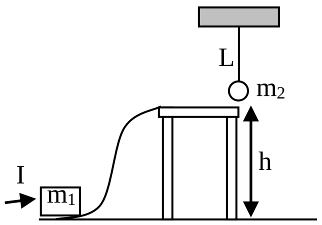
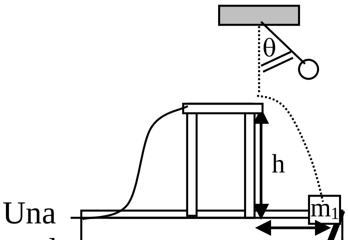
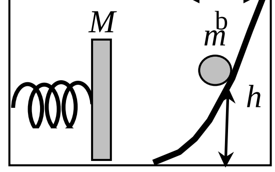
FISICA

A.A. 2022-2023
Ingegneria Gestionale
9° prova

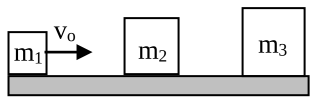




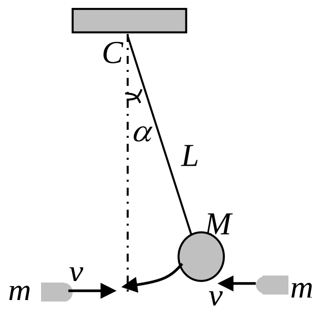
1. Un blocco di massa m_1=2Kg viene lanciato lungo una guida liscia con un impulso I=10 Kg·m·s^{-1}. Il blocco raggiunge la sommità della guida raccordata ad un tavolo liscio di altezza h=1m. Determinate la velocità assunta dal blocco sul tavolo. Successivamente il blocco, in corrispondenza dello spigolo del tavolo, urta un pendolo semplice, costituito da una massa m_2=1Kg collegata ad un cardine tramite un filo inestensibile, di lunghezza L=50cm e di massa trascurabile. Assumendo che il pendolo sia inizialmente fermo in verticale, e che l'urto sia normale centrale ed elastico, determinare l'angolo massimo θ delle oscillazioni dopo l'urto, e la distanza b dalla base del tavolo cui cade il blocco.



2. Un piattello di massa *M=3kg* è attaccato ad una molla di massa trascurabile. Una massa *m=200g* inizialmente ferma quota *h=50cm* discende lungo una guida liscia ed urta elasticamente il piattello. Quindi risale la guida mentre il piattello si mette ad oscillare orizzontalmente. In assenza di attriti e sapendo che il piattello oscilla con periodo *T=2ms* si determinino: a) la quota cui risale la massa *m*; b) l'ampiezza delle oscillazioni del piattello; c) l'impulso ceduto dalla pallina al piattello.h

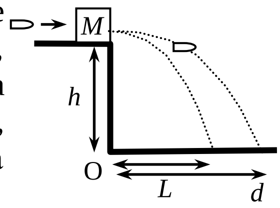


3. Un blocco di massa m_1=1 Kg viene lanciato lungo un piano orizzontale liscio con energia cinetica di 10 J contro un secondo blocco di massa m_2=2Kg, inizialmente fermo, che urta centralmente ed elasticamente.
A seguito dell'urto il blocco m_2 acquista una energia cinetica ed urta a sua volta un terzo blocco, inizialmente fermo, di massa m_3=3Kg centralmente ed elasticamente. Calcolare le velocità dei tre blocchi al termine degli urti e le relative energie cinetiche. Determinare la massa m_2 che avrebbe dovuto avere il blocco centrale per acquisire, dopo gli urti, la stessa velocità del primo blocco.

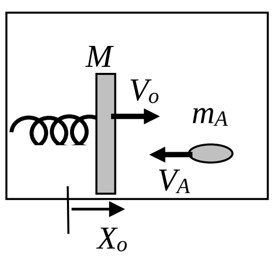


4. Un sacco di massa M=3kg è appeso ad un cardine C tramite un filo di lunghezza L=50cm, inestensibile e di massa trascurabile. Il sacco, inizialmente inclinato di un angolo α=30° rispetto alla verticale, viene lasciato oscillare liberamente. Quando il sacco raggiunge la posizione verticale, esso impatta con un proiettile di massa m=20g. A seguito dell'urto perfettamente anelastico il sacco rimane fermo lungo la verticale. Determinare la velocità del proiettile prima dell'urto. Nel caso in cui il proiettile colpisse il sacco nello stesso punto ma con velocità opposta, determinare l'angolo massimo β delle oscillazioni.

facoltativo



5. Una pallottola di massa m=15g perfora un blocco di legno di massa M=2 kg e ne fuoriesce con velocità rallentata del 30% nella stessa direzione iniziale. Il blocco, inizialmente in quiete sul bordo di un tavolo alto h=50cm, cade ad una distanza L=20cm dallo spigolo del tavolo. Determinare a) la velocità iniziale v_o del proiettile, b) la distanza d dall'origine O cui viene ritrovato il proiettile, c) l'energia trasformata in calore immediatamente dopo l'urto.

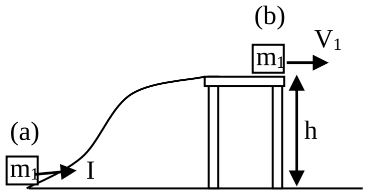


6. Un piattello di massa M=3 kg, attaccato ad una molla di massa trascurabile di costante elastica k=20 N/m, è messo in oscillazione lungo un piano liscio orizzontale. Una proiettile di massa m_A=100g viaggia alla velocità V_A=100m/s impattando contro il piattello quando esso transita fuori dalla sua posizione di equilibrio in X_o=3cm con una velocità V_o=5m/s. L'urto è perfettamente anelastico. Determinare la nuova velocità del sistema piattello proiettile, la nuova ampiezza di oscillazione, l'energia persa durante l'urto.

FISICA

A.A. 2022-2023
Ingegneria Gestionale
Soluzioni 9° prova

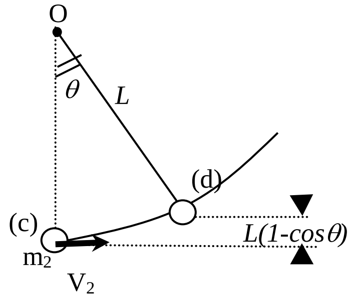
1. Il blocco ha inizialmente energia cinetica $T_a = \frac{1}{2} m_1 v_o^2 = \frac{I^2}{2m_1}$.



La velocità V_1 assunta dal blocco sul tavolo si calcola imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra i punti (a) e (b).

$T_a = T_b + m_1 gh$ da cui $V_1 = \sqrt{(I/m_1)^2 - 2gh} =$ **2.32 m/s**

Assumendo l'urto elastico le velocità dopo l'urto sono $\begin{cases} V_{1f} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) V_1 = \dfrac{1}{3} V_1 = 0.77\, m/s \\ V_2 = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) V_1 = \dfrac{4}{3} V_1 = 3.1 m/s \end{cases}$

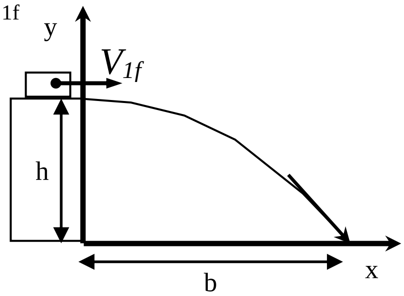


L'oscillazione massima del pendolo si ottiene imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra i punti (c) e (d)

$T_c = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = U_d = m_2 gL(1 - \cos\theta)$ da cui

l'angolo massimo di oscillazione è dato da $\theta = \arccos\left(1 - \frac{V_2^2}{2gL}\right) =$ **88° 49'**

Infine la distanza b dalla base del tavolo cui cade il primo blocco si ottiene studiando il moto parabolico del corpo di massa m_1 lanciato con velocità orizzontale V_{1f}

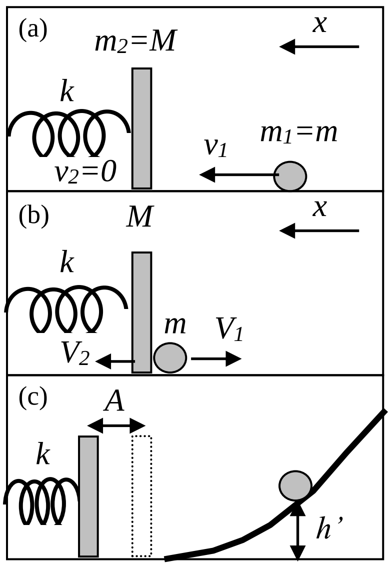


Lungo asse x $\begin{cases} x = V_{1f} t \\ v_x = V_{1f} \\ a_x = 0 \end{cases}$, lungo asse y $\begin{cases} y = h - gt^2/2 \\ v_y = -gt \\ a_y = -g \end{cases}$

tempo di volo si ottiene imponendo $y(t_v)=0$ da cui $t_v = \sqrt{2h/g}$

mentre **la distanza dal tavolo vale** $b = y(t_v) = V_{1f} t_v = V_{1f}\sqrt{2h/g} =$ **0.35 m**

2. La pallina (corpo n.1) scende senza attrito lungo il piano inclinato, trasformando la sua energia potenziale $U=m_1 gh$ interamente in energia cinetica $T=m_1 v_1^2/2$. La velocità prima dell'impatto con il piattello è quindi $v_1 = \sqrt{2gh}$ diretta lungo l'asse delle x come in figura (a). Dopo l'urto elastico con il piattello fermo ($v_2=0$), le velocità dei due corpi V_1 e V_2 si calcolano imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica del sistema. Dal sistema si ottengono le espressioni



$$\begin{cases} V_1 = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2 = \left(\dfrac{m - M}{m + M}\right)\sqrt{2gh} \\ V_2 = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_2 = \left(\dfrac{2m}{m + M}\right)\sqrt{2gh} \end{cases}$$ ove $m=m_1$ e $M=m_2$

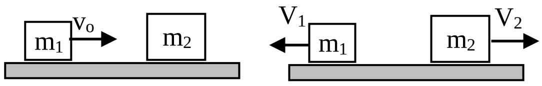
La pallina quindi inverte la sua velocità ($V_1<0$) e risale il piano inclinato sino all'altezza h'. Questa altezza si ricava imponendo la conservazione dell'energia meccanica della pallina nell'istante immediatamente dopo l'urto $E_m=T=mV_1^2/2=mgh\left((M-m)/(M+m)\right)^2$ (fig b), e nel punto di massima altezza $E_m=U=mgh'$ (fig c), da cui $h'=h\left((M-m)/(M+m)\right)^2=0.383m$. Durante l'urto la pallina cede al piattello un impulso, lungo l'asse x, di valore $J_x=\int F_x dt=p_x^{dopo}-p_x^{prima}=MV_2=\sqrt{2gh}\,2mM/(M+m)=1.17Ns$ che mette in oscillazione il piattello ad $\omega=2\pi/T_{osc}$. Dalla conservazione dell'energia meccanica per il piattello, tra l'istante immediatamente dopo l'urto $E_m=T=MV_2^2/2$ e la posizione di massima elongazione $E_m=U^{el}=kA^2/2$ si ottiene l'elongazione massima $A=V_2/\sqrt{k/M}=V_2T_{osc}/2\pi=0.125mm$

3. Entrambi gli urti sono centrali ed elastici. In queste condizioni si conserva la quantità di moto del sistema, come anche l'energia cinetica del sistema. In generale le velocità successive all'urto di due blocchi *a,b* possono essere espresse in funzione delle velocità precedenti all'urto come segue

$$\begin{cases} V_a=\left(\dfrac{m_a-m_b}{m_a+m_b}\right)v_a+\left(\dfrac{2m_b}{m_a+m_a}\right)v_b \\ V_b=\left(\dfrac{2m_a}{m_a+m_b}\right)v_a+\left(\dfrac{m_b-m_a}{m_a+m_b}\right)v_b \end{cases}$$

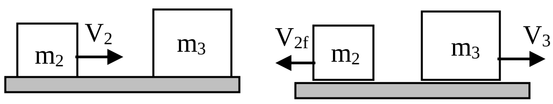
che dopo il primo urto

$$\begin{cases} V_1=\left(\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_o=\dfrac{-1}{3}v_o \\ V_2=\left(\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_o=\dfrac{2}{3}v_o \end{cases}$$



le velocità di uscita dopo il secondo invece

$$\begin{cases} V_{2f}=\left(\dfrac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\right)V_2=\left(\dfrac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\right)\left(\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_o=\dfrac{-2}{15}v_o \\ V_3=\left(\dfrac{2m_2}{m_2+m_3}\right)V_2=\left(\dfrac{2m_2}{m_2+m_3}\right)\left(\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_o=\dfrac{8}{15}v_o \end{cases}$$



La **velocità iniziale** del primo blocco vale $v_o=\sqrt{\dfrac{2T}{m_1}}=$ **4.47 m/s**

Le **velocità finali dei tre blocchi** sono quindi $\begin{cases} V_1=-v_o/3=-1.49\quad m/s \\ V_{2f}=-2v_o/15=-0.60\quad m/s \\ V_3=8v_o/15=2.38\quad m/s \end{cases}$

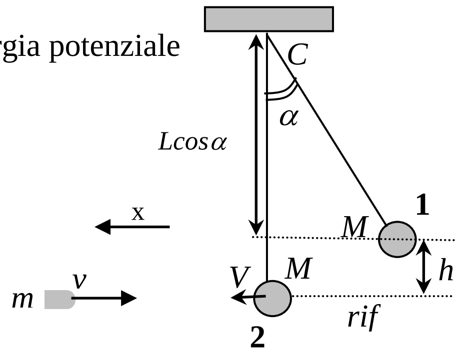
E le **energie cinetiche** conseguentemente $\begin{cases} T_1=T/9=1.11\quad J \\ T_{2f}=8T/225=0.36\quad J \\ T_3=192T/225=8.53\quad J \end{cases}$

Imponendo la condizione $V_{2f}=V_1$ si ottiene $\left(\dfrac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_o=\left(\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_o$

da cui si giunge alle equazione di 2° grado $m_2^2+m_2(m_1+m_3)-2m_1m_3=0$

con la sola soluzione accettabile **m_2= 1.16 Kg**

4 Il sacco lasciato cadere dalla posizione (1) ha inizialmente solo energia potenziale



$$E_{m1}=Mgh=MgL(1-\cos\alpha)$$

Quando raggiunge la posizione di minima quota (2) avrà trasformato energia potenziale interamente in energia cinetica

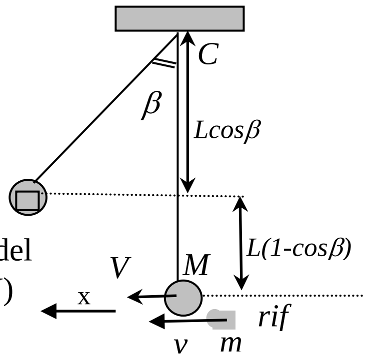
$$E_{m2}=MV^2/2$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ricava la velocità $V=\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}$

La quantità di moto (lungo x) del sistema proiettile+sacco prima dell'urto è $p_x = MV - mv$

Il sistema dopo l'urto rimane in quiete. La quantità di moto è quindi $p_x = 0$.

Dalla conservazione della quantità di moto si ottiene la velocità del proiettile



$$v=\frac{M}{m}\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}=\mathbf{171.9\ m/s}$$

Facoltativo: se il proiettile è diretto in senso opposto la quantità di moto del sistema prima dell'urto è $p_x = MV + mv = 2MV$ (tenuto conto che mv=MV)

Questa quantità si conserva dopo l'urto $p_x = (M+m)V_c$

Imponendo l'uguaglianza dei termini si ottiene la velocità del c.d.m.

$V_c = V\left(\frac{2M}{M+m}\right)$ che è legata al massimo angolo β dalla $V_c=\sqrt{2gL(1-\cos\beta)}$

Combinando le equazioni si ottiene $\cos\beta = 1-\left(\frac{2M}{M+m}\right)^2(1-\cos\alpha)$ da cui **β=61°53'**

5. 1ª parte: **urto anelastico: conservazione della quantità di moto**

$$mv_o = m(0.7\cdot v_0)+MV_A \quad \text{da cui} \quad v_o=\left(\frac{1}{0.3}\right)\left(\frac{M}{m}\right)V_A$$

2ª parte: **caduta per gravità del blocco e della pallottola**

Lungo l'asse verticale il moto di caduta di entrambi i corpi è uniformemente accelerato per gravità;

$$a_y=-g, \quad v_y=-g\cdot t, \quad y(t)=h-gt^2/2.$$

Da questa ricaviamo **il tempo di volo** di entrambi i corpi imponendo $y(t^*)=0$ da cui $t^*=\sqrt{2h/g}$.

La distanza del punto di caduta del **blocco** dal punto O si ottiene da $x(t^*)=L=V_A\sqrt{2h/g}$

che permette di trovare la **velocità iniziale** $v_o=\left(\frac{1}{0.3}\right)\left(\frac{M}{m}\right)V_A=\left(\frac{1}{0.3}\right)\left(\frac{M}{m}\right)L\sqrt{g/2h}=$ **278 m/s**

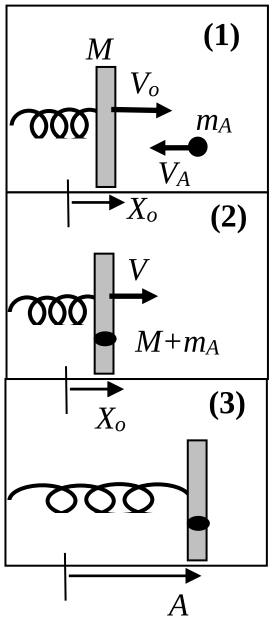
e la **distanza del punto di caduta della pallottola dal punto O** $d=(0.7)v_o\sqrt{2h/g}=$ **62.2 m**

L'energia cinetica anteriore all'urto: $T_i=\frac{1}{2}mv_o^2=$ **581 J**

L'energia cinetica posteriori all'urto: $T_{fin}=\frac{1}{2}MV_A^2=$ **285 J**

L'energia dissipata durante l'urto è quindi $Q = T_i - T_{fin} =$ **296 J**

6. L'intero processo viene scomposto in due fenomeni distinti consecutivi:
l'urto anelastico tra il proiettile ed il piattello in cui viene conservata la quantità di moto del sistema (particolari 1 e 2 in figura);
il fenomeno di oscillazione del sistema in cui viene conservata l'energia meccanica (particolari 2 e 3).



a) **nuova velocità del sistema piattello/proiettile**
V_A: velocità proiettile prima dell'urto
V_o: velocità blocco prima dell'urto
V: velocità del sistema piattello/proiettile dopo l'urto

$$MV_o - m_A V_A = (M + m_A)V \quad \text{da cui} \quad V = \frac{MV_o - m_A V_A}{M + m_A} = \mathbf{1.61\ m/s}$$

(nella direzione dell'asse x)

b) **energia persa a causa dell'urto**

Energia cinetica prima dell'urto: $T_1 = \frac{1}{2}MV_o^2 + \frac{1}{2}m_A V_A^2 =$ **537.5 J**

Energia cinetica dopo l'urto: $T_2 = \frac{1}{2}(M + m_A)V^2 = \frac{1}{2}\frac{(MV_o - m_A V_A)^2}{M + m_A}$ **=4 J**

Perdita di energia a causa dell'urto:

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}\frac{M(M + m_A)V_o^2 + m_A(M + m_A)V_A^2 - (MV_o - m_A V_A)^2}{M + m_A} = \frac{1}{2}\frac{M \cdot m_A}{M + m_A}(V_O + V_A)^2 = \mathbf{533.5\ J}$$

c) **nuova velocità del sistema piattello/proiettile**

E_2: energia meccanica immediatamente dopo urto: $E_2 = \frac{1}{2}(M + m_A)V^2 + \frac{1}{2}kX_o^2$

E_3: energia meccanica alla massima elongazione : $E_3 = \frac{1}{2}kA^2$

Imponendo $E_2 = E_3$ si ottiene la massima elongazione $A = \sqrt{X_o^2 + \frac{M + m_A}{k}V^2}$ **=64 cm**