**INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO**
**ANALISI MATEMATICA II**
**SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 19-06-2015**

ESERCIZIO 1
Calcolare

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$

dove $D$ è il dominio piano delimitato dalla curva $x^2+y^2=x$ e dalle semirette $y=x,\ x\geq 0$ e $y=0,\ x\geq 0$.

SOLUZIONE
Usando le coordinate polari si trova che:

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy =&\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho d\theta\\ =&\int_0^{\pi/4}-\frac{1}{3}\left.(1-\rho^2)^{3/2}\right|_{\rho=0}^{\rho=\cos\theta}d\theta\\ =&-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}(\sin^3\theta-1)d\theta\\ =&-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta-\theta\right]_0^{\pi/4}\\ =&\frac{5\sqrt{2}}{36}+\frac{2}{9}+\frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Calcolare

$$\int_{+\partial V}\vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma$$

dove $V$ è il volume delimitato dalla superficie $z+1=\sqrt{x^2+y^2}$ e dai piani $z=2,\ z=3$ ed $\vec{F}=\left(\frac{4}{3}x^3, z, 4z(x^2+y^2)\right)$.

SOLUZIONE
Si ha div$\vec{F}=4x^2+4(x^2+y^2)$ e quindi, usando il teorema della divergenza e le coordinate cilindriche,

$$\begin{aligned}
\int_{+\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma =& \iiint_V [4x^2+4(x^2+y^2)]dxdydz \\
=& \int_0^{2\pi}\int_2^3\int_0^{z+1}(4\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2)\rho d\rho dz d\theta \\
=& \int_0^{2\pi}\int_2^3 \left[\rho^4(1+\cos^2\theta)\right]_{\rho=0}^{\rho=1+z} dz d\theta \\
=& \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{5}(1+z)^5\right]_2^3 (1+\cos^2\theta)d\theta \\
=& 3\frac{4^5-3^5}{5}\pi \\
=& \frac{2343}{5}\pi.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3
Sviluppare in serie di Fourier di soli seni la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{per} \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi \\ x-\pi & \text{per} \quad \frac{3}{4}\pi \le x \le \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
La funzione è discontinua e quindi la convergenza non sarà totale. Si ha:

$$\begin{aligned}
b_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4} x\sin kx dx + \frac{2}{\pi}\int_{3\pi/4}^{\pi}(x-\pi)\sin kx dx \\
=& \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}+\frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{\pi/4} + \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}+\frac{\sin kx}{k^2}+\pi\frac{\cos kx}{k}\right]_{3\pi/4}^{\pi} \\
=& -\frac{\cos\frac{k\pi}{4}}{2k}+2\frac{\sin\frac{k\pi}{4}}{k^2\pi}-2\frac{\sin\frac{3k\pi}{4}}{k^2\pi}-\frac{\cos\frac{3k\pi}{4}}{2k}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{\cos\frac{k\pi}{4}}{2k}+2\frac{\sin\frac{k\pi}{4}}{k^2\pi}-2\frac{\sin\frac{3k\pi}{4}}{k^2\pi}-\frac{\cos\frac{3k\pi}{4}}{2k}\right]\sin kx$$

$$= \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le \pi, \ x \ne \pi/4, 3\pi/4 \\ \pi/8 & x = \pi/4 \\ -\pi/8 & x = 3\pi/4 \end{cases}$$

ESERCIZIO 4
Dopo aver determinato la soluzione stazionaria, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{6}u_{xx} = -2x^2 - x & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = f(x) + x^4 + x^3 + x & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = \pi^4+\pi^3+\pi & t > 0, \end{cases}$$

dove $f(x)$ è la funzione dell'esercizio precedente. Calcolare anche la velocità di convergenza alla soluzione stazionaria.

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore in dimensione 1. La soluzione stazionaria si trova risolvendo il problema $\begin{cases} u_s'' = 12x^2 + 6x, \\ u_s(0) = 0, u_s(\pi) = \pi^4 + \pi^3 + \pi, \end{cases}$, la cui soluzione è: $u_s(x) = x^4 + x^3 + x$. Ponendo $v(x,t) = u(x,t) - u_s(x)$, la funzione $v$ deve risolvere il problema:

$$\begin{cases} v_t - \frac{1}{6}v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ v(x,0) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

Quindi

$$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t) = x^4 + x^3 + x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -\frac{\cos\frac{k\pi}{4}}{2k} + 2\frac{\sin\frac{k\pi}{4}}{k^2\pi} - 2\frac{\sin\frac{3k\pi}{4}}{k^2\pi} - \frac{\cos\frac{3k\pi}{4}}{2k} \right] e^{-k^2t/6} \sin kx.$$

Ne segue che, essendo $\max_{[0,\pi]}|f(x)| = \frac{\pi}{4}$ e $\frac{L^2}{D} = 6\pi^2$ si ha:

$$|u(x,t) - u_s(x)| \le \pi e^{-t/6} \qquad \text{per ogni} \qquad t \ge 6\pi^2.$$

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - 2uu_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} -2x & x \ge 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

E' richiesto il disegno delle caratteristiche e la verifica della soluzione trovata.

SOLUZIONE

Le caratteristiche sono: $x = x_0 + 2x_0t$ per $x_0 < 0$ e $x = x_0 + 4x_0t$ per $x_0 \ge 0$. Per $x \ge 0$ l'equazione in forma implicita è $u = -2[x + 2ut]$, che esplicitata diventa $u(x,t) = -\frac{2x}{4t+1}$, mentre per $x < 0$ essa è $u = -[x + 2ut]$, che esplicitata diventa $u(x,t) = -\frac{x}{2t+1}$. Notiamo che

$$-\frac{x}{2t+1}\bigg|_{x=0^-} = 0 = -\frac{2x}{4t+1}\bigg|_{x=0^+}$$

e quindi la soluzione è continua in tutto il semipiano. La verifica è immediata:

$$u_t - 2uu_x = \frac{8x}{(4t+1)^2} - 2\frac{-2x}{4t+1} \cdot \frac{-2}{4t+1} = 0 \qquad \text{e} \qquad -\frac{2x}{4t+1}\bigg|_{t=0} = -2x \qquad \text{per } x \ge 0,$$

$$u_t - 2uu_x = \frac{2x}{(2t+1)^2} - 2\frac{-x}{2t+1} \cdot \frac{-1}{2t+1} = 0 \qquad \text{e} \qquad -\frac{x}{2t+1}\bigg|_{t=0} = -x \qquad \text{per } x < 0.$$

**INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO**
**ANALISI MATEMATICA II**
**SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 15-07-2015**

ESERCIZIO 1
Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}\ dx - \frac{1}{1+x^2}\ dy.$$

1. Stabilire se $\omega$ è chiusa.
2. Dire se $\omega$ è esatta ed in caso affermativo, determinare tutte le sue primitive.
3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma$ è il perimetro del poligono che ha per vertici i punti

$$O(0,0) \qquad A(1,2) \qquad B(3,-7) \qquad C(-5,-3) \qquad D(100,0).$$

SOLUZIONE
Si ha $X_y = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = Y_x$ e quindi la forma è chiusa. Essendo l'insieme di definizione tutto il piano, la forma è anche esatta. Calcolo della primitiva: si ha

$$F(x,y) = \int \frac{2xy}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{y}{1+x^2} + \phi(y),$$

$$F_y = -\frac{1}{1+x^2} + \phi'(y)$$

e quindi, uguagliando $F_y$ con $Y$ si ottiene

$$-\frac{1}{1+x^2} + \phi'(y) = -\frac{1}{1+x^2},$$

quindi $\phi'(y) = 0$, cioè $\phi(y) = C$ costante. Le primitive sono dunque:

$$F(x,y) = -\frac{y}{1+x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Per finire, l'integrale richiesto vale 0 perché la forma è esatta e il cammino è chiuso.

ESERCIZIO 2
Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_W e^z(x^2+y^2)\ dxdydz,$$

dove $W$ è la regione

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \le x^2+y^2 \le 2\}.$$

SOLUZIONE
Usando le coordinate cilindriche si trova:

$$\begin{aligned}\iiint_W e^z(x^2+y^2)\ dxdydz =& \int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_z^{\sqrt{2}} e^z\rho^3 d\rho dz d\theta \\ =& \frac{\pi}{2}\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[4e^z - z^4e^z\right] dz \\ =& \frac{\pi}{2}\left[-20e^z - z^4e^z + 4z^3e^z - 12z^2e^z + 24ze^z\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ =& -48\pi\sinh\sqrt{2} + 32\pi\sqrt{2}\cosh\sqrt{2}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3
Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \le x \le \pi/4 \\ \cos 2x & \text{per } \pi/4 < x < 3\pi/4 \\ 0 & \text{per } 3\pi/4 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza dello sviluppo ottenuto e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
Osserviamo preliminarmente che $f$ è continua in $[0,\pi]$ (poiché $\cos 2x|_{x=\pi/4} = 0 = \cos 2x|_{x=3\pi/4}$) e che $f(0) = 0 = f(\pi)$: le condizioni di commpatibilità sono verificate e quindi la convergenza dello sviluppo ottenuto sarà totale. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti. Si ha:

$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos 2x \sin 2x dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin 4x dx = \frac{1}{4\pi}\left[-\cos 4x\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = 0$$

e per $k \ge 1$, $k \ne 2$,

$$\begin{aligned} b_k =& \frac{2}{\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos 2x \sin kx dx \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[\sin(k+2)x + \sin(k-2)x\right] dx \\ =& \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+2)x}{k+2} - \frac{\cos(k-2)x}{k-2}\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} \\ =& -\frac{\cos\frac{3(k+2)\pi}{4}}{\pi(k+2)} - \frac{\cos\frac{3(k-2)\pi}{4}}{\pi(k-2)} + \frac{\cos\frac{(k+2)\pi}{4}}{\pi(k+2)} + \frac{\cos\frac{(k-2)\pi}{4}}{\pi(k-2)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$f(x) = \sum_{\substack{k=1\\k\ne 2}}^{\infty}\left[-\frac{\cos\frac{3(k+2)\pi}{4}}{\pi(k+2)} - \frac{\cos\frac{3(k-2)\pi}{4}}{\pi(k-2)} + \frac{\cos\frac{(k+2)\pi}{4}}{\pi(k+2)} + \frac{\cos\frac{(k-2)\pi}{4}}{\pi(k-2)}\right]\sin kx$$

per ogni $x \in [0,\pi]$, con convergenza totale. Si potrebbe anche osservare che $b_k = 0$ per $k$ pari (la funzione di partenza è pari rispetto a $\pi/2$) e che

$$b_{2m+1} = \begin{cases} \frac{4\sqrt{2}(-1)^{m/2}}{\pi[(2m+1)^2-4]} & \text{per } m \text{ pari} \\ \\ \frac{4\sqrt{2}(-1)^{(m-1)/2}}{\pi[(2m+1)^2-4]} & \text{per } m \text{ dispari.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \cos^3 x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta. Si ha:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos^3(x+2s\sqrt{t}) ds \\
=& \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos(x+2s\sqrt{t}) ds + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos 3(x+2s\sqrt{t}) ds \\
=& \frac{3\cos x}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos(2s\sqrt{t}) ds + \frac{\cos 3x}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos(6s\sqrt{t}) ds \\
=& \frac{3}{4} e^{-t} \cos x + \frac{1}{4} e^{-9t} \cos 3x.
\end{aligned}
$$

<u>Verifica</u>:

$$u(x,0) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x = \cos^3 x,$$

$$u_t - u_{xx} = \left[ -\frac{3}{4} e^{-t} \cos x - 9\frac{1}{4} e^{-9t} \cos 3x \right] - \left[ -\frac{3}{4} e^{-t} \cos x - 9\frac{1}{4} e^{-9t} \cos 3x \right] = 0.$$

ESERCIZIO 5
Risolvere il seguente problema:

$$
\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} = 0 & 1 < x^2 + y^2 < 4, \\
u = 2y + 2xy & x^2 + y^2 = 1, \\
u = \frac{y}{2} + 2xy & x^2 + y^2 = 4.
\end{cases}
$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un anello. Si ha:

$$
\begin{aligned}
&[2y + 2xy]_{x=\cos\theta, y=\sin\theta} = 2\sin\theta + 2\cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta + \sin 2\theta \\
&\left[\frac{y}{2} + 2xy\right]_{x=2\cos\theta, y=2\cos\theta} = \sin\theta + 4\sin 2\theta.
\end{aligned}
$$

Quindi in coordinate polari il problema diventa:

$$
\begin{cases}
U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0 & 1 < r < 2, 0 \le \theta \le 2\pi, \\
U(1,\theta) = 2\sin\theta + \sin 2\theta & 0 \le \theta \le 2\pi, \\
U(2,\theta) = \sin\theta + 4\sin 2\theta & 0 \le \theta \le 2\pi.
\end{cases}
$$

Cercando la soluzione nella forma

$$U(r,\theta) = \left( C_1 r + C_2 \frac{1}{r} \right) \sin\theta + \left( C_3 r^2 + C_4 \frac{1}{r^2} \right) \sin 2\theta$$

troviamo che deve essere

$$
\begin{cases}
C_1 + C_2 = 2 \\
2C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 1
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
C_3 + C_4 = 1 \\
4C_3 + \frac{1}{4}C_4 = 4
\end{cases}
$$

e quindi $C_1 = 0, C_2 = 2, C_3 = 1, C_4 = 0$. In conclusione,

$$U(r,\theta) = \frac{2}{r}\sin\theta + r^2 \sin 2\theta$$

e tornando in coordinate cartesiane troviamo

$$\frac{2}{r}\sin\theta + r^2\sin 2\theta = \frac{2r\sin\theta}{r^2} + 2r\sin\theta r\cos\theta = \frac{2y}{x^2+y^2} + 2xy.$$

Verifica. Si ha:

$$\left[\frac{2y}{x^2+y^2} + 2xy\right]_{x^2+y^2=1} = 2y + 2xy,$$

$$\left[\frac{2y}{x^2+y^2} + 2xy\right]_{x^2+y^2=4} = \frac{y}{2} + 2xy$$

e poi

$$u_x = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} + 2y, \qquad u_{xx} = \frac{-4y(x^2+y^2) + 4x \cdot 4xy}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-4y^3 + 12x^2y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$u_y = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} + 2x, \qquad u_{xx} = \frac{-4y(x^2+y^2) - 4y(2x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{4y^3 - 12x^2y}{(x^2+y^2)^3},$$

e quindi $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

**INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO**

**ANALISI 2**
**PROVA SCRITTA DEL 21-06-2016 - SOLUZIONI**

ESERCIZIO 1
Calcolare

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

dove $V$ é il solido delimitato dalla superficie $z = -x^2 - y^2$ e dal piano $z = -1$ ed $\vec{F} = (x, y, z^2)$.

SOLUZIONE
Si ha div$\vec{F} = 2 + 2z$. Applicando il teorema della divergenza troviamo:

$$\begin{aligned}
\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_V \mathrm{div}\vec{F} dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^{-\rho^2} (2+2z)\rho dz d\rho d\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 \left[2z\rho + z^2\rho\right]_{z=-1}^{z=-\rho^2} d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \left[-2\rho^3 + \rho^5 + \rho\right] d\rho \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Stabilire in quali regioni del piano la seguente forma differenziale é esatta:

$$\omega = \frac{2(y-x)}{1-(y-x)^2} dx + \frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2} dy.$$

Successivamente calcolare l'integrale della forma differenziale lungo la curva parametrica seguente:

$$\gamma(t) = (t, \frac{\sin(\pi t)}{2+\cos t} + \frac{3}{2} + t),$$

$t \in [0, 1]$.

SOLUZIONE
Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{2(y-x)}{1-(y-x)^2} = \frac{2[1+(y-x)^2]}{[1-(y-x)^2]^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2}$$

e quindi la forma è chiusa. Inlotre essa è definita nel piano privato dei punti in cui $1 - (y-x)^2 = 0$, cioè privato delle rette $y = x \pm 1$. Quindi la forma è esatta nei semipiani $y > x+1$, $y < x-1$ e nella striscia $x - 1 < y < x + 1$. Calcoliamo la primitiva: si ha

$$f(x, y) = \int \frac{2(y-x)}{1-(y-x)^2} dx = \int \frac{1}{1-(y-x)^2} d\left(1-(y-x)^2\right) = \log\left|1-(y-x)^2\right| + \phi(y)$$

e la condizione $f_y = \frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2}$ fornisce

$$\frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2} + \phi'(y) = \frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2}.$$

Quindi possiamo prendere $\phi \equiv 0$ ed $f(x, y) = \log\left|1-(y-x)^2\right|$.

Lungo la curva $\gamma$ abbiamo

$$y = \frac{\sin(\pi t)}{2+\cos t} + \frac{3}{2} + t \geq \frac{3}{2} + t > 1 + t = 1 + x.$$

Quindi la curva si trova nel sempiano $y > x+1$ e il valore dell'integrale è uguale alla differenza di $f$ agli estremi, cioè

$$\int_\gamma \omega = f(1, \frac{5}{2}) - f(0, \frac{3}{2}) = \log\frac{5}{4} - \log\frac{5}{4} = 0.$$

ESERCIZIO 3

Sviluppare in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \pi/3 \\ 1 + \frac{x}{2} & \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \\ 0 & \frac{2}{3}\pi < x \leq \pi \end{cases}$$

esaminando la convergenza della serie ottenuta. E' richiesto il disegno dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE Osserviamo preliminarmente che $f$ è discontinua nei punti $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2}{3}\pi$ e quindi lo sviluppo convergerà puntualmente ma non totalmente. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti. Si ha:

$$\begin{aligned} b_k =& \frac{2}{\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\left(1+\frac{x}{2}\right)\sin kx dx \\ =& \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k} - \frac{x\cos kx}{2k} + \frac{\sin kx}{2k^2}\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} \\ =& \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos\frac{2k\pi}{3}}{k} - \frac{\pi\cos\frac{2k\pi}{3}}{3k} + \frac{\sin\frac{2k\pi}{3}}{2k^2} + \frac{\cos\frac{k\pi}{3}}{k} + \frac{\pi\cos\frac{k\pi}{3}}{6k} - \frac{\sin\frac{k\pi}{3}}{2k^2}\right] \\ =& \begin{cases} -\frac{\cos\frac{k\pi}{3}}{3k} - \frac{2\sin\frac{k\pi}{3}}{k^2\pi} & \text{per } k \text{ pari} \\ \left(\frac{4}{\pi}+1\right)\frac{\cos\frac{k\pi}{3}}{k} & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

poiché

$$\cos\frac{2k\pi}{3} = \cos\left(k\pi - \frac{k\pi}{3}\right) = (-1)^k\cos\frac{k\pi}{3}$$

e

$$\sin\frac{2k\pi}{3} = \sin\left(k\pi - \frac{k\pi}{3}\right) = (-1)^{k+1}\sin\frac{k\pi}{3}.$$

Si ha quindi, per $x \in [0, \pi]$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \begin{cases} f(x) & x \neq \frac{k\pi}{3}, \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{\pi}{12} & x = \frac{k\pi}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} & x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

con convergenza solo puntuale.

ESERCIZIO 4

Dopo aver determinato la soluzione stazionaria, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = -4 - 24x^2 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = 1, u(\pi,t) = \pi^4 + \pi^2 + 1 & t > 0, \end{cases}$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x^2 + x^4 & 0 \leq x < \pi/3 \\ \\ 2 + \frac{x}{2} + x^2 + x^4 & \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \\ \\ 1 + x^2 + x^4 & \frac{2}{3}\pi < x \leq \pi \end{cases}$$

Calcolare anche la velocità di convergenza alla soluzione stazionaria.

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore in dimensione 1. La soluzione stazionaria si trova risolvendo il problema $\begin{cases} u_s'' = 2 + 12x^2, \\ u_s(0) = 1, u_s(\pi) = \pi^4 + \pi^2 + 1, \end{cases}$, la cui soluzione è: $u_s(x) = x^4 + x^2 + 1$. Ponendo $v(x,t) = u(x,t) - u_s(x)$, la funzione $v$ deve risolvere il problema:

$$\begin{cases} v_t - 2v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ v(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

dove $f$ è la funzione dell'esercizio precedente. Quindi, se i coefficienti $b_k$ sono come nella soluzione dell'esercizio precedente,

$$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t) = x^4 + x^2 + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-2k^2 t} \sin kx.$$

Ne segue che, essendo $\max_{[0,\pi]} |f(x)| = 1 + \frac{\pi}{3}$ ed $\frac{L^2}{D} = \frac{\pi^2}{2}$ si ha:

$$|u(x,t) - u_s(x)| \leq 4\left(1 + \frac{\pi}{3}\right) e^{-2t} \qquad \text{per ogni} \qquad t \geq \frac{\pi^2}{2}.$$

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t + 2x^2 u_x = -2t \sin(t^2) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = 1 + x^2 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione.

SOLUZIONE

Le curve caratteristiche si ottengono risolvendo il problema:

$$\begin{cases} x' = 2x^2 \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Separando le variabili si ottiene: $\int \frac{dx}{x^2} = 2\int dt$, $-\frac{1}{x} = 2t + C$, $x = \frac{1}{-2t-C}$. Imponendo la condizione iniziale, si trova $C = -\frac{1}{x_0}$ e quindi

$$x = \varphi(x_0, t) \equiv \frac{x_0}{1 - 2x_0 t}, \qquad x_0 = \psi(x,t) \equiv \frac{x}{2xt + 1}.$$

Sulle caratteristiche l'equazione diventa:

$$\begin{cases} U' = -2t\sin(t^2) \\ U(0) = 1 + x_0^2. \end{cases}$$

La soluzione generale è: $U = \cos(t^2) + C$. Imponendo la condizione iniziale si trova $C = x_0^2$ e quindi $U(x_0, t) = \cos(t^2) + x_0^2$,

$$u(x,t) = \cos(t^2) + \frac{x^2}{(2xt+1)^2}.$$

<u>Verifica</u>. Si ha $u(x,0) = 1 + x^2$ e poi

$$u_t + 2x^2 u_x = \left[-2t\sin(t^2) - \frac{4x^3}{(2xt+1)^3}\right] + 2x^2\left[\frac{2x}{(2xt+1)^2} - \frac{4x^2 t}{(2xt+1)^3}\right] = -2t\sin(t^2).$$

**INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO**
**ANALISI MATEMATICA II**
**SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 18-07-2016**

ESERCIZIO 1
Stabilire se la seguente forma differenziale é esatta e, in caso affermativo, calcolarne la primitiva $F$ tale che $F(0,0)=1$:

$$\omega = e^x[\sin(x+y)+\cos(x+y)]dx + e^x\cos(x+y)dy.$$

Successivamente calcolare

$$\int_{\gamma_1} \omega dl,$$

dove $\gamma_1 = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$.

SOLUZIONE
La forma è definita su tutto il piano. Inoltre la forma è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y}\{e^x[\sin(x+y)+\cos(x+y)]\} = e^x[\cos(x+y)-\sin(x+y)] = \frac{\partial}{\partial x}[e^x\cos(x+y)]$$

e quindi anche esatta. Per calcolare la primitiva prima integriamo:

$$F(x,y) = \int e^x\cos(x+y)dy = e^x\sin(x+y)+\varphi(x).$$

Poi deriviamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x\sin(x+y)+e^x\cos(x+y)+\varphi'(x)$$

deve essere uguale a $e^x[\sin(x+y)+\cos(x+y)]$, quindi $\varphi'(x)=0$ e possiamo prendere $\varphi \equiv C$ costante. Imponendo $F(0,0)=1$ si trova $C=1$, cioè $F(x,y)=e^x\sin(x+y)+1$. Per finire, possiamo calcolare l'integrale curvilineo usando la primitiva:

$$\int_{\gamma_1} \omega dl = F(-1,0)-F(1,0) = -(e^{-1}+e)\sin 1.$$

ESERCIZIO 2
Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_A (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

dove

$$A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

SOLUZIONE
Usando le coordinate sferiche:

$$\begin{aligned}\iiint_A (x^2+y^2+z^2)dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^1 \rho^2\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{5}\left[-\cos\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{5}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni nell'intervallo $[0,\pi]$ la funzione

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{per } 0\le x\le \frac{\pi}{4}\\ -1 & \text{per } \frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{2}\\ 1 & \text{per } \frac{\pi}{2}<x\le \frac{3}{4}\pi\\ -1 & \text{per } \frac{3}{4}\pi<x\le\pi\end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE

La funzione è discontinua e quindi la convergenza non sarà totale. Si ha $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)=0$ e poi, per $k\ge 1$,

$$\begin{aligned}a_k=&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4}\cos kx dx-\frac{2}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos kx dx+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\cos kx dx-\frac{2}{\pi}\int_{3\pi/4}^{\pi}\cos kx dx\\ =&\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi/4}-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{\pi/2}^{3\pi/4}-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{3\pi/4}^{\pi}\\ =&\frac{4}{k\pi}\left[\sin\frac{k\pi}{4}-\sin\frac{k\pi}{2}+\sin\frac{3k\pi}{4}\right].\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k\pi}\left[\sin\frac{k\pi}{4}-\sin\frac{k\pi}{2}+\sin\frac{3k\pi}{4}\right]\cos kx=\begin{cases}1 & 0\le x<\pi/4,\ \pi/2<x<3\pi/4\\ -1 & \pi/4<x<\pi/2,\ 3\pi/4<x\le\pi\\ 0 & x=\pi/4,\pi/2,3\pi/4.\end{cases}$$

OSSERVAZIONI

1) Si ha $\sin\frac{3k\pi}{4}=\sin\left\{k\pi-\frac{k\pi}{4}\right\}=(-1)^{k+1}\sin\frac{k\pi}{4}$ e quindi $a_k=\frac{4}{k\pi}\left(\left[1+(-1)^{k+1}\right]\sin\frac{k\pi}{4}-\sin\frac{k\pi}{2}\right)$.

2) La funzione è dispari rispetto al punto $\pi/2$, e quindi i coefficienti di indice pari devono essere tutti nulli. Infatti, per $k=2m$

$$a_{2m}=\frac{2}{m\pi}\left\{[1+(-1)^{2m+1}]\sin\frac{m\pi}{2}-\sin m\pi\right\}=0$$

Osserviamo anche che per $k=2m+1$ dispari si ha:

$$\begin{aligned}a_{2m+1}=&\frac{4}{(2m+1)\pi}\left[2\sin\frac{(2m+1)\pi}{4}-\sin\frac{(2m+1)\pi}{2}\right]\\ =&\frac{4}{(2m+1)\pi}\left[2\sin\left(\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]\\ =&\begin{cases}\frac{4}{(2m+1)\pi}\left[-1+(-1)^{m/2}\sqrt{2}\right] & \text{per } m \text{ pari}\\ \frac{4}{(2m+1)\pi}\left[1+(-1)^{(m-1)/2}\sqrt{2}\right] & \text{per } m \text{ dispari.}\end{cases}\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases}u_t-4u_{xx}=0 & 0<x<\pi, t>0,\\ u(x,0)=f(x) & 0\le x\le\pi,\\ u_x(0,t)=0, u_x(\pi,t)=0 & t>0,\end{cases}$$

dove $f(x)$ è la funzione dell'esercizio precedente.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore in dimensione 1. La soluzione è:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k\pi}\left[\sin\frac{k\pi}{4}-\sin\frac{k\pi}{2}+\sin\frac{3k\pi}{4}\right]e^{-4k^2t}\cos kx.$$

ESERCIZIO 5
Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=18(x^2+y^2) & x^2+y^2<1\\ u=x^2y^2+1 & x^2+y^2=1.\end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.

SOLUZIONE
E' un problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson nel disco unitario. In coordinate polari abbiamo:

$$18(x^2+y^2)=18r^2,\qquad (x^2y^2+1)|_{x^2+y^2=1}=\cos^2\theta\sin^2\theta+1=\frac{9}{8}-\frac{1}{8}\cos 4\theta$$

e quindi il problema diventa

$$\begin{cases} U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}=18r^2 & 0<r<1, 0\le\theta\le 2\pi\\ U(1,\theta)=\frac{9}{8}-\frac{1}{8}\cos 4\theta & 0\le\theta\le 2\pi.\end{cases}$$

La soluzione va cercata nella forma $U(r,\theta)=v_1(r)+v_2(r)\cos 4\theta$. Per $v_1$ abbiamo il problema

$$\begin{cases} v_1''+\frac{1}{r}v_1'=18r^2\\ v_1(1)=\frac{9}{8}, v_1 \text{ limitata,}\end{cases}$$

la cui soluzione è $v_1(r)=\frac{9}{8}r^4$. Per $v_2$ abbiamo il problema

$$\begin{cases} v_2''+\frac{1}{r}v_2'-\frac{16}{r^2}v_2=0\\ v_2(1)=-\frac{1}{8}, v_2 \text{ limitata,}\end{cases}$$

la cui soluzione è $v_2(r)=-\frac{1}{8}r^4$. Quindi la soluzione del problema iniziale è:

$$\begin{aligned} U(r,\theta)=&\frac{9}{8}r^4-\frac{1}{8}r^4\cos 4\theta=r^4+r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\\ =&x^4+3x^2y^2+y^4.\end{aligned}$$

Verifica:

$$\begin{aligned} u|_{x^2+y^2=1}&=\left[(x^2+y^2)^2+x^2y^2\right]_{x^2+y^2=1}=1+x^2y^2;\\ u_{xx}+u_{yy}&=12x^2+6y^2+6x^2+12y^2=18(x^2+y^2).\end{aligned}$$

**INGEGNERIA CIVILE - ANALISI MATEMATICA II**
**SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 23-06-2017**

ESERCIZIO 1
Data, nel piano, la forma differenziale

$$\omega = \left(-\frac{2x}{1+x^2+y^2} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx - \frac{\alpha y}{1+x^2+y^2} dy\,,$$

si discuta per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ essa risulta chiusa. In tal caso: 1) si stabilisca in quali regioni del piano la forma $\omega$ risulta esatta; 2) si calcoli l'integrale della forma $\omega$ lungo la curva parametrica seguente:

$$\gamma : \begin{cases} x = & 2\cos t \\ y = & 3\sin t \quad t \in [0, 2\pi]\,. \end{cases}$$

SOLUZIONE
Posto

$$\begin{aligned} X &= -\frac{2x}{1+x^2+y^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ Y &= -\frac{\alpha y}{1+x^2+y^2} \end{aligned}$$

bisogna trovare quel valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $X_y = Y_x$. Risulta:

$$\begin{aligned} X_y &= -2x\left(-\frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2}\right) = \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2} \\ Y_x &= -\alpha y\left(-\frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2}\right) = \frac{2\alpha xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,, \end{aligned}$$

dalle quali otteniamo che la curva è chiusa solo per $\alpha = 2$. L'insieme di definizione di $\omega$ è l'intero piano $\mathbb{R}^2$, e quindi l'insieme è semplicemente connesso, proprietà che, unita alla chiusura di $\omega$, segna l'esattezza della stessa. Pertanto l'integrale della forma è nullo, essendo la curva $\gamma$ chiusa.

ESERCIZIO 2
Si consideri il dominio $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x-1)^2 + y^2 \le z \le 2y + 3\}$. Calcolare

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma\,,$$

con $\vec{F} = \left(x^2 + e^y, -2xy + \arctan z, z + y\sin x\right)$.

SOLUZIONE
Si ha $\operatorname{div} \vec{F} = 1$ e quindi, posto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^2 \le 2y + 3\}$ e usando il teorema della divergenza

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int\int\int_V dxdydz = \int\int_D \left[2y + 3 - (x-1)^2 - y^2\right] dxdy\,.$$

Il dominio $D$ si può riscrivere come $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 4\}$ e quindi, usando le coordinate polari decentrate nel punto $(1,1)$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int\int_D \left[4 - (x-1)^2 - (y-1)^2\right] dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho\left(4-\rho^2\right) d\rho d\theta \\ &= 2\pi\int_0^2 \rho\left(4-\rho^2\right) d\rho = 2\pi\left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \\ &= 2\pi\,(8-4) = 8\pi. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3
Sviluppare in serie di Fourier di soli seni la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{\pi} & \text{per} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ \\ 1 & \text{per} \quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{3}{4}\pi \\ \\ 4 - \frac{4}{\pi}x & \text{per} \quad \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
La funzione è regolare a tratti e inoltre $f(0) = 0 = f(\pi)$. Quindi la serie converge totalmente. Si ha poi:

$$\begin{aligned} b_k =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{3x}{\pi} \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{3\pi/4} \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{3\pi/4}^{\pi} \left(4 - \frac{4}{\pi}x\right) \sin kx dx \\ =& \frac{6}{\pi^2} \left[ -x \frac{\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^{\pi/3} + \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos kx}{k} \right]_{\pi/3}^{3\pi/4} + \frac{8}{\pi^2} \left[ -\pi \frac{\cos kx}{k} + x \frac{\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2} \right]_{3\pi/4}^{\pi} \\ =& \frac{6 \sin \frac{k\pi}{3}}{k^2 \pi^2} + \frac{8 \sin \frac{3k\pi}{4}}{k^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 \pi^2} \left[ 3 \sin \frac{k\pi}{3} + 4 \sin \frac{3k\pi}{4} \right] \sin kx = \begin{cases} \frac{3x}{\pi} & \text{per} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ \\ 1 & \text{per} \quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{3}{4}\pi \\ \\ 4 - \frac{4}{\pi}x & \text{per} \quad \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t + 2xu_x - 2tu = (1-t)x & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \frac{x}{2} + 2 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.
SOLUZIONE
Le curve caratteristiche si ottengono risolvendo il problema:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La soluzione generale è $x(t) = Ce^{2t}$ e si trova $C = x_0$ e quindi:

$$x = \varphi(x_0, t) \equiv x_0 e^{2t}, \qquad x_0 = \psi(x, t) \equiv xe^{-2t}.$$

Sulle caratteristiche il problema diventa:

$$\begin{cases} U' - 2tU = (1-t)x_0 e^{2t} \\ U(0) = \frac{x_0}{2} + 2. \end{cases}$$

La soluzione generale si può cercare nella forma $U(t) = v(t)e^{t^2}$. Si ha allora $U' = v'e^{t^2} + 2tve^{t^2}$ e quindi $v'(t) = x_0(1-t)e^{2t-t^2}$, $v(t) = \frac{x_0}{2}e^{2t-t^2}$ e $U(t) = \frac{x_0}{2}e^{2t} + Ce^{t^2}$. Imponendo la condizione iniziale si trova $C = 2$ e $U(x_0, t) = \frac{x_0}{2}e^{2t} + 2e^{t^2}$. Infine, sostituendo $x_0 = e^{-2t}$, troviamo la soluzione:

$$u(x,t) = \frac{x}{2} + 2e^{t^2}.$$

Verifica. Si ha $u(x,0) = \frac{x}{2} + 2$ e poi

$$u_t + 2xu_x - 2tu = 4te^{t^2} + 2x \cdot \frac{1}{2} - 2t\left[\frac{x}{2} + 2e^{t^2}\right] = x - tx.$$

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \sin^3 x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta. Si ha:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \sin^3(x + 2s\sqrt{t})ds \\ =& \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \sin(x + 2s\sqrt{t})ds - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \sin[3(x + 2s\sqrt{t})]ds \\ =& \frac{3\sin x}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos(2s\sqrt{t})ds - \frac{\sin 3x}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos(6s\sqrt{t})ds \\ =& \frac{3}{4}e^{-t}\sin x - \frac{1}{4}e^{-9t}\sin 3x. \end{aligned}$$

Verifica:

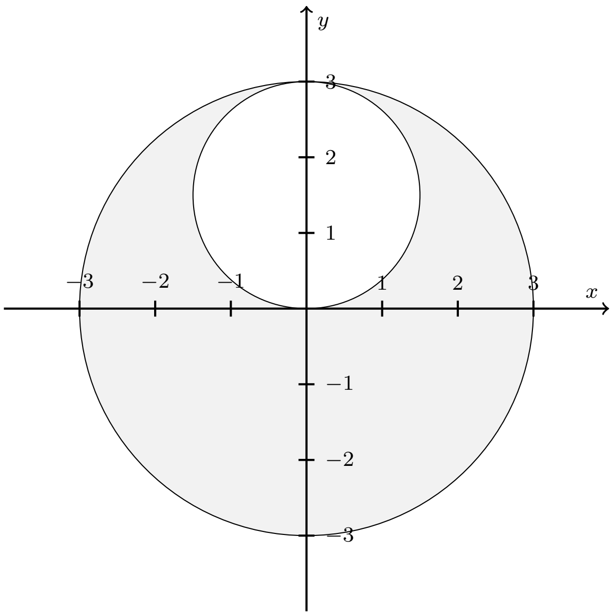
$$u(x,0) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x = \sin^3 x,$$

$$u_t - u_{xx} = \left[-\frac{3}{4}e^{-t}\sin x + \frac{9}{4}e^{-9t}\sin 3x\right] - \left[-\frac{3}{4}e^{-t}\sin x + \frac{9}{4}e^{-9t}\sin 3x\right] = 0.$$

**INGEGNERIA CIVILE - ANALISI MATEMATICA II**
**SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 17-07-2017**

ESERCIZIO 1
Calcolare il seguente integrale
$$\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy$$
con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le 3y \le x^2 + y^2 \le 9\}$.

SOLUZIONE
Il dominio $D$ è la parte superiore (cioè ottenuta per $y \ge 0$) della zona ombreggiata nella figura seguente:




Passando in coordinate polari, le equazioni che costituiscono $D$ diventano: $0 \le 3\rho \sin\theta \le \rho^2 \le 9$. Da cui: $\theta \in [0, \pi]$, $3 \sin\theta \le \rho \le 3$.

Riscriviamo ora l'integrale passando in coordinate polari:
$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \int_{3\sin\theta}^3 \rho\sqrt{9-\rho^2}d\rho d\theta &= -\frac{1}{3}\int_0^\pi \left(9-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_{3\sin\theta}^3 d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\pi \left(9-9\sin^2\theta\right)^{3/2} d\theta \\
&= 9\int_0^\pi |\cos\theta|^3 \, d\theta \\
&= 18\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)d(\sin\theta) \\
&= 18\left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi/2} \\
&= 12
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Calcolare l'integrale
$$\iiint_V \left(x^2+y^2+2z\right) dxdydz\,,$$

dove $V$ è la regione al di sotto del paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$, all'interno del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e al di sopra del piano $xy$.

SOLUZIONE
In coordinate cilindriche la regione si esprime con le condizioni:

$$0 \leq z \leq 5 - \rho^2\,, \quad 0 \leq \rho \leq 2\,, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\,.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int\int\int_V \left(x^2 + y^2 + 2z\right) dxdydz =& \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{5-\rho^2} \rho\left(\rho^2 + 2z\right) dzd\rho d\theta \\
=& 2\pi \int_0^2\int_0^{5-\rho^2} \rho\left(\rho^2 + 2z\right) dzd\rho \\
=& 2\pi \int_0^2 \left[z\rho^3 + \rho z^2\right]_0^{5-\rho^2} d\rho \\
=& 2\pi \int_0^2 \left[\left(5 - \rho^2\right)\rho^3 + \rho\left(5 - \rho^2\right)^2\right] d\rho \\
=& 2\pi \left[\frac{5}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6 + \frac{25}{2}\rho^2 - \frac{5}{2}\rho^4 + \frac{1}{6}\rho^6\right]_0^2 \\
=& 2\pi[20 + 50 - 40] \\
=& 60\pi
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3
Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \pi/6 \\ -1 & \pi/6 \leq x \leq \pi/4 \\ 0 & \pi/4 < x < 3\pi/4 \\ 1 & 3\pi/4 \leq x \leq 5\pi/6 \\ 0 & 5\pi/6 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
La funzione è discontinua e quindi la convergenza non sarà totale. Si ha $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) = 0$ e poi, per $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_k =& \frac{2}{\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/4} -\cos kx dx + \frac{2}{\pi}\int_{3\pi/4}^{5\pi/6} \cos kx dx \\
=& \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\sin kx}{k}\right]_{\pi/6}^{\pi/4} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{3\pi/4}^{5\pi/6} \\
=& \frac{2}{k\pi}\left[\sin\frac{k\pi}{6} - \sin\frac{k\pi}{4} - \sin\frac{3k\pi}{4} + \sin\frac{5k\pi}{6}\right].
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\left[\sin\frac{k\pi}{6} - \sin\frac{k\pi}{4} - \sin\frac{3k\pi}{4} + \sin\frac{5k\pi}{6}\right]\cos kx = \begin{cases} -1 & \pi/6 < x < \pi/4, \\ 1 & 3\pi/4 < x < 5\pi/6, \\ -1/2 & x = \pi/6, \pi/4, \\ 1/2 & x = 3\pi/4, 5\pi/6, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE La funzione è dispari rispetto al punto $\pi/2$, e quindi i coefficienti di indice pari devono essere tutti nulli. Infatti,

$$\sin\frac{3k\pi}{4} = \sin\left(k\pi - \frac{k\pi}{4}\right) = (-1)^{k+1}\sin\frac{k\pi}{4}$$
$$\sin\frac{5k\pi}{6} = \sin\left(k\pi - \frac{k\pi}{6}\right) = (-1)^{k+1}\sin\frac{k\pi}{6}$$

e quindi

$$a_k = \frac{2\left[1+(-1)^{k+1}\right]}{k\pi}\left(\sin\frac{k\pi}{6} - \sin\frac{k\pi}{4}\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ \frac{4}{k\pi}\left(\sin\frac{k\pi}{6} - \sin\frac{k\pi}{4}\right) & k \text{ dispari.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 5u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = f(x) + 1 & x \in \mathbb{R}, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove $f$ è la funzione dell'esercizio precedente.

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore in dimensione 1. Osserviamo che $a_k(f+1) = a_k(f) + a_k(1)$ e che $a_0(1) = 2, a_k(1) = 0$ per $k \geq 1$. Alternativamente, la serie di Fourier di $f(x)+1$ si ottiene aggiungendo 1 a quella di $f$. Quindi la soluzione è:

$$u(x,t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\left[\sin\frac{k\pi}{6} - \sin\frac{k\pi}{4} - \sin\frac{3k\pi}{4} + \sin\frac{5k\pi}{6}\right]e^{-5k^2t}\cos kx.$$

ESERCIZIO 5

Dopo aver calcolato e disegnato le caratteristiche, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 5uu_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} -4x & x > 0 \\ -3x & x < 0. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica.

SOLUZIONE

Caratteristiche: $x = x_0 + 20x_0t$ per $x_0 > 0$, $x = x_0 + 15x_0t$ per $x_0 < 0$. Soluzione in forma implicita:

$$u = \begin{cases} -4[x+5ut] & x \geq 0 \\ -3[x+5ut] & x < 0 \end{cases}$$

e quindi

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{-4x}{1+20t} & x \geq 0, \\ \frac{-3x}{1+15t} & x < 0. \end{cases}$$

Verifica:

$$\text{per } x > 0 \qquad u_t - 5uu_x = \frac{80x}{(1+20t)^2} - 5\frac{-4x}{1+20t}\cdot\frac{-4}{1+20t}, \quad u(x,0) = -4x;$$
$$\text{per } x < 0 \qquad u_t - 5uu_x = \frac{45x}{(1+20t)^2} - 5\frac{-3x}{1+20t}\cdot\frac{-3}{1+20t}, \quad u(x,0) = -3x.$$

**INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO**
**ANALISI MATEMATICA II**
**SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 22-06-2018**

ESERCIZIO 1
Utilizzando le formule di Green-Gauss, calcolare

$$\int_{+\partial D} y^2 dx + x^2 dy$$

dove $D$ è il dominio delimitato dalle curve $y = -x^2 + x$ e $y = 0$.

SOLUZIONE

$$\begin{aligned}\int_{+\partial D} y^2 dx + x^2 dy &= \iint_D (2x - 2y) dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{-x^2+x} (2x - 2y) dxdy \\ &= \int_0^1 \left[2xy - y^2\right]_{y=0}^{y=-x^2+x} dx \\ &= \int_0^1 [(-2x^3 + 2x^2) - (x^4 - 2x^3 + x^2)] dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Calcolare

$$\int_{+\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

dove $\Omega$ è il dominio poggiato sopra il piano $z = 0$, interno alla superficie $x^2 + y^2 = 4$, esterno a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ed $\vec{F} = (2xz, yx^2, zy^2)$.

SOLUZIONE
Si ha $\operatorname{div} \vec{F} = 2z + x^2 + y^2$ e quindi, utilizzando il teorema della divergenza e poi le coordinate cilindriche, si trova:

$$\begin{aligned}\int_{+\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_\Omega (2z + x^2 + y^2) dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^\rho (2z + \rho^2) \rho dz d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 \left[z^2\rho + z\rho^3\right]_{z=0}^{z=\rho} d\rho \\ &= 2\pi \int_0^2 (\rho^3 + \rho^4) d\rho \\ &= \pi \frac{104}{5}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

Sviluppare in serie di Fourier di soli seni la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \\ \pi - x & \text{per} \quad \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ x & \text{per} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{2}{3}\pi, \\ 0 & \text{per} \quad \frac{2}{3}\pi < x \leq \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE

La funzione è discontinua e quindi la serie non converge totalmente. Si ha poi:

$$\begin{aligned} b_k =& \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} (\pi - x) \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{2\pi/3} x \sin kx dx \\ =& \frac{2}{\pi} \left[ x \frac{\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2} - \pi \frac{\cos kx}{k} \right]_{\pi/3}^{\pi/2} + \frac{2}{\pi} \left[ -x \frac{\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2} \right]_{\pi/2}^{2\pi/3} \\ =& \frac{4}{3k} \left[ \cos \frac{k\pi}{3} - \cos \frac{2k\pi}{3} \right] + \frac{2}{\pi k^2} \left[ \sin \frac{k\pi}{3} + \sin \frac{2k\pi}{3} - 2 \sin \frac{k\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & \text{per} \quad x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \\ f(x) & \text{per} \quad x \in [0, \pi], x \neq \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. La funzione è pari rispetto al punto $\frac{\pi}{2}$ e quindi i coefficienti di indice pari devono essere uguali a zero. In effetti, utilizzando le identità

$$\begin{aligned} \cos \frac{k\pi}{3} - \cos \frac{2k\pi}{3} &= \cos \frac{k\pi}{3} - \cos \left( \pi - \frac{k\pi}{3} \right) \\ &= \cos \frac{k\pi}{3} - (-1)^k \cos \frac{k\pi}{3} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{per} \quad k \text{ pari} \\ 2 \cos \frac{k\pi}{3} & \text{per} \quad k \text{ dispari,} \end{cases} \end{aligned}$$

e

$$\sin \frac{k\pi}{3} + \sin \frac{2k\pi}{3} = \sin \frac{k\pi}{3} + \sin \left( \pi - \frac{k\pi}{3} \right) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad k \text{ pari} \\ 2 \sin \frac{k\pi}{3} & \text{per} \quad k \text{ dispari} \end{cases}$$

si trova che

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad k \text{ pari} \\ \frac{8}{3k} \cos \frac{k\pi}{3} + \frac{4}{\pi k^2} \left[ \sin \frac{k\pi}{3} - (-1)^{(k-1)/2} \right] & \text{per} \quad k \text{ dispari.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 4

Dopo aver determinato la soluzione stazionaria, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 2 \cos x & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) + \cos x & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = 1, u(\pi, t) = -1 & t > 0, \end{cases}$$

dove $f(x)$ è la funzione dell'esercizio precedente. Calcolare anche la velocità di convergenza alla soluzione stazionaria.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore in dimensione 1. La soluzione stazionaria si trova risolvendo il problema $\begin{cases} -2u_s'' = -2\cos x, \\ u_s(0) = 1, u_s(\pi) = -1, \end{cases}$, la cui soluzione è: $u_s(x) = \cos x$. Ponendo $v(x,t) = u(x,t) - u_s(x)$, la funzione $v$ deve risolvere il problema:

$$\begin{cases} v_t - 2v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ v(x,0) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

dove $f$ è la funzione dell'esercizio precedente. Quindi, se i coefficienti $b_k$ sono come nella soluzione dell'esercizio precedente,

$$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t) = \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-2k^2 t} \sin kx.$$

Ne segue che, essendo $\max_{[0,\pi]} |f(x)| = \frac{2\pi}{3}$ ed $\frac{L^2}{D} = \frac{\pi^2}{2}$ si ha:

$$|u(x,t) - u_s(x)| \le \frac{8\pi}{3} e^{-2t} \qquad \text{per ogni} \qquad t \ge \frac{\pi^2}{2}.$$

ESERCIZIO 5
Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 1 - 2xy & x^2 + y^2 < 1 \\ u = 1 & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.

SOLUZIONE
E' un problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson nel disco unitario. In coordinate polari abbiamo:

$$1 - 2xy = 1 - r^2 \sin 2\theta, \qquad 1|_{x^2+y^2=1} = 1$$

e quindi il problema diventa

$$\begin{cases} U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 1 - r^2 \sin 2\theta & 0 < r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi \\ U(1,\theta) = 1 & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

La soluzione va cercata nella forma $U(r,\theta) = v_1(r) + v_2(r)\sin 2\theta$. Per $v_1$ abbiamo il problema

$$\begin{cases} v_1'' + \frac{1}{r}v_1' = 1 \\ v_1(1) = 1, v_1 \text{ limitata}, \end{cases}$$

la cui soluzione è $v_1(r) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}r^2$. Per $v_2$ abbiamo il problema

$$\begin{cases} v_2'' + \frac{1}{r}v_2' - \frac{4}{r^2}v_2 = -r^2 \\ v_2(1) = 0, v_2 \text{ limitata}, \end{cases}$$

la cui soluzione è $v_2(r) = \frac{1}{12}r^2 - \frac{1}{12}r^4$. Quindi la soluzione del problema iniziale è:

$$\begin{aligned} U(r,\theta) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{12}r^2 \sin 2\theta - \frac{1}{12}r^4 \sin 2\theta \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(x^2+y^2) + \frac{1}{6}xy - \frac{1}{6}(x^2+y^2)xy. \end{aligned}$$

Verifica:

$$
\begin{aligned}
u|_{x^2+y^2=1} &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1; \\
u_{xx} + u_{yy} &= \left(\frac{1}{2} - xy\right) + \left(\frac{1}{2} - xy\right) = 1 - 2xy.
\end{aligned}
$$

**INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO**
**ANALISI MATEMATICA II**
**SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 18-07-2018**

ESERCIZIO 1
Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{y^2 - x^2 + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2}\, dx - \frac{2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}\, dy.$$

1. Stabilire se $\omega$ è chiusa.
2. Dire se $\omega$ è esatta ed in caso affermativo, determinare tutte le sue primitive (suggerimento importante: per ottenere la primitiva si consiglia di calcolare $\int Y dy$).
3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma$ è la circonferenza di centro (100,0) e raggio 200.

SOLUZIONE
La forma è chiusa:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{2y(x^2 + y^2 + 1) - 4y(y^2 - x^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} = \frac{6x^2y - 2y^3 - 2y}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$$

e poi

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{-2y(x^2 + y^2 + 1) + 4x \cdot 2xy}{(x^2 + y^2 + 1)^3} = \frac{6x^2y - 2y^3 - 2y}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$$

e quindi $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$. Inoltre è definita in tutto $\mathbb{R}^2$, e quindi è esatta. Calcolo della primitiva:

$$F(x, y) = \int \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} dy = \int \frac{-xd(x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} dy = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} + \varphi(x),$$

e poi imponendo $\frac{\partial F}{\partial x} = X$ troviamo che deve essere

$$\frac{y^2 - x^2 + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2} + \varphi'(x) = \frac{y^2 - x^2 + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

e quindi $\varphi' = 0$ e possiamo prendere $F(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2+1}$, Per finire, essendo la forma esatta, il suo integrale su una curva chiusa come la circonferenza nel testo vale zero.

OSSERVAZIONE. Se si usa $\int X dx$ per il calcolo della primitiva si trova un integrale più difficile: utilizzando l'integrazione per decomposizione e quella per parti abbiamo

$$\begin{aligned}\int \frac{y^2 - x^2 + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx &= \int \frac{y^2 + x^2 + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx - \int x \cdot \frac{d(1 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ &= \int \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} - \int \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} + \varphi(y).\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sia $D$ la regione piana delimitata dalle curve $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando $D$ attorno all'asse $x$.

SOLUZIONE
Utilizzando il Teorema di Guldino, si trova:

$$\begin{aligned}
\text{Volume } =& 2\pi \iint_D y dx dy \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} y dx dy \\
&= \pi \int_0^1 \left[y^2\right]_{x^3}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \pi \int_0^1 (x - x^6) dx \\
&= \frac{6}{7}\pi.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3
Sviluppare in serie di Fourier di soli seni la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\pi} & \text{per} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \\ \\ 1 & \text{per} \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \\ \\ 3 - \frac{3}{\pi}x & \text{per} \quad \frac{2}{3}\pi < x \leq \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.
SOLUZIONE
La funzione è regolare a tratti e inoltre $f(0) = 0 = f(\pi)$. Quindi la serie converge totalmente. Si ha poi:

$$\begin{aligned}
b_k =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/6} \frac{6x}{\pi} \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/6}^{2\pi/3} \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{2\pi/3}^{\pi} \left(3 - \frac{3}{\pi}x\right) \sin kx dx \\
=& \frac{6}{\pi^2} \left[-x\frac{\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{\pi/6} + \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_{\pi/2}^{2\pi/3} + \frac{8}{\pi^2} \left[-\pi\frac{\cos kx}{k} + x\frac{\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2}\right]_{2\pi/3}^{\pi} \\
=& \frac{12}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{6} + \frac{6}{k^2\pi^2} \sin \frac{2k\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2\pi^2} \left[2 \sin \frac{k\pi}{6} + \sin \frac{2k\pi}{3}\right] \sin kx = \begin{cases} \frac{6x}{\pi} & \text{per} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \\ \\ 1 & \text{per} \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \\ \\ 3 - \frac{3}{\pi}x & \text{per} \quad \frac{2}{3}\pi < x \leq \pi. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - x u_x = 2 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = x^2 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.
SOLUZIONE
Le caratteristiche si trovano risolvendo il problema

$$\begin{cases} x' = -x \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

e quindi $\varphi(x_0,t) = x_0e^{-t}$, $\psi(x,y) = xe^t$. Sulle caratteristiche l'equazione diventa:

$$\begin{cases} U' = 1 \\ U(x_0,0) = x_0^2 \end{cases}$$

la cui soluzione è $U(x_0,t) = t + x_0^2$. Infine, $u(x,t) = t + x^2e^{2t}$.

Verifica:

$$u(x,0) = x^2, \qquad u_t - xu_x = (1 + 2x^2e^{2t}) - x(2xe^{2t}) = 1.$$

ESERCIZIO 5
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = e^{2x}\sin^2 x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.
SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta.

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}e^{2x+4s\sqrt{t}}\sin^2(x+2s\sqrt{t})ds \\ =& \frac{e^{2x+4t}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-2\sqrt{t})^2}\frac{1-\cos(2x+4s\sqrt{t})}{2}ds \\ =& \frac{e^{2x+4t}}{2} - \frac{e^{2x+4t}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-2\sqrt{t})^2}\cos[2(x+4t)+4(s-2\sqrt{t})\sqrt{t}]ds \\ =& \frac{e^{2x+4t}}{2} - \cos(2x+8t)\frac{e^{2x+4t}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-2\sqrt{t})^2}\cos[4(s-2\sqrt{t})\sqrt{t}]ds \\ (r = s-2\sqrt{t}) \qquad =& e^{2x+4t} - \cos(2x+8t)\frac{e^{2x+4t}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2}\cos(4r\sqrt{t})dr \\ =& \frac{e^{2x+4t}}{2} - \frac{e^{2x}}{2}\cos(2x+8t). \end{aligned}$$

Verifica:

$$u(x,0) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x = e^{2x}\sin^2 x$$

e poi

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} = & \left[2e^{2x+4t} + 4e^{2x}\sin(2x+8t)\right] \\ & - \left[2e^{2x+4t} - 2e^{2x}\cos(2x+8t) + 4e^{2x}\sin(2x+4t) + 2e^{2x}\cos(2x+8t)\right] = 0. \end{aligned}$$