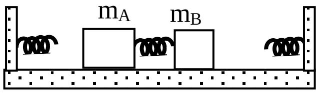
FISICA

A.A. 2023-2024
Ingegneria Gestionale
8° prova del 12 Aprile 2024

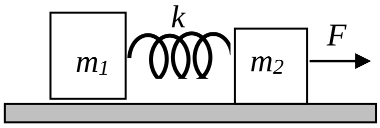
Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati vanno inviati all'indirizzo corsofisicagestionalesapienza@gmail.com entro Giovedì18 Aprile.

1. Un cannone di massa M=300 kg, inizialmente in quiete è libero di muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Esso ha due canne e spara in rapida successione due proiettili ciascuno di massa m=2kg orizzontalmente con velocità di uscita v= 200m/s rispetto alla canna. Quanto vale la velocità acquistata dal cannone dopo aver esploso entrambi i colpi?

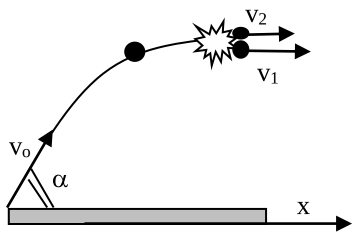
2. Due blocchi di masse m_A=3kg ed m_B=1kg si trovano su un piano orizzontale . I due blocchi sono collegati fra loro contemporaneamente da una molla di costante elastica k=5N/m e da una fune in modo che la molla risulti compressa di L=1cm e la fune tesa. Quando la fune viene bruciata la molla si estende repentinamente e lancia i due blocchi in direzioni opposte lungo un piano privo di attrito. Determinare le compressioni massime della 2 molle di costanti elastiche k=3N/m che, disposte alle estremità sinistra e destra del piano, respingono le 2 masse.



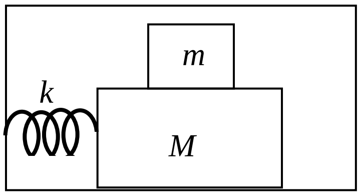
3. Due corpi di massa $m_1=3kg$ e $m_2=7kg$ collegati solidalmente da una molla di costante elastica $k=2*10^3 N/m$ e di massa trascurabile, poggiano su di un piano orizzontale privo di attrito. Essi vengono trascinati con accelerazione costante da una forza orizzontale $F=10N$ applicata ad m_2. Calcolare l'allungamento della molla.



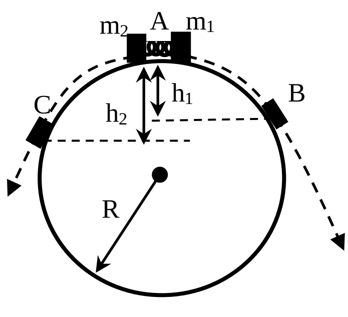
4. Una bomba di massa M=3kg viene lanciata con velocità iniziale v_o=20m/s con inclinazione α=20° rispetto all'orizzontale. Quando la bomba raggiunge l'apice della parabola essa esplode in due frammenti di massa rispettivamente m_1=2kg e m_2=1kg che descrivono due traiettorie distinte con velocità iniziali orizzontali v_1 e v_2 come indicato in figura. Sapendo che l'esplosione produce un aumento dell'energia del sistema di ΔE=100J rispetto a quella prima dello scoppio, determinare i moduli delle velocità v_1 e v_2 e le gittate delle due schegge.



5. Una molla di costante elastica k=300N/m è collegata da una lato ad una parete e dall'altro ad un blocco di massa M=3kg libero di muoversi su di un piano orizzontale scabro con coefficienti di attrito μ_{s1}=0.2, μ_{d1}=0.15. Sul blocco M poggia un secondo blocco di massa m=1kg libero di muoversi con coefficienti di attrito μ_{s2}=0.50, μ_{d2}=0.4. La molla inizialmente compressa di $\Delta\ell$ viene quindi lasciata libera sollecitando l'intero sistema. Si determini entro quali limiti della compressione iniziale i 2 blocchi prendono a muoversi come un blocco unico.

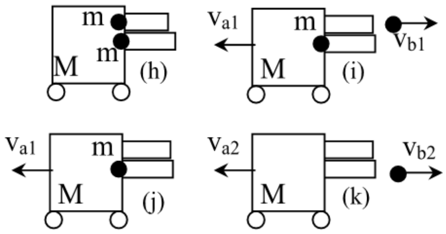


6. Due blocchi rispettivamente di massa m_1=200g ed m_2=100g vengono collegati ad una molla di costante elastica k=1000N/m e collocati sulla sommità di un tubo cilindrico liscio di raggio R=1m in una posizione di equilibrio instabile A. La molla viene compressa di ℓ =3cm e successivamente rilasciata in modo da lanciare i blocchi lungo la superficie esterna del cilindro nei due sensi opposti indicati in figura. Determinare la posizione dei punti B e C nei quali i blocchi si distaccano dal cilindro fornendo le differenze delle quote h_1 e h_2



Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2023-2024
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Soluzioni della 8 prova

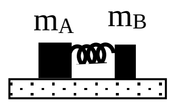
1. La quantità di moto del sistema si conserva tra l'istante *h* e l'istante *i* (prima e dopo la prima esplosione); infatti le forze esplosive sono forze interne e non danno contributo alla prima equazione cardinale. Si scrive quindi $\vec{p}_i = \vec{p}_h = 0$ perché il sistema inizialmente è in quiete. L'espressione diventa quindi $(M+m)\vec{v}_{a1} + m\vec{v}_{b1} = 0$. Il problema però non fornisce il valore della velocità assoluta del proiettile $\vec{v}_{b1}$ ma la sua velocità di



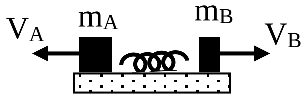
uscita $\vec{v}_u$ relativa alla canna che non è ferma! Applicando le relazioni dei moti relativi si ha $\vec{v}_{b1} = \vec{v}_u + \vec{v}_{a1}$ che introdotta nell'altra equazione consente di trovare $\vec{v}_{a1} = -\vec{v}_u\left(\frac{m}{M+2m}\right)$. Dopo poco tempo si verifica una seconda esplosione dove si conserva ancora la quantità di moto tra gli istanti j e k. Possiamo pertanto scrivere $M\vec{v}_{a2} + m\vec{v}_{b2} = (M+m)\vec{v}_{a1}$ dove al solito $\vec{v}_{b2} = \vec{v}_u + \vec{v}_{a2}$.
Combinando le espressioni si ottiene $\vec{v}_{a2} = -\vec{v}_u\left(\frac{m(2M+3m)}{(M+m)(M+2m)}\right)$ con valore $v_{a2} = -2.64 m/s$.

2. Calcolo della velocità iniziale delle due masse

Conservazione dell'energia meccanica $\frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}m_A V_A^2 + \frac{1}{2}m_B V_B^2$
(l'energia potenziale elastica si trasforma in energia cinetica)



Conservazione della quantità di moto $0 = m_A V_A + m_B V_B$
(lungo l'asse del moto agisce solo la forza elastica che è una forza interna)



da cui mettendo a sistema
$$\begin{cases} |V_A| = L\sqrt{\dfrac{m_B k}{m_A(m_A+m_B)}} = 6.45\cdot 10^{-3}\ m/s \\ |V_B| = L\sqrt{\dfrac{m_A k}{m_B(m_A+m_B)}} = 1.94\cdot 10^{-2}\ m/s \end{cases}$$

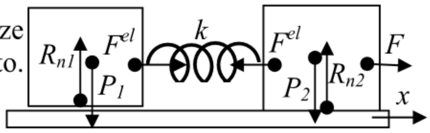
Calcolo della compressione delle molle quando

Applicando la conservazione dell'energia meccanica separatamente sui due blocchi

blocco A $\quad \frac{1}{2}k_2 L_A^2 = \frac{1}{2}m_A V_A^2 \quad$ da cui $\quad L_A = |V_A|\sqrt{\frac{m_A}{k_2}} = L\sqrt{\frac{k}{k_2}\frac{m_B}{m_A+m_B}} =$ **6.46 mm**

blocco B $\quad \frac{1}{2}k_2 L_B^2 = \frac{1}{2}m_B V_B^2 \quad$ da cui $\quad L_B = |V_B|\sqrt{\frac{m_B}{k_2}} = L\sqrt{\frac{k}{k_2}\frac{m_B}{m_A+m_B}} =$ **11.2 mm**

3. Decidiamo di considerare solo le forze agenti lungo l'asse x. Le forze lungo y infatti si equilibrano banalmente senza effetti sul moto. Applicando il II principio sia per la massa n.1 che per la n.2 si ottiene



$\begin{cases} F - F_{el} = m_2 a_2 \\ F_{el} = m_1 a_1 \end{cases}$ che sommando membro a membro dà luogo alla prima equazione cardinale del sistema $F = m_1 a_1 + m_2 a_2 = (m_1 + m_2) a_c$. Nel sistema le due masse viaggiano alla stessa velocità ed accelerazione per cui $a_1 = a_2 = a_c = F/(m_1 + m_2)$. Questa condizione riportata nell'equazione della forza elastica porta a $F_{el} = k\Delta l = m_1 a_1 = F(m_1/(m_1 + m_2))$ da cui $\Delta l = F/k\,(m_1/(m_1 + m_2)) = 1.5mm$.

4. Il moto del proiettile è parabolico a causa dell'accelerazione di gravità. Proiettando lungo x,y $\begin{cases} a_y = -g \\ a_x = 0 \end{cases}$ da cui le velocità $\begin{cases} v_y = v_o sin\alpha - gt \\ v_x = v_o \cos\alpha \end{cases}$ ed i moti componenti $\begin{cases} y = v_o t \sin\alpha - gt^2/2 \\ x = v_o t \cos\alpha \end{cases}$

Il proiettile raggiunge l'apice A con velocità totalmente orizzontale $v_x = v_o \cos\alpha$, quando cioè v_y=0

Risolvendo $t_A = v_o \sin\alpha/g$ e le coordinate di A $\begin{cases} h = y_A = v_o t_A \sin\alpha - g t_A{}^2/2 = v_o^2 \sin^2\alpha/2g = 2.38m \\ x_A = v_o t_A \cos\alpha = v_o^2 \sin\alpha\cos\alpha/g = 13.1m \end{cases}$

Durante l'esplosione si conserva la quantità di moto che è tutta diretta lungo l'asse x, mentre l'energia cinetica immediatamente dopo l'urto risulta aumentata rispetto a quella antecedente

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_o \cos\alpha \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_o^2 \cos^2\alpha + \Delta E \end{cases}$$ dalla prima $$v_2 = \frac{(m_1 + m_2) v_o \cos\alpha - m_1 v_1}{m_2}$$

che nella seconda $$m_1(m_1 + m_2) v_1^2 - 2m_1(m_1 + m_2) v_1 v_o \cos\alpha + m_1(m_1 + m_2) v_o^2 \cos^2\alpha = 2m_2\Delta E$$

e dopo semplificazione $$v_1^2 - 2v_1 v_o \cos\alpha + v_o^2 \cos^2\alpha - \frac{2m_2}{m_1(m_1 + m_2)}\Delta E = 0$$

con soluzione $v_1 = v_o \cos\alpha \pm \sqrt{\frac{2m_2}{m_1(m_1 + m_2)}\Delta E}$ da cui i ottengono due casi (le due soluzioni sono entrambe accettabili perché entrambe soddisfano il sistema di 2° grado!)

Caso n.1 $\begin{cases} v_1 = 24.6\,m/s \\ v_2 = 7.2\,m/s \end{cases}$ e Caso n.2 $\begin{cases} \bar{v}_1 = 13.2\,m/s \\ \bar{v}_2 = 30.3\,m/s \end{cases}$

Dopo l'urto la scheggia dotata di velocità generica v* segue un moto parabolico

con velocità $\begin{cases} v_y = -gt \\ v_x = v^* \end{cases}$ ed equazioni del moto $\begin{cases} y = h - gt^2/2 \\ x = x_A + v^* t \end{cases}$

il tempo di volo sarà legato alla quota h dalla relazione $t = \sqrt{2h/g}$ **=0.70 s**

la gittata complessiva è $L = x_A + v^*\sqrt{2h/g}$ e la velocità finale $v_f = \sqrt{v^{*2} + (gt)^2}$

Ciò fornisce al solito le due possibili soluzioni:

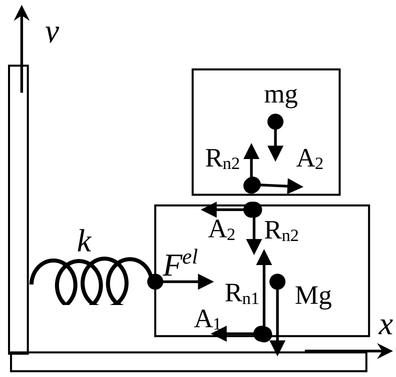
Caso n.1

$\begin{cases} x_1 = 30.2m \\ x_2 = 18.2m \end{cases}$ e $\begin{cases} v_{1f} = 25.5\,m/s \\ v_{2f} = 9.96\,m/s \end{cases}$

Caso n.2

$\begin{cases} \bar{x}_1 = 22.2m \\ \bar{x}_2 = 34.2m \end{cases}$ e $\begin{cases} \bar{v}_{1f} = 14.7\,m/s \\ \bar{v}_{2f} = 31.1\,m/s \end{cases}$

5. ANALISI DELLE FORZE AGENTI SUL SISTEMA



Forze agenti sulla massa soprastante m

In verticale: $R_{n2} = mg$

In orizzontale: $A_2 = ma_2$

(l'attrito con la massa sottostente è motore)

Forze agenti sulla massa sottostante M

In verticale: $R_{n1} - R_{n2} - Mg = 0$

da cui $R_{n1} = (M+m)g$

In orizzontale: $F^{el} - A_1 - A_2 = Ma_1$

(gli attriti con i corpi adiacenti sono contro-motori)

Condizioni di equilibrio statico

$a_1 = a_2 = 0$. Gli attriti sono quindi $A_2 = 0$ e $A_1 = F^{el} = k\Delta\ell \le A_{1\max} = \mu_{s1} R_{n1} = \mu_{s1}(M+m)g$

da cui $\Delta\ell \le \dfrac{\mu_{s1}(M+m)g}{k} =$ **2.6 cm**

Condizione di moto solidale delle due masse

Per valori maggiori della compressione iniziale la massa sottostante prenderà a muoversi e l'attrito A_1 diviene dinamico. Il moto è solidale quando $a_1 = a_2 = a$. Sommando le due equazioni sull'orizzontale si ottiene

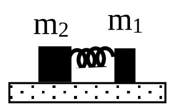
$F^{el} - A_{1d} = (M+m)a$ da cui $k\Delta\ell - \mu_{d1}(M+m)g = (M+m)a$ e quindi $a = \dfrac{k\Delta\ell}{M+m} - \mu_{d1} g$

La massa sovrastante è animata dall'attrito statico A_{2s} che deve soddisfare la disequazione

$A_2 = ma = m\left(\dfrac{k\Delta\ell}{M+m} - \mu_{d1} g\right) \le A_{2\max} = \mu_{s2} mg$ da cui $\Delta\ell \le \dfrac{(\mu_{d1} + \mu_s)(M+m)g}{k} =$ **8.5 cm**

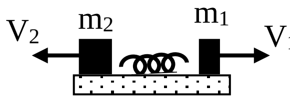
I limiti pertanto per il moto solidale sono $2.6 \le \Delta\ell \le 8.5$

6. CALCOLO DELLA VELOCITA' INIZIALE



Conservazione dell'energia meccanica $\dfrac{1}{2}k\ell^2 = \dfrac{1}{2}m_1 V_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2 V_2^2$

(l'energia potenziale elastica si trasforma in energia cinetica)



Conservazione della quantità di moto $0 = m_1 V_1 + m_2 V_2$

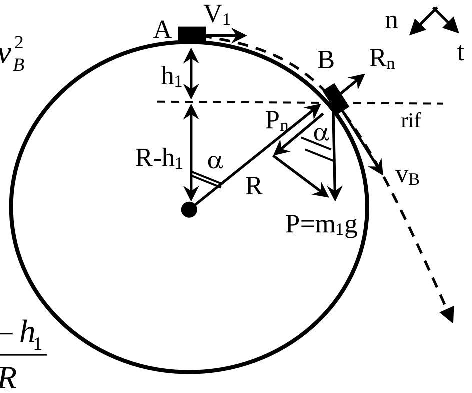
(lungo l'asse del moto agisce solo la forza elastica che è una forza interna)

da cui i moduli delle velocità $|V_1| = \ell\sqrt{\dfrac{m_2 k}{m_1(m_1+m_2)}} =$ **1.22 m/s** $|V_2| = \ell\sqrt{\dfrac{m_1 k}{m_2(m_1+m_2)}} =$ **2.45 m/s**

MOTO LUNGO LA GUIDA CILINDRICA DEL PRIMO BLOCCO

In assenza di attriti, durante il moto di scivolamento sulla guida, l'energia meccanica del primo blocco rimane costante. In particolare imponendo la conservazione dell'energia nel punto iniziale A e in quello di distacco B

$E_A = E_B$ da cui $T_A + U_A = T_B + U_B$ e cioè $\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_B^2$



Le **forze agenti** quando il blocco si trova in B sono:

$$\begin{array}{l} \hat{n} \\ \hat{t} \end{array} \begin{cases} P_n - R_n = m_1 a_n = m_1 v_B^2 / R \\ P_t = m_1 a_t \end{cases}$$ dove al distacco però **R_n=0**

per cui deve valere la condizione $\frac{m_1 v_B^2}{R} = P_n = m_1 g \cos\alpha = m_1 g \frac{R - h_1}{R}$

o equivalentemente $v_B = \sqrt{g(R - h_1)}$ che combinata con l'equazione energetica dà luogo alla soluzione del **dislivello** $h_1 = \frac{R}{3} - \frac{V_1^2}{3g}$ =**28.2 cm.** **Analogamente** $h_2 = \frac{R}{3} - \frac{V_2^2}{3g}$ = **13 cm.**