX} = 20 MV/m

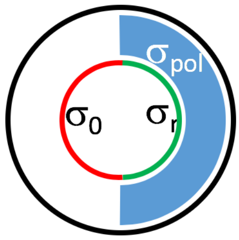
>>> soluzione: a) 2,7 μC/m^2; b) 1,9 nC e 1,7 nC; c) 51 mJ/m^3 e 82 mJ/m^3; d) 0,95 nCm; e) 11 MV/m

14) Una lastra isolante spessa h = 2 mm di costante dielettrica relativa ε_r = 3 viene inserita in un condensatore piano parallelamente alle armature che distano d = 5 mm.

Determinare le densità di carica di polarizzazione all'interno del condensatore quando fra le armature è presente una d.d.p. V = 11 V.

>>> soluzione: 17,9 nC/m^2

15) Un condensatore sferico è riempito a metà di una sostanza isotropa ed omogenea di costante dielettrica relativa ε_r. Il raggio dell'armatura interna è R_1, mentre quello dell'armatura esterna è R_2. Il condensatore è carico con carica totale +Q sull'armatura interna.

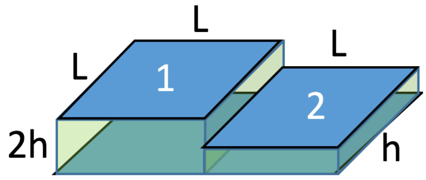


Calcolare la densità di carica libera sull'armatura interna (cioè per r = R_1) in corrispondenza della parte affacciata al vuoto (σ_0) e di quella a contatto con il dielettrico (σ_r); calcolare inoltre la densità di carica di polarizzazione (σ_{pol}) sulla superficie del dielettrico, sempre per r = R_1.

{Il campo elettrico nel vuoto è uguale a quello nel dielettrico… }

>>> soluzione: $\sigma_0 = Q/[2\pi R_1^2(1+\varepsilon_r)]$; $\sigma_r = Q\,\varepsilon_r/[2\pi R_1^2(1+\varepsilon_r)]$; $\sigma_{pol} = Q\,(1-\varepsilon_r)/[2\pi R_1^2(1+\varepsilon_r)]$

16) Nella struttura di condensatori riportata in figura le armature superiori sono due quadrati di lato L = 10 cm, le distanze fra le coppie di armature sono h = 2 mm e 2h e la costante dielettrica relativa dell'isolante è ε_r =2.



Il sistema, complessivamente neutro, è isolato mentre le armature superiori 1 e 2 sono collegate elettricamente fra loro. Determinare:

a) l'energia elettrostatica accumulata nel sistema di condensatori sapendo che sull'armatura inferiore è presente una carica Q = - 10 nC;

b) la carica di polarizzazione complessivamente affacciata all'armatura inferiore.

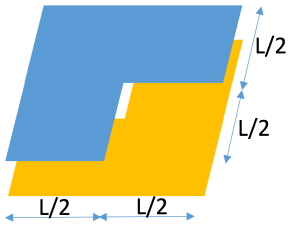
>>> soluzione: U = 0,37 μJ; Q_P = 5 nC

17) Un condensatore cilindrico isolato, di altezza h = 5 cm, in vuoto mostra una ddp fra le armature pari a V_0. Il condensatore viene riempito con olio isolante e la ddp diventa V = V_0/4. Calcolare la carica di polarizzazione sulla superficie dell'olio che bagna l'armatura interna del condensatore di raggio R = 3 mm sulla quale è accumulata una carica Q = +1 nC.

>>> soluzione: -0,75 nC

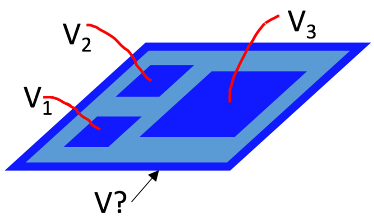
ALTRI

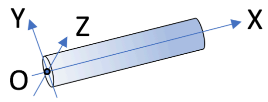
18) Quattro cariche (1 nC) sono poste ai vertici di un quadrato di lato L = 10 cm. Hanno i segni riportati in figura: determinare la forza esercitata su ognuna di esse.
>>> soluzione: $1/(4\pi\varepsilon_0)\ q^2/L^2\ (1/2 - \sqrt{2})$



19) Un condensatore è costituito da due armature sagomate a forma di L disposte come in figura a distanza d = 0,89 mm. Determinare, trascurando gli effetti di bordo, quanta carica è presente sull'armatura positiva quando al condensatore viene applicata una tensione di 10 V (L = 4 cm).
>>> soluzione: 80 pC

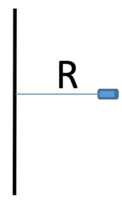
20) Su una lamina metallica elettricamente neutra coperta da uno strato uniforme di vernice isolante vengono applicati tre elettrodi di aree $S_1 = S_2 = 1/4\ S_3$ tenuti ai potenziali $V_1 = +2V$, $V_2 = -1V$, $V_3 = +5V$. Verificare, trascurando gli effetti di bordo e le interazioni fra gli elettrodi, che la lamina si porta a un potenziale di 1V





21) Un cilindretto dielettrico sottile di sezione S e lunghezza L è disposto lungo l'asse X. Il materiale è polarizzato nella direzione delle X crescenti: $P_x(x) = ax^2+b$ per $0 < x < L$; $P_y = P_z = 0$.
Determinare: le densità di carica di polarizzazione sulle superfici in x = 0, x = L e laterale, la carica totale di volume e verificare la neutralità del cilindretto.
>>> soluzione: $Q_{pSup}(0) = -bS$, $Q_{pSup}(L) = (aL^2+b)S$; $Q_{pVol} = -aSL^2$

22) Un minuscolo cilindretto di materiale dielettrico ($\varepsilon_r = 3$) di volume $\tau = 10^{-9}\ m^3$ è posto radialmente a distanza R = 20 cm dall'asse di un filo indefinito uniformemente carico ($\lambda = 10\ \mu C/m$). Determinare la forza di attrazione esercitata dal filo sul cilindretto. {F= – grad U}
>>> soluzione: -16 nN verso il filo



23) In un lungo cilindro isolante di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 2$ e raggio R = 1 cm viene depositata una carica con densità $\rho = kr$ con r distanza dall'asse e $k = 2\ mC/m^4$. Calcolare la differenza di potenziale fra due punti, uno sull'asse del cilindro e l'altro sulla sua superficie laterale.
>>> soluzione: 12V

24) Un condensatore sferico di raggi R_1 e R_2 è riempito da un guscio sferico di dielettrico isotropo, lineare ma non omogeneo. La costante dielettrica relativa dipende quindi dal raggio: vale 2 sulla superfice a contatto con l'armatura interna e 4 sulla superficie a contatto con l'armatura esterna.
Calcolare la carica di polarizzazione di volume quando sull'armatura interna viene posta una carica Q = 10 nc
{Sugg.: il dielettrico è complessivamente neutro…}
>>> soluzione: $Q_{polVol} = -2,5$ nC

1) $L = \Delta U = 1/2\ \Sigma qV = ½\ \{4\ [1/(4\pi\varepsilon_0)(-q^2/d + q^2/(\sqrt{2}d) - q^2/d)]\}$
2) $\sigma_p = \mathbf{P}\ \mathbf{n} \neq 0$ solo sulle facce parallele al piano XY. $\rho_p(z) = -\ \partial P/\partial z$
3) E dipende da tutte le cariche, anche quelle di polarizzazione. Utilizzare Gauss per calcolare E
4) $\sigma_p = \chi/\varepsilon_r\ Q/(4\pi R^2) = 3Q/(16\pi R^2)$ E è nella materia!!!
5) $\sigma_p = \pm\ \chi/\varepsilon_r\ \sigma/2 \qquad V = \sigma h/2\varepsilon$
6) $C+C = C'C'/(C'+C') \rightarrow C' = 4\ C \rightarrow \varepsilon_r = 4$
7) $C(x) = 2\pi\varepsilon_0 \ln(R_2/R_1)\ [\varepsilon_r x + (d-x)]$
9) $C = \varepsilon_0 S/2d\ (\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})$; $\sigma_{p1}/\sigma_{p2} = P_1/P_2 = (\varepsilon_0\chi_1 E)/(\varepsilon_0\chi_2 E)$
10) $C = \varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 S/(\varepsilon_{r1}d_2+\varepsilon_{r2}d_1)$ $\quad \sigma = CV/S \quad E_i = \sigma/(\varepsilon_0\varepsilon_{ri}) \quad \sigma_{PTOT} = \sigma_{p1}-\sigma_{p2} = \sigma\ \chi_1/\varepsilon_{r1} - \sigma\ \chi_2/\varepsilon_{r2}$
11) $C/l = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r/[\varepsilon_r \ln(R_2/R_1) + \ln(R_3/R_2)]$; $E(R_0) = \Delta V\varepsilon_r/\{R_0[\varepsilon_r \ln(R_2/R_1) + \ln(R_3/R_2)]\}$; $u(R_0) = ½\ \varepsilon_0\ E^2(R_0)$
12) $p = \chi\ Q/(1+\chi)\ d/2$
13) a) $\sigma = V/d\ \varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}/(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})$; $b_i)\ \sigma S\chi_i/\varepsilon_{ri}$; $c_i)\ ½\ \sigma^2/(\varepsilon_0\ \varepsilon_{ri})$; d) $\sigma\chi_1/\varepsilon_{r1} Sd$; e) $E_1 = \sigma'/(\varepsilon_0\varepsilon_{r1}) = 300\sigma/(8\varepsilon_0)$
14) $\sigma_p = \chi/\varepsilon_r\ \ \varepsilon_0 V/[(d-h)+h/\varepsilon_r]$
15) $Q_0/(4\pi\varepsilon_0 r^2) = Q_r/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2) \rightarrow \sigma_0 = \sigma_r/\varepsilon_r$; $Q = \sigma_0(2\pi R_1^2)+\sigma_r(2\pi R_1^2) \rightarrow \sigma_0 = Q/[2\pi R_1^2(1+\varepsilon_r)]$; $\sigma_r = \sigma_0\ \varepsilon_r$
16) $U = ½\ Q^2/(3/2\ \varepsilon_0\varepsilon_r L^2/h)$; $Q_P = \chi\ Q/\varepsilon_r$
17) $\varepsilon_r = 4$; $Q_p = -\chi/\varepsilon_r\ Q$
19) $C = \varepsilon_0\ 2(L/2)^2/d$
22) $F_r = -2\chi\tau/\varepsilon_0\ (\lambda/2\pi\varepsilon_r)^2\ 1/R^3$
23) $V = KR^3/(9\varepsilon_0\varepsilon_r)$
24) $= -[\chi(R_1)/\varepsilon_r(R_1) - \chi(R_1)/\varepsilon_r(R_1)]\ Q$

ULTERIORI SUGGERIMENTI

3) $\sigma_P(R_1) = -kR_1$; $\sigma_P(R_2) = +kR_2$; $\rho_P = -\mathrm{div}\mathbf{P} = -3k$
$r<R_1 \rightarrow \qquad 4\pi r^2\ E(r) = Q_{INT}/\varepsilon_0 = 0 \rightarrow E(r) = 0$;
$R_1<r<R_2 \rightarrow \qquad 4\pi r^2\ E(r) = Q_{INT}/\varepsilon_0 = [4\pi R_1^2\sigma_P(R_1) + \int_{R1\rightarrow r} 4\pi r^2\rho_P dr]/\varepsilon_0 \rightarrow E(r) = [-kR_1^3 - k(r^3-R_1^3)]/(\varepsilon_0\ r^2)$
$R_2<r \rightarrow \qquad 4\pi r^2\ E(r) = Q_{INT}/\varepsilon_0 = [4\pi R_1^2\sigma_P(R_1) + \int_{R1\rightarrow R2} 4\pi r^2\rho_P dr + 4\pi R_2^2\sigma_P(R_2)]/\varepsilon_0$
$\rightarrow E(r) = [-kR_1^3 - k(R_2^3-R_1^3) + kR_2^3]/(\varepsilon_0\ r^2) = 0$
4) $\sigma_p = \mathbf{P}\ \mathbf{n} = P$; $\qquad \mathbf{P} = \varepsilon_0\ \chi\ \mathbf{E} = \varepsilon_0\ \chi\ \mathbf{D}/\varepsilon = \chi/\varepsilon_r\ \mathbf{D}$; $\qquad 4\pi r^2\ D = Q$
5) $\Phi_\Sigma(D) = Q \rightarrow D = \sigma/2$ ovunque; nella lastra $E = D/\varepsilon = \sigma/2\varepsilon \rightarrow V = \sigma h/2\varepsilon$; $\sigma_p = \pm P = \pm\ \varepsilon_0\chi E = \pm\chi\sigma/2\varepsilon_r$
6) nel dielettrico il campo elettrico generato dalla carica Q sulle armature si riduce di ε_r, altrettanto fa la d.d.p. e quindi la capacità aumenta di ε_r
11) $E(R_1<r<R_2) = \lambda/(2\pi\varepsilon_0\ r)$; $E(R_2<r<R_3) = \lambda/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\ r)$; $\Delta V = \lambda/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r)\ [\varepsilon_r \ln(R_2/R_1) + \ln(R_3/R_2)]$
$\lambda/(2\pi\varepsilon_0) = \Delta V\varepsilon_r/[\varepsilon_r \ln(R_2/R_1) + \ln(R_3/R_2)]$; $C_1/l = 2\pi\varepsilon_0/\ln(R_2/R_1)$; $C_2/l = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r/\ln(R_3/R_2)$
12) $E_1 = Q/(S\varepsilon_0\varepsilon_r)$; $p = P\ \tau = \varepsilon_0\ \chi\ E_1\ (S\ d_1) = \chi\ Q/\varepsilon_r\ d/2$
14) $V = (d-h)\ \sigma/\varepsilon_0 + h\ \sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r \rightarrow \sigma = \varepsilon_0 V/[(d-h)+h/\varepsilon_r]$; $E = E_0/\varepsilon_r \rightarrow \sigma/\varepsilon_0 - \sigma_p/\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r \rightarrow \sigma_p = \chi/\varepsilon_r\ \sigma$
15) La componente tangenziale del campo elettrico E_t si conserva all'interfaccia vuoto-dielettrico. Le linee di campo di E hanno simmetria radiale sia se la sorgente è σ_0, sia se la sorgente è σ_r-σ_{pol}=σ_0; pertanto si può sfruttare la simmetria applicando il teorema di Gauss
16) $C_p = (\varepsilon L^2/h + \varepsilon L^2/2h)$; $U = ½\ Q^2/C_p$; $Q_P = P_1\ S + P_2\ S = (\varepsilon_0\chi\Delta V/2h + \varepsilon_0\chi\Delta V/h)S = 3/2\varepsilon_0\chi\ Q/Cp\ L^2/h$
17) $E = E_0/\varepsilon_r \rightarrow V = V_0/\varepsilon_r$; $D = Q/h/(2\pi r)$; $E = D/\varepsilon_0\varepsilon_r$; $\sigma_p = -P = -\varepsilon_0\chi E$; $Q_p = 2\pi rh\sigma_p = -\chi/\varepsilon_r\ Q$
18) la somma vettoriale delle forze esercitate su ogni carica è diretta verso il centro del quadrato
19) di tutta la superficie solo su due quadrati di lato L/2 si ha induzione elettrostatica completa
20) schematizzare la struttura come una stella (albero) di 3 condensatori di capacità C, C e C/4
21) $\rho_p = -\mathrm{div}\ \mathbf{P} = -2ax \rightarrow Q_{pVol} = -aSL^2$
22) $\mathbf{p} = \mathbf{P}\tau$; $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}$; $E = \lambda/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\ r)$
23) la densità di carica non è costante; ricavando **E** fare attenzione nel calcolare la carica interna alla superfice di Gauss cilindrica: $E(r<R) = Kr^2/(3\varepsilon_0\varepsilon_r)$
24) $Q_{polSup}(R_1) = -4\pi R_1^2\sigma_p(R_1) = 4\pi R_1^2 P(R_1) = -4\pi R_1^2\varepsilon_0\chi(R_1)\ Q/[4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(R_1)R_1^2]$