



FISICA

A.A. 2023-2024

Ingegneria Gestionale

6° prova del 27 Marzo 2024

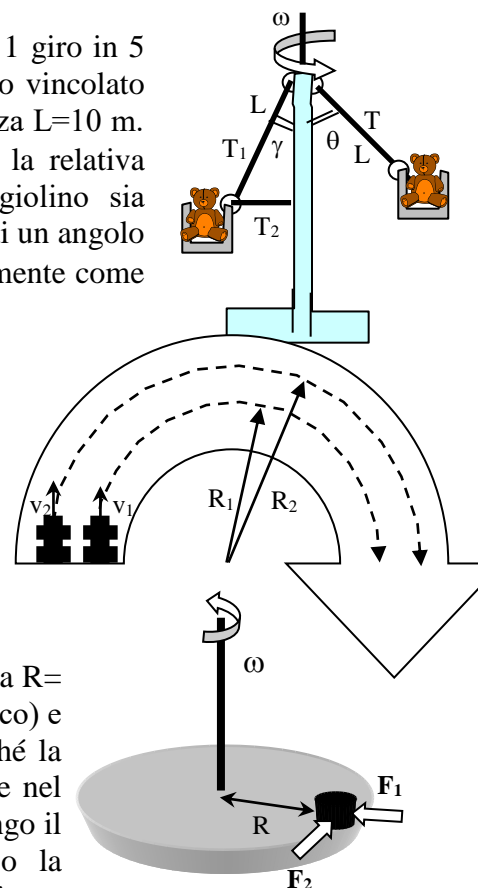
Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti inviandoli all'indirizzo corsofisicagestionalesapienza@gmail.com entro Giovedì 4 Aprile.

1. Un'auto viaggia alla velocità di 120 km/h ed affronta una curva di raggio di curvatura $R=100$ m ed inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo $\theta=10^\circ$. Determinare quale debba essere il valore minimo del coefficiente di attrito statico fra piano stradale e pneumatici affinché l'auto non sbandi.
2. Un treno corre in curva a 130 km/h ed un pendolo semplice, che a terra oscillerebbe con un periodo $T_0=1$ s, finisce per oscillare dentro il treno 121 volte in 2 minuti. Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria circolare descritta dal treno. (si trascuri la forza di Coriolis)
3. Se il giorno sulla terra durasse solo 1 ora quale sarebbe il valore dell'accelerazione di gravità all'equatore? [massa della Terra $M_T=5.97 \cdot 10^{24}$ kg, raggio terrestre $R_T=6300$ km, $G=6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²kg⁻²]
4. Un dispositivo "rotor" di un luna park è costituito da un cilindro cavo di raggio $R=4$ m. Un uomo viene appoggiato alla parete laterale del cilindro che viene successivamente posto in rotazione intorno al proprio asse con velocità angolare ω . Conoscendo il coefficiente di attrito statico fra l'uomo e la parete ($\mu=0.4$), determinare la minima velocità angolare da imprimere al rotor in grado di garantire l'equilibrio ossia la perfetta adesione dell'uomo alla parete anche quando viene tolta la piattaforma sulla quale l'uomo poggiava inizialmente i piedi.

5. Una giostra ruota uniformemente intorno ad un asse verticale compiendo 1 giro in 5 secondi. Un piccolo animale di massa $m=10$ kg è seduto su di un seggiolino vincolato all'albero rotante per il tramite di una fune di massa trascurabile e di lunghezza $L=10$ m. Calcolare l'angolo di inclinazione della fune θ (rispetto alla verticale) e la relativa tensione T . **Facoltativo (2):** ripetere l'esercizio ipotizzando che il seggiolino sia vincolato per il tramite di due funi: la prima sempre di lunghezza L inclinata di un angolo $\gamma=30^\circ$ rispetto alla verticale, la seconda di lunghezza $L/2$ disposta orizzontalmente come in figura. Calcolare le tensioni delle due funi, rispettivamente T_1, T_2

6. Due automobili da corsa arrivano affiancate prima di una curva semicircolare, che entrambe percorrono a velocità costante lungo due traiettorie di raggio rispettivamente $R_1=200$ m, $R_2=220$ m. Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra ruote ed asfalto vale $\mu_s=0.75$ per entrambe le auto, si calcoli la massima velocità con cui ognuna delle macchine può percorrere la curva senza slittare e si determini quale automobile, in queste condizioni, arrivi prima al termine della curva e con quanto anticipo.

7. Una moneta di massa $m=10$ g è collocata su un disco rotante ad una distanza $R=15$ cm dall'asse. I coefficienti di attrito tra la moneta ed il disco sono 0.7 (statico) e 0.6 (dinamico). Determinare la velocità angolare massima consentita affinché la moneta non slitti sul disco. Determinare la nuova massima velocità angolare nel caso la moneta venisse sottoposta ad una forza costante $F_1=0.1$ N diretta lungo il raggio. **Facoltativo:** determinare la massima velocità angolare nel caso la moneta venisse sottoposta ad una forza costante $F_2=0.03$ N diretta tangenzialmente al bordo del disco.





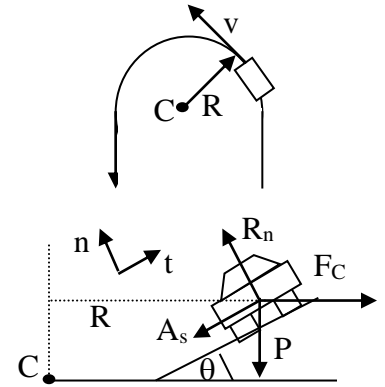
FISICA

A.A. 2023-2024

Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 6° prova

1. Nel sistema di riferimento non inerziale solidale al guidatore, la macchina è soggetta a 4 forze: la forza peso $P=mg$ diretta lungo la verticale, la reazione normale R_n lungo la normale n , la forza centrifuga $F_c=mv^2/R$ lungo la radiale, la forza di attrito statico A_s lungo l'asse tangenziale t . Nel sistema solidale al guidatore l'auto è ferma e le 4 forze si equilibrano $\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{R}_n + \vec{A}_s = 0$. Proiettando l'equazione lungo gli assi n, t otteniamo: imponendo l'equilibrio lungo n si ottiene il valore di $R_n = P \cos \theta + F_c \sin \theta$, mentre lungo t si ottiene l'attrito richiesto $A_s = F_c \cos \theta - P \sin \theta$. A posteriori imponiamo che l'attrito richiesto sia inferiore a quello massimo $A_s \leq A_{\max} = \mu_s R_n$ da cui

$\mu_s \geq A_s / R_n = (F_c \cos \theta - P \sin \theta) / (F_c \sin \theta + P \cos \theta) = (v^2/R - gtg\theta) / (v^2tg\theta/R + g)$ ossia $\mu_s \geq 0.8$ valore molto elevato! Se la curva fosse stata inclinata di 30° il valore sarebbe stato $\mu_s \geq 0.336$



2. Nel sistema di riferimento non inerziale solidale al treno, il pendolo è soggetto a 3 forze: la forza peso $P=mg$ diretta lungo la verticale, la tensione del filo T lungo la normale n , la forza centrifuga $F_c=mv^2/R$ lungo l'orizzontale. Queste forze si equilibrano $\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{T} = 0$ per un determinato angolo θ_{eq} . Il valore di θ_{eq} si ricava proiettando le forze lungo l'asse tangenziale t ($F_c \cos \theta - P \sin \theta = ma_t$) ed imponendo per la statica $a_t = 0$ da cui $tg \theta_{eq} = F_c / P = v^2 / gR$. Nel caso dinamico invece $a_t = l \cdot d^2\theta / dt^2$ e l'equazione per la dinamica può scriversi come segue

$$P \left(\frac{F_c}{P} \cos \theta - \sin \theta \right) = P \left(\frac{\sin \theta_{eq}}{\cos \theta_{eq}} \cos \theta - \sin \theta \right) = - \frac{mg}{\cos \theta_{eq}} \sin(\theta - \theta_{eq}) = ml d^2\theta / dt^2$$

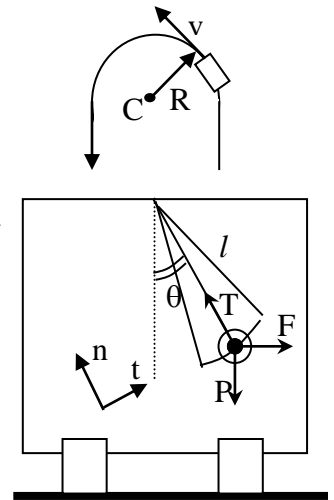
Introducendo l'angolo differenza $\tilde{\theta} = \theta - \theta_{eq}$, per cui $d^2\tilde{\theta} / dt^2 = d^2\theta / dt^2$,

possiamo ritrovare l'equazione differenziale del pendolo in $\tilde{\theta}$ che per piccole oscillazioni $\sin \tilde{\theta} \cong \tilde{\theta}$,

si riscrive $d^2\tilde{\theta} / dt^2 + \left(\frac{g}{l \cos \theta_{eq}} \right) \tilde{\theta} = 0$, che dà luogo ad oscillazioni con periodo

$\tilde{T} = 2\pi \sqrt{l \cos \theta_{eq} / g} = T_o \sqrt{\cos \theta_{eq}} = T_o / \sqrt[4]{1 + tg^2 \theta_{eq}}$ dove sono dati $T_o = 1s$ e $\tilde{T} = 0.992s$ ossia i periodi rispettivamente senza e con forza centrifuga. Invertendo l'ultima relazione si ottiene

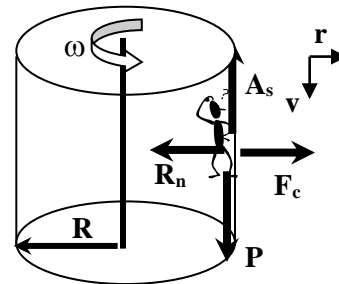
$$tg \theta_{eq} = \sqrt{\left(\frac{T}{\tilde{T}} \right)^4 - 1} \text{ da cui si ottiene } R = v^2 / (g \cdot tg \theta_{eq}) = v^2 / \left(g \cdot \sqrt{\left(\frac{T}{\tilde{T}} \right)^4 - 1} \right) = 724 \text{ m.}$$



3. All'equatore la forza di attrazione gravitazionale $F_G = GM_T m / R_T^2$ viene contrastata dalla forza centrifuga $F_c = m\omega^2 R_T$. La risultante $F_G - F_c$ dà luogo all'accelerazione di gravità avvertita all'equatore $g' = GM_T / R_T^2 - \omega^2 R_T \cong 9.78 \text{ m/s}^2$ diretta verso il centro della Terra (essendo $\omega = 2\pi / 86400 \text{ rad/s}$, ed $R_T = 6370 \text{ km}$). Se il giorno durasse solo 1 ora la velocità angolare avrebbe un valore molto più alto

$\omega = 2\pi/3600$ rad/s ed il conseguente valore dell'accelerazione di gravità sarebbe $g' = 9.59$ m/s² ma diretta verso l'esterno!!!

4. Quando il dispositivo *Rotor* è posto in rotazione a velocità angolare ω , il sistema solidale all'uomo appoggiato alla parete è non inerziale. Le forze che agiscono sull'uomo sono le seguenti: lungo l'asse radiale r la forza centrifuga $F_c = m\omega^2 R$ che tende a schiacciare l'uomo sulla parete e la reazione della parete R_n a controbilanciare; lungo la verticale v la forza peso P diretta verso il basso, l'attrito statico A_s fornito dalla parete a contrastare il peso e la reazione del pavimento che però viene tolta dopo breve tempo.

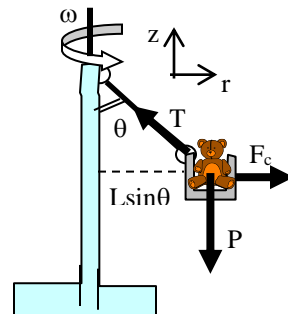


L'uomo si trova in equilibrio se $\hat{r} \begin{cases} F_c - R_n = 0 \\ \hat{v} \begin{cases} P - A_s = 0 \end{cases} \end{cases}$ da cui si ricava il valore $R_n = F_c = m\omega^2 R$.

Dalla seconda si ricava invece l'attrito richiesto per impedire il moto $A_s = P = mg$ che deve essere inferiore o al limite uguale a quello massimo consentito $A_s = P = mg \leq A_{\max} = \mu_s R_n = \mu_s m\omega^2 R$. Da questa disequazione si ricava facilmente $\omega \geq \sqrt{g/\mu_s R} = 2.47$ rad/s.

5. Applicando il 2° principio della dinamica e proiettando le forze lungo gli assi r, z

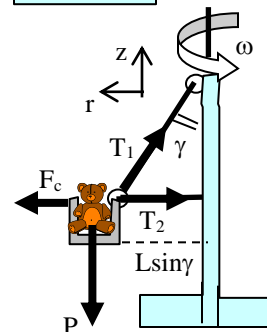
$$\begin{cases} r) F_c - T \sin \theta = 0 \\ z) T \cos \theta - P = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T \sin \theta = F_c = m\omega^2 L \sin \theta \\ T \cos \theta = mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T = m\omega^2 L = 158 \text{ N} \\ \theta = \arccos(g/\omega^2 L) = 51^\circ 38' \end{cases}$$



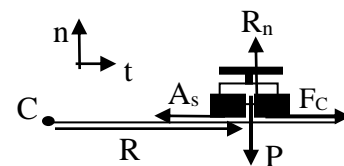
Facoltativo:

riapplicando il 2° principio della dinamica e proiettando le forze lungo gli assi r, z

$$\begin{cases} r) F_c - T_1 \sin \gamma - T_2 = 0 \\ z) T_1 \cos \gamma - P = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_2 = F_c - T_1 \sin \gamma = (\omega^2 L - g/\cos \gamma) m \sin \gamma = 22.4 \text{ N} \\ T_1 = mg/\cos \gamma = 113 \text{ N} \end{cases}$$



6. Nel sistema di riferimento non inerziale solidale al guidatore, ciascuna vettura è soggetta a 4 forze che si equilibrano: la forza peso $P=mg$ diretta lungo la verticale, la reazione normale R_n lungo la normale n , la forza centrifuga $F_c=mv^2/R$ lungo la radiale, la forza di attrito statico A_s lungo l'asse tangenziale t . Proiettando lungo gli assi n,t otteniamo:



$$\begin{cases} \hat{n} \\ \hat{t} \end{cases} \begin{cases} R_n - P = 0 \\ F_c - A_s = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \hat{n} \\ \hat{t} \end{cases} \begin{cases} R_n = mg \\ A_s = mv^2/R \leq \mu_s R_n = \mu_s mg \end{cases}$$

da cui si ricavano l'espressione della massima velocità con cui impostare la curva $v_{\max} = \sqrt{\mu_s g R}$

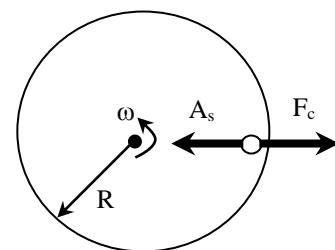
ed il tempo minimo necessario per percorrere metà circonferenza a tale velocità $t = \frac{\pi R}{v_{\max}} = \pi \sqrt{\frac{R}{\mu_s g}}$

Dall'espressione ottenuta tale tempo cresce con il raggio di curvatura della traiettoria circolare. L'autovettura che arriva per prima è quindi la n.1 che descrive la circonferenza di raggio minore R_1 .

L'anticipo della autovettura n.1 rispetto alla n.2 è quindi $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu_s g}} (\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1}) = 0.8 \text{ s}$.

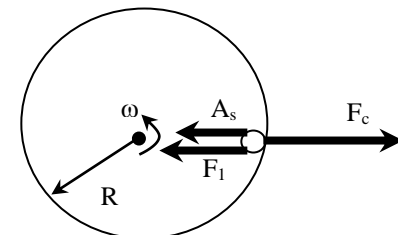
Le due velocità massime sono infine $v_{\max 1} = 38.3 \text{ m/s}$, $v_{\max 2} = 40.2 \text{ m/s}$

7. Nel primo caso la moneta rimane fissa sul disco sin quando la forza centrifuga viene esattamente controbilanciata dall'attrito statico



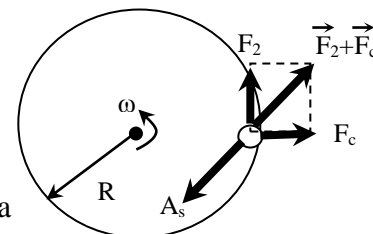
$$F_c = m\omega^2 R = A_s \leq A_{\max} = \mu_s mg \quad \text{da cui} \quad \omega \leq \omega_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_s g}{R}} = 6.76 \text{ rad/s}$$

Nel secondo caso compare anche la forza F_1 nel verso dell'attrito. La forza centrifuga può quindi essere molto maggiore



$$F_c = m\omega^2 R = A_s + F_1 \leq \mu_s mg + F_1 \quad \text{da cui}$$

$$\omega \leq \omega_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_s mg + F_1}{mR}} = 10.6 \text{ rad/s}$$



Facoltativo: in questo caso le forze non sono più collineari. Imponendo la condizione di equilibrio, si trova una relazione fra i moduli quadri delle forze

$$A_s^2 = F_c^2 + F_2^2 \leq A_{\max}^2 \quad \text{da cui} \quad F_c \leq \sqrt{A_{\max}^2 - F_2^2} \quad \text{da cui} \quad \omega \leq \omega_{\max} = \sqrt{\frac{(\mu_s mg)^2 - F_2^2}{mR}} = 6.41 \text{ rad/s}$$