

INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO
ANALISI MATEMATICA II
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 19-06-2015

ESERCIZIO 1

Calcolare

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$$

dove D è il dominio piano delimitato dalla curva $x^2 + y^2 = x$ e dalle semirette $y = x$, $x \geq 0$ e $y = 0$, $x \geq 0$.

SOLUZIONE

Usando le coordinate polari si trova che:

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \theta} \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \left. -\frac{1}{3} (1-\rho^2)^{3/2} \right|_{\rho=0}^{\rho=\cos \theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} (\sin^3 \theta - 1) d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta - \theta \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{36} + \frac{2}{9} + \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

Calcolare

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

dove V è il volume delimitato dalla superficie $z + 1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ e dai piani $z = 2$, $z = 3$ ed $\vec{F} = \left(\frac{4}{3}x^3, z, 4z(x^2 + y^2)\right)$.

SOLUZIONE

Si ha $\text{div} \vec{F} = 4x^2 + 4(x^2 + y^2)$ e quindi, usando il teorema della divergenza e le coordinate cilindriche,

$$\begin{aligned}
\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_V [4x^2 + 4(x^2 + y^2)] dx dy dz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_2^3 \int_0^{z+1} (4\rho^2 \cos^2 \theta + 4\rho^2) \rho d\rho dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_2^3 [\rho^4 (1 + \cos^2 \theta)]_{\rho=0}^{\rho=1+z} dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{5} (1+z)^5 \right]_2^3 (1 + \cos^2 \theta) d\theta \\
&= 3 \frac{4^5 - 3^5}{5} \pi \\
&= \frac{2343}{5} \pi.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

Sviluppare in serie di Fourier di soli seni la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{per } \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi \\ x - \pi & \text{per } \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE

La funzione è discontinua e quindi la convergenza non sarà totale. Si ha:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} x \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{3\pi/4}^{\pi} (x - \pi) \sin kx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^{\pi/4} + \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} + \pi \frac{\cos kx}{k} \right]_{3\pi/4}^{\pi} \\
&= -\frac{\cos \frac{k\pi}{4}}{2k} + 2 \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k^2 \pi} - 2 \frac{\sin \frac{3k\pi}{4}}{k^2 \pi} - \frac{\cos \frac{3k\pi}{4}}{2k}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{\cos \frac{k\pi}{4}}{2k} + 2 \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k^2 \pi} - 2 \frac{\sin \frac{3k\pi}{4}}{k^2 \pi} - \frac{\cos \frac{3k\pi}{4}}{2k} \right] \sin kx \\
= \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq \pi, x \neq \pi/4, 3\pi/4 \\ \pi/8 & x = \pi/4 \\ -\pi/8 & x = 3\pi/4 \end{cases}
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

Dopo aver determinato la soluzione stazionaria, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{6} u_{xx} = -2x^2 - x & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) + x^4 + x^3 + x & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = 0, u(\pi, t) = \pi^4 + \pi^3 + \pi & t > 0, \end{cases}$$

dove $f(x)$ è la funzione dell'esercizio precedente. Calcolare anche la velocità di convergenza alla soluzione stazionaria.

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore in dimensione 1. La soluzione stazionaria si trova risolvendo il problema $\begin{cases} u_s'' = 12x^2 + 6x, \\ u_s(0) = 0, u_s(\pi) = \pi^4 + \pi^3 + \pi, \end{cases}$, la cui soluzione è: $u_s(x) = x^4 + x^3 + x$. Ponendo $v(x, t) = u(x, t) - u_s(x)$, la funzione v deve risolvere il problema:

$$\begin{cases} v_t - \frac{1}{6}v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ v(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ v(0, t) = v(\pi, t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

Quindi

$$u(x, t) = u_s(x) + v(x, t) = x^4 + x^3 + x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{\cos \frac{k\pi}{4}}{2k} + 2\frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k^2\pi} - 2\frac{\sin \frac{3k\pi}{4}}{k^2\pi} - \frac{\cos \frac{3k\pi}{4}}{2k} \right] e^{-k^2t/6} \sin kx.$$

Ne segue che, essendo $\max_{[0, \pi]} |f(x)| = \frac{\pi}{4}$ e $\frac{L^2}{D} = 6\pi^2$ si ha:

$$|u(x, t) - u_s(x)| \leq \pi e^{-t/6} \quad \text{per ogni} \quad t \geq 6\pi^2.$$

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - 2uu_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} -2x & x \geq 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

E' richiesto il disegno delle caratteristiche e la verifica della soluzione trovata.

SOLUZIONE

Le caratteristiche sono: $x = x_0 + 2x_0t$ per $x_0 < 0$ e $x = x_0 + 4x_0t$ per $x_0 \geq 0$. Per $x \geq 0$ l'equazione in forma implicita è $u = -2[x + 2ut]$, che esplicitata diventa $u(x, t) = -\frac{2x}{4t+1}$, mentre per $x < 0$ essa è $u = -[x + 2ut]$, che esplicitata diventa $u(x, t) = -\frac{x}{2t+1}$. Notiamo che

$$-\frac{x}{2t+1} \Big|_{x=0^-} = 0 = -\frac{2x}{4t+1} \Big|_{x=0^+}$$

e quindi la soluzione è continua in tutto il semipiano. La verifica è immediata:

$$u_t - 2uu_x = \frac{8x}{(4t+1)^2} - 2\frac{-2x}{4t+1} \cdot \frac{-2}{4t+1} = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{2x}{4t+1} \Big|_{t=0} = -2x \quad \text{per } x \geq 0,$$

$$u_t - 2uu_x = \frac{2x}{(2t+1)^2} - 2\frac{-x}{2t+1} \cdot \frac{-1}{2t+1} = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{x}{2t+1} \Big|_{t=0} = -x \quad \text{per } x < 0.$$

INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO
ANALISI MATEMATICA II
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 15-07-2015

ESERCIZIO 1

Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} dx - \frac{1}{1+x^2} dy.$$

1. Stabilire se ω chiusa.
2. Dire se ω esatta ed in caso affermativo, determinare tutte le sue primitive.
3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \omega$, dove γ il perimetro del poligono che ha per vertici i punti

$$O(0,0) \quad A(1,2) \quad B(3,-7) \quad C(-5,-3) \quad D(100,0).$$

SOLUZIONE

Si ha $X_y = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = Y_x$ e quindi la forma è chiusa. Essendo l'insieme di definizione tutto il piano, la forma è anche esatta. Calcolo della primitiva: si ha

$$F(x, y) = \int \frac{2xy}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{y}{1+x^2} + \phi(y),$$

$$F_y = -\frac{1}{1+x^2} + \phi'(y)$$

e quindi, uguagliando F_y con Y si ottiene

$$-\frac{1}{1+x^2} + \phi'(y) = -\frac{1}{1+x^2},$$

quindi $\phi'(y) = 0$, cioè $\phi(y) = C$ costante. Le primitive sono dunque:

$$F(x, y) = -\frac{y}{1+x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Per finire, l'integrale richiesto vale 0 perché la forma è esatta e il cammino è chiuso.

ESERCIZIO 2

Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_W e^z(x^2 + y^2) dx dy dz,$$

dove W è la regione

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

SOLUZIONE

Usando le coordinate cilindriche si trova:

$$\begin{aligned} \iiint_W e^z(x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_z^{\sqrt{2}} e^z \rho^3 d\rho dz d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4e^z - z^4 e^z] dz \\ &= \frac{\pi}{2} [-20e^z - z^4 e^z + 4z^3 e^z - 12z^2 e^z + 24z e^z]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= -48\pi \sinh \sqrt{2} + 32\pi \sqrt{2} \cosh \sqrt{2}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier di soli seni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq x \leq \pi/4 \\ \cos 2x & \text{per } \pi/4 < x < 3\pi/4 \\ 0 & \text{per } 3\pi/4 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza dello sviluppo ottenuto e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE

Osserviamo preliminarmente che f è continua in $[0, \pi]$ (poiché $\cos 2x|_{x=\pi/4} = 0 = \cos 2x|_{x=3\pi/4}$) e che $f(0) = 0 = f(\pi)$: le condizioni di compatibilità sono verificate e quindi la convergenza dello sviluppo ottenuto sarà totale. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti. Si ha:

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos 2x \sin 2x dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin 4x dx = \frac{1}{4\pi} [-\cos 4x]_{\pi/4}^{3\pi/4} = 0$$

e per $k \geq 1, k \neq 2$,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos 2x \sin kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} [\sin(k+2)x + \sin(k-2)x] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(k+2)x}{k+2} - \frac{\cos(k-2)x}{k-2} \right]_{\pi/4}^{3\pi/4} \\ &= -\frac{\cos \frac{3(k+2)\pi}{4}}{\pi(k+2)} - \frac{\cos \frac{3(k-2)\pi}{4}}{\pi(k-2)} + \frac{\cos \frac{(k+2)\pi}{4}}{\pi(k+2)} + \frac{\cos \frac{(k-2)\pi}{4}}{\pi(k-2)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$f(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{\infty} \left[-\frac{\cos \frac{3(k+2)\pi}{4}}{\pi(k+2)} - \frac{\cos \frac{3(k-2)\pi}{4}}{\pi(k-2)} + \frac{\cos \frac{(k+2)\pi}{4}}{\pi(k+2)} + \frac{\cos \frac{(k-2)\pi}{4}}{\pi(k-2)} \right] \sin kx$$

per ogni $x \in [0, \pi]$, con convergenza totale. Si potrebbe anche osservare che $b_k = 0$ per k pari (la funzione di partenza è pari rispetto a $\pi/2$) e che

$$b_{2m+1} = \begin{cases} \frac{4\sqrt{2}(-1)^{m/2}}{\pi[(2m+1)^2-4]} & \text{per } m \text{ pari} \\ \frac{4\sqrt{2}(-1)^{(m-1)/2}}{\pi[(2m+1)^2-4]} & \text{per } m \text{ dispari.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \cos^3 x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta. Si ha:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos^3(x + 2s\sqrt{t}) ds \\ &= \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos(x + 2s\sqrt{t}) ds + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos 3(x + 2s\sqrt{t}) ds \\ &= \frac{3 \cos x}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos(2s\sqrt{t}) ds + \frac{\cos 3x}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos(6s\sqrt{t}) ds \\ &= \frac{3}{4} e^{-t} \cos x + \frac{1}{4} e^{-9t} \cos 3x. \end{aligned}$$

Verifica:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x = \cos^3 x, \\ u_t - u_{xx} &= \left[-\frac{3}{4} e^{-t} \cos x - 9 \frac{1}{4} e^{-9t} \cos 3x \right] - \left[-\frac{3}{4} e^{-t} \cos x - 9 \frac{1}{4} e^{-9t} \cos 3x \right] = 0. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ u = 2y + 2xy & x^2 + y^2 = 1, \\ u = \frac{y}{2} + 2xy & x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un anello. Si ha:

$$\begin{aligned} [2y + 2xy]_{x=\cos\theta, y=\sin\theta} &= 2 \sin \theta + 2 \cos \theta \sin \theta = 2 \sin \theta + \sin 2\theta \\ \left[\frac{y}{2} + 2xy \right]_{x=2 \cos \theta, y=2 \sin \theta} &= \sin \theta + 4 \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Quindi in coordinate polari il problema diventa:

$$\begin{cases} U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} = 0 & 1 < r < 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ U(1, \theta) = 2 \sin \theta + \sin 2\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ U(2, \theta) = \sin \theta + 4 \sin 2\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Cercando la soluzione nella forma

$$U(r, \theta) = \left(C_1 r + C_2 \frac{1}{r} \right) \sin \theta + \left(C_3 r^2 + C_4 \frac{1}{r^2} \right) \sin 2\theta$$

troviamo che deve essere

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_3 + C_4 = 1 \\ 4C_3 + \frac{1}{4}C_4 = 4 \end{cases}$$

e quindi $C_1 = 0, C_2 = 2, C_3 = 1, C_4 = 0$. In conclusione,

$$U(r, \theta) = \frac{2}{r} \sin \theta + r^2 \sin 2\theta$$

e tornando in coordinate cartesiane troviamo

$$\frac{2}{r} \sin \theta + r^2 \sin 2\theta = \frac{2r \sin \theta}{r^2} + 2r \sin \theta r \cos \theta = \frac{2y}{x^2 + y^2} + 2xy.$$

Verifica. Si ha:

$$\left[\frac{2y}{x^2 + y^2} + 2xy \right]_{x^2+y^2=1} = 2y + 2xy,$$
$$\left[\frac{2y}{x^2 + y^2} + 2xy \right]_{x^2+y^2=4} = \frac{y}{2} + 2xy$$

e poi

$$u_x = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2} + 2y, \quad u_{xx} = \frac{-4y(x^2 + y^2) + 4x \cdot 4xy}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{-4y^3 + 12x^2y}{(x^2 + y^2)^3}$$
$$u_y = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + 2x, \quad u_{yy} = \frac{-4y(x^2 + y^2) - 4y(2x^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{4y^3 - 12x^2y}{(x^2 + y^2)^3},$$

e quindi $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO

ANALISI 2

PROVA SCRITTA DEL 21-06-2016 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Calcolare

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

dove V é il solido delimitato dalla superficie $z = -x^2 - y^2$ e dal piano $z = -1$ ed $\vec{F} = (x, y, z^2)$.

SOLUZIONE

Si ha $\text{div} \vec{F} = 2 + 2z$. Applicando il teorema della divergenza troviamo:

$$\begin{aligned} \int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_V \text{div} \vec{F} dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^{-\rho^2} (2 + 2z) \rho dz d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 [2z\rho + z^2\rho]_{z=-1}^{z=-\rho^2} d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 [-2\rho^3 + \rho^5 + \rho] d\rho \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

Stabilire in quali regioni del piano la seguente forma differenziale é esatta:

$$\omega = \frac{2(y-x)}{1-(y-x)^2} dx + \frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2} dy.$$

Successivamente calcolare l'integrale della forma differenziale lungo la curva parametrica seguente:

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{\sin(\pi t)}{2 + \cos t} + \frac{3}{2} + t \right),$$

$t \in [0, 1]$.

SOLUZIONE

Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{2(y-x)}{1-(y-x)^2} = \frac{2[1+(y-x)^2]}{[1-(y-x)^2]^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2}$$

e quindi la forma è chiusa. Inoltre essa è definita nel piano privato dei punti in cui $1 - (y - x)^2 = 0$, cioè privato delle rette $y = x \pm 1$. Quindi la forma è esatta nei semipiani $y > x + 1$, $y < x - 1$ e nella striscia $x - 1 < y < x + 1$. Calcoliamo la primitiva: si ha

$$f(x, y) = \int \frac{2(y-x)}{1-(y-x)^2} dx = \int \frac{1}{1-(y-x)^2} d(1-(y-x)^2) = \log |1-(y-x)^2| + \phi(y)$$

e la condizione $f_y = \frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2}$ fornisce

$$\frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2} + \phi'(y) = \frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2}.$$

Quindi possiamo prendere $\phi \equiv 0$ ed $f(x, y) = \log |1 - (y - x)^2|$.

Lungo la curva γ abbiamo

$$y = \frac{\sin(\pi t)}{2 + \cos t} + \frac{3}{2} + t \geq \frac{3}{2} + t > 1 + t = 1 + x.$$

Quindi la curva si trova nel semipiano $y > x + 1$ e il valore dell'integrale è uguale alla differenza di f agli estremi, cioè

$$\int_{\gamma} \omega = f(1, \frac{5}{2}) - f(0, \frac{3}{2}) = \log \frac{5}{4} - \log \frac{5}{4} = 0.$$

ESERCIZIO 3

Sviluppare in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \pi/3 \\ 1 + \frac{x}{2} & \pi/3 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \\ 0 & \frac{2}{3}\pi < x \leq \pi \end{cases}$$

esaminando la convergenza della serie ottenuta. E' richiesto il disegno dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE Osserviamo preliminarmente che f è discontinua nei punti $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2}{3}\pi$ e quindi lo sviluppo convergerà puntualmente ma non totalmente. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti. Si ha:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \left(1 + \frac{x}{2}\right) \sin kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k} - \frac{x \cos kx}{2k} + \frac{\sin kx}{2k^2} \right]_{\pi/3}^{2\pi/3} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos \frac{2k\pi}{3}}{k} - \frac{\pi \cos \frac{2k\pi}{3}}{3k} + \frac{\sin \frac{2k\pi}{3}}{2k^2} + \frac{\cos \frac{k\pi}{3}}{k} + \frac{\pi \cos \frac{k\pi}{3}}{6k} - \frac{\sin \frac{k\pi}{3}}{2k^2} \right] \\ &= \begin{cases} -\frac{\cos \frac{k\pi}{3}}{3k} - \frac{2 \sin \frac{k\pi}{3}}{k^2 \pi} & \text{per } k \text{ pari} \\ \left(\frac{4}{\pi} + 1\right) \frac{\cos \frac{k\pi}{3}}{k} & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

poiché

$$\cos \frac{2k\pi}{3} = \cos \left(k\pi - \frac{k\pi}{3}\right) = (-1)^k \cos \frac{k\pi}{3}$$

e

$$\sin \frac{2k\pi}{3} = \sin \left(k\pi - \frac{k\pi}{3}\right) = (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi}{3}.$$

Si ha quindi, per $x \in [0, \pi]$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \begin{cases} f(x) & x \neq \frac{k\pi}{3}, \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{\pi}{12} & x = \frac{k\pi}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} & x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

con convergenza solo puntuale.

ESERCIZIO 4

Dopo aver determinato la soluzione stazionaria, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = -4 - 24x^2 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = 1, u(\pi, t) = \pi^4 + \pi^2 + 1 & t > 0, \end{cases}$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x^2 + x^4 & 0 \leq x < \pi/3 \\ 2 + \frac{x}{2} + x^2 + x^4 & \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \\ 1 + x^2 + x^4 & \frac{2}{3}\pi < x \leq \pi \end{cases}$$

Calcolare anche la velocità di convergenza alla soluzione stazionaria.

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore in dimensione

1. La soluzione stazionaria si trova risolvendo il problema $\begin{cases} u_s'' = 2 + 12x^2, \\ u_s(0) = 1, u_s(\pi) = \pi^4 + \pi^2 + 1, \end{cases}$ la cui soluzione è: $u_s(x) = x^4 + x^2 + 1$. Ponendo $v(x, t) = u(x, t) - u_s(x)$, la funzione v deve risolvere il problema:

$$\begin{cases} v_t - 2v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ v(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ v(0, t) = v(\pi, t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

dove f è la funzione dell'esercizio precedente. Quindi, se i coefficienti b_k sono come nella soluzione dell'esercizio precedente,

$$u(x, t) = u_s(x) + v(x, t) = x^4 + x^2 + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-2k^2 t} \sin kx.$$

Ne segue che, essendo $\max_{[0, \pi]} |f(x)| = 1 + \frac{\pi}{3}$ ed $\frac{L^2}{D} = \frac{\pi^2}{2}$ si ha:

$$|u(x, t) - u_s(x)| \leq 4 \left(1 + \frac{\pi}{3}\right) e^{-2t} \quad \text{per ogni } t \geq \frac{\pi^2}{2}.$$

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t + 2x^2 u_x = -2t \sin(t^2) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 1 + x^2 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione.

SOLUZIONE

Le curve caratteristiche si ottengono risolvendo il problema:

$$\begin{cases} x' = 2x^2 \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Separando le variabili si ottiene: $\int \frac{dx}{x^2} = 2 \int dt$, $-\frac{1}{x} = 2t + C$, $x = \frac{1}{-2t-C}$. Imponendo la condizione iniziale, si trova $C = -\frac{1}{x_0}$ e quindi

$$x = \varphi(x_0, t) \equiv \frac{x_0}{1 - 2x_0 t}, \quad x_0 = \psi(x, t) \equiv \frac{x}{2xt + 1}.$$

Sulle caratteristiche l'equazione diventa:

$$\begin{cases} U' = -2t \sin(t^2) \\ U(0) = 1 + x_0^2. \end{cases}$$

La soluzione generale è: $U = \cos(t^2) + C$. Imponendo la condizione iniziale si trova $C = x_0^2$ e quindi $U(x_0, t) = \cos(t^2) + x_0^2$,

$$u(x, t) = \cos(t^2) + \frac{x^2}{(2xt + 1)^2}.$$

Verifica. Si ha $u(x, 0) = 1 + x^2$ e poi

$$u_t + 2x^2 u_x = \left[-2t \sin(t^2) - \frac{4x^3}{(2xt + 1)^3} \right] + 2x^2 \left[\frac{2x}{(2xt + 1)^2} - \frac{4x^2 t}{(2xt + 1)^3} \right] = -2t \sin(t^2).$$

INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO
ANALISI MATEMATICA II
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 18-07-2016

ESERCIZIO 1

Stabilire se la seguente forma differenziale é esatta e, in caso affermativo, calcolarne la primitiva F tale che $F(0,0) = 1$:

$$\omega = e^x [\sin(x+y) + \cos(x+y)] dx + e^x \cos(x+y) dy.$$

Successivamente calcolare

$$\int_{\gamma_1} \omega dl,$$

dove $\gamma_1 = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$.

SOLUZIONE

La forma è definita su tutto il piano. Inoltre la forma è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y} \{e^x [\sin(x+y) + \cos(x+y)]\} = e^x [\cos(x+y) - \sin(x+y)] = \frac{\partial}{\partial x} [e^x \cos(x+y)]$$

e quindi anche esatta. Per calcolare la primitiva prima integriamo:

$$F(x, y) = \int e^x \cos(x+y) dy = e^x \sin(x+y) + \varphi(x).$$

Poi deriviamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x \sin(x+y) + e^x \cos(x+y) + \varphi'(x)$$

deve essere uguale a $e^x [\sin(x+y) + \cos(x+y)]$, quindi $\varphi'(x) = 0$ e possiamo prendere $\varphi \equiv C$ costante. Imponendo $F(0,0) = 1$ si trova $C = 1$, cioè $F(x, y) = e^x \sin(x+y) + 1$. Per finire, possiamo calcolare l'integrale curvilineo usando la primitiva:

$$\int_{\gamma_1} \omega dl = F(-1, 0) - F(1, 0) = -(e^{-1} + e) \sin 1.$$

ESERCIZIO 2

Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_A (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

dove

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

SOLUZIONE

Usando le coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \iiint_A (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{5} [-\cos \theta]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{5}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ -1 & \text{per } \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{per } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3}{4}\pi \\ -1 & \text{per } \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi \end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE

La funzione è discontinua e quindi la convergenza non sarà totale. Si ha $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = 0$ e poi, per $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \cos kx dx - \frac{2}{\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \cos kx dx - \frac{2}{\pi} \int_{3\pi/4}^\pi \cos kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi/4} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{\pi/2}^{3\pi/4} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{3\pi/4}^\pi \\ &= \frac{4}{k\pi} \left[\sin \frac{k\pi}{4} - \sin \frac{k\pi}{2} + \sin \frac{3k\pi}{4} \right]. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \left[\sin \frac{k\pi}{4} - \sin \frac{k\pi}{2} + \sin \frac{3k\pi}{4} \right] \cos kx = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi/4, \pi/2 < x < 3\pi/4 \\ -1 & \pi/4 < x < \pi/2, 3\pi/4 < x \leq \pi \\ 0 & x = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4. \end{cases}$$

OSSERVAZIONI

1) Si ha $\sin \frac{3k\pi}{4} = \sin \left\{ k\pi - \frac{k\pi}{4} \right\} = (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi}{4}$ e quindi $a_k = \frac{4}{k\pi} \left([1 + (-1)^{k+1}] \sin \frac{k\pi}{4} - \sin \frac{k\pi}{2} \right)$.

2) La funzione è dispari rispetto al punto $\pi/2$, e quindi i coefficienti di indice pari devono essere tutti nulli. Infatti, per $k = 2m$

$$a_{2m} = \frac{2}{m\pi} \left\{ [1 + (-1)^{2m+1}] \sin \frac{m\pi}{2} - \sin m\pi \right\} = 0$$

Osserviamo anche che per $k = 2m + 1$ dispari si ha:

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= \frac{4}{(2m+1)\pi} \left[2 \sin \frac{(2m+1)\pi}{4} - \sin \frac{(2m+1)\pi}{2} \right] \\ &= \frac{4}{(2m+1)\pi} \left[2 \sin \left(\frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= \begin{cases} \frac{4}{(2m+1)\pi} [-1 + (-1)^{m/2} \sqrt{2}] & \text{per } m \text{ pari} \\ \frac{4}{(2m+1)\pi} [1 + (-1)^{(m-1)/2} \sqrt{2}] & \text{per } m \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(\pi, t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

dove $f(x)$ è la funzione dell'esercizio precedente.

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore in dimensione 1. La soluzione è:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \left[\sin \frac{k\pi}{4} - \sin \frac{k\pi}{2} + \sin \frac{3k\pi}{4} \right] e^{-4k^2 t} \cos kx.$$

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 18(x^2 + y^2) & x^2 + y^2 < 1 \\ u = x^2 y^2 + 1 & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.

SOLUZIONE

E' un problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson nel disco unitario. In coordinate polari abbiamo:

$$18(x^2 + y^2) = 18r^2, \quad (x^2 y^2 + 1)|_{x^2+y^2=1} = \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 1 = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} \cos 4\theta$$

e quindi il problema diventa

$$\begin{cases} U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} = 18r^2 & 0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ U(1, \theta) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} \cos 4\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

La soluzione va cercata nella forma $U(r, \theta) = v_1(r) + v_2(r) \cos 4\theta$. Per v_1 abbiamo il problema

$$\begin{cases} v_1'' + \frac{1}{r} v_1' = 18r^2 \\ v_1(1) = \frac{9}{8}, v_1 \text{ limitata,} \end{cases}$$

la cui soluzione è $v_1(r) = \frac{9}{8} r^4$. Per v_2 abbiamo il problema

$$\begin{cases} v_2'' + \frac{1}{r} v_2' - \frac{16}{r^2} v_2 = 0 \\ v_2(1) = -\frac{1}{8}, v_2 \text{ limitata,} \end{cases}$$

la cui soluzione è $v_2(r) = -\frac{1}{8} r^4$. Quindi la soluzione del problema iniziale è:

$$\begin{aligned} U(r, \theta) &= \frac{9}{8} r^4 - \frac{1}{8} r^4 \cos 4\theta = r^4 + r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &= x^4 + 3x^2 y^2 + y^4. \end{aligned}$$

Verifica:

$$\begin{aligned} u|_{x^2+y^2=1} &= [(x^2 + y^2)^2 + x^2 y^2]_{x^2+y^2=1} = 1 + x^2 y^2; \\ u_{xx} + u_{yy} &= 12x^2 + 6y^2 + 6x^2 + 12y^2 = 18(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

INGEGNERIA CIVILE - ANALISI MATEMATICA II
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 23-06-2017

ESERCIZIO 1

Data, nel piano, la forma differenziale

$$\omega = \left(-\frac{2x}{1+x^2+y^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx - \frac{\alpha y}{1+x^2+y^2} dy,$$

si discuta per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ essa risulta chiusa. In tal caso: 1) si stabilisca in quali regioni del piano la forma ω risulta esatta; 2) si calcoli l'integrale della forma ω lungo la curva parametrica seguente:

$$\gamma: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

SOLUZIONE

Posto

$$X = -\frac{2x}{1+x^2+y^2} + \frac{1}{1+x^2}$$
$$Y = -\frac{\alpha y}{1+x^2+y^2}$$

bisogna trovare quel valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $X_y = Y_x$. Risulta:

$$X_y = -2x \left(-\frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} \right) = \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$
$$Y_x = -\alpha y \left(-\frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2} \right) = \frac{2\alpha xy}{(1+x^2+y^2)^2},$$

dalle quali otteniamo che la curva è chiusa solo per $\alpha = 2$. L'insieme di definizione di ω è l'intero piano \mathbb{R}^2 , e quindi l'insieme è semplicemente connesso, proprietà che, unita alla chiusura di ω , segna l'esattezza della stessa. Pertanto l'integrale della forma è nullo, essendo la curva γ chiusa.

ESERCIZIO 2

Si consideri il dominio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 \leq z \leq 2y+3\}$. Calcolare

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma,$$

con $\vec{F} = (x^2 + e^y, -2xy + \arctan z, z + y \sin x)$.

SOLUZIONE

Si ha $\text{div } \vec{F} = 1$ e quindi, posto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 2y+3\}$ e usando il teorema della divergenza

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int \int \int_V dx dy dz = \int \int_D [2y+3 - (x-1)^2 - y^2] dx dy.$$

Il dominio D si può riscrivere come $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$ e quindi, usando le coordinate polari decentrate nel punto $(1, 1)$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int \int_D [4 - (x-1)^2 - (y-1)^2] dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho (4 - \rho^2) d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 \rho (4 - \rho^2) d\rho = 2\pi \left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 \\ &= 2\pi (8 - 4) = 8\pi. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

Sviluppare in serie di Fourier di soli seni la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{\pi} & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ 1 & \text{per } \frac{\pi}{3} < x < \frac{3}{4}\pi \\ 4 - \frac{4}{\pi}x & \text{per } \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE

La funzione è regolare a tratti e inoltre $f(0) = 0 = f(\pi)$. Quindi la serie converge totalmente. Si ha poi:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{3x}{\pi} \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{3\pi/4} \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{3\pi/4}^{\pi} \left(4 - \frac{4}{\pi}x\right) \sin kx dx \\ &= \frac{6}{\pi^2} \left[-x \frac{\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^{\pi/3} + \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_{\pi/3}^{3\pi/4} + \frac{8}{\pi^2} \left[-\pi \frac{\cos kx}{k} + x \frac{\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2} \right]_{3\pi/4}^{\pi} \\ &= \frac{6 \sin \frac{k\pi}{3}}{k^2 \pi^2} + \frac{8 \sin \frac{3k\pi}{4}}{k^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 \pi^2} \left[3 \sin \frac{k\pi}{3} + 4 \sin \frac{3k\pi}{4} \right] \sin kx = \begin{cases} \frac{3x}{\pi} & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ 1 & \text{per } \frac{\pi}{3} < x < \frac{3}{4}\pi \\ 4 - \frac{4}{\pi}x & \text{per } \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t + 2xu_x - 2tu = (1-t)x & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \frac{x}{2} + 2 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.

SOLUZIONE

Le curve caratteristiche si ottengono risolvendo il problema:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La soluzione generale è $x(t) = Ce^{2t}$ e si trova $C = x_0$ e quindi:

$$x = \varphi(x_0, t) \equiv x_0 e^{2t}, \quad x_0 = \psi(x, t) \equiv x e^{-2t}.$$

Sulle caratteristiche il problema diventa:

$$\begin{cases} U' - 2tU = (1-t)x_0 e^{2t} \\ U(0) = \frac{x_0}{2} + 2. \end{cases}$$

La soluzione generale si può cercare nella forma $U(t) = v(t)e^{t^2}$. Si ha allora $U' = v'e^{t^2} + 2tve^{t^2}$ e quindi $v'(t) = x_0(1-t)e^{2t-t^2}$, $v(t) = \frac{x_0}{2}e^{2t-t^2}$ e $U(t) = \frac{x_0}{2}e^{2t} + Ce^{t^2}$. Imponendo la condizione iniziale si trova $C = 2$ e $U(x_0, t) = \frac{x_0}{2}e^{2t} + 2e^{t^2}$. Infine, sostituendo $x_0 = e^{-2t}$, troviamo la soluzione:

$$u(x, t) = \frac{x}{2} + 2e^{t^2}.$$

Verifica. Si ha $u(x, 0) = \frac{x}{2} + 2$ e poi

$$u_t + 2xu_x - 2tu = 4te^{t^2} + 2x \cdot \frac{1}{2} - 2t \left[\frac{x}{2} + 2e^{t^2} \right] = x - tx.$$

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin^3 x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta. Si ha:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \sin^3(x + 2s\sqrt{t}) ds \\ &= \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \sin(x + 2s\sqrt{t}) ds - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \sin[3(x + 2s\sqrt{t})] ds \\ &= \frac{3 \sin x}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos(2s\sqrt{t}) ds - \frac{\sin 3x}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos(6s\sqrt{t}) ds \\ &= \frac{3}{4} e^{-t} \sin x - \frac{1}{4} e^{-9t} \sin 3x. \end{aligned}$$

Verifica:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x = \sin^3 x, \\ u_t - u_{xx} &= \left[-\frac{3}{4} e^{-t} \sin x + \frac{9}{4} e^{-9t} \sin 3x \right] - \left[-\frac{3}{4} e^{-t} \sin x + \frac{9}{4} e^{-9t} \sin 3x \right] = 0. \end{aligned}$$

INGEGNERIA CIVILE - ANALISI MATEMATICA II
 SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 17-07-2017

ESERCIZIO 1

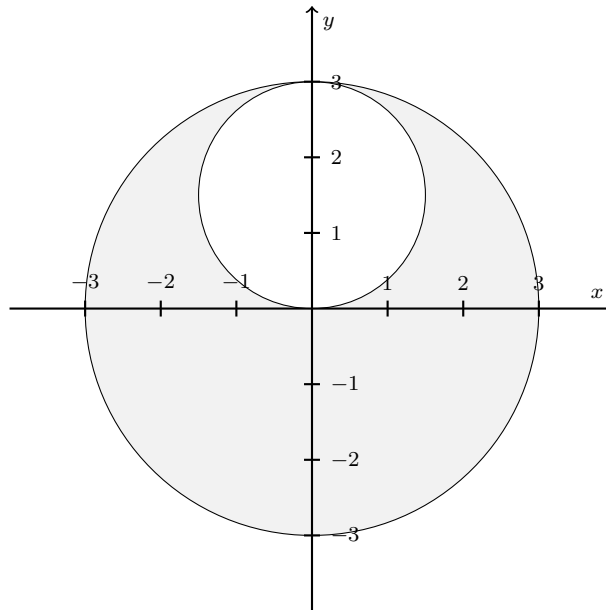
Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy$$

con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 3y \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

SOLUZIONE

Il dominio D è la parte superiore (cioè ottenuta per $y \geq 0$) della zona ombreggiata nella figura seguente:



Passando in coordinate polari, le equazioni che costituiscono D diventano: $0 \leq 3\rho \sin \theta \leq \rho^2 \leq 9$. Da cui: $\theta \in [0, \pi]$, $3 \sin \theta \leq \rho \leq 3$.

Riscriviamo ora l'integrale passando in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_{3 \sin \theta}^3 \rho \sqrt{9 - \rho^2} d\rho d\theta &= -\frac{1}{3} \int_0^\pi (9 - \rho^2)^{3/2} \Big|_{3 \sin \theta}^3 d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi (9 - 9 \sin^2 \theta)^{3/2} d\theta \\ &= 9 \int_0^\pi |\cos \theta|^3 d\theta \\ &= 18 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) d(\sin \theta) \\ &= 18 \left[\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

Calcolare l'integrale

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + 2z) dx dy dz,$$

dove V è la regione al di sotto del paraboloido $z = 5 - x^2 - y^2$, all'interno del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e al di sopra del piano xy .

SOLUZIONE

In coordinate cilindriche la regione si esprime con le condizioni:

$$0 \leq z \leq 5 - \rho^2, \quad 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \int \int_V (x^2 + y^2 + 2z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{5-\rho^2} \rho (\rho^2 + 2z) \, dz \, d\rho \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 \int_0^{5-\rho^2} \rho (\rho^2 + 2z) \, dz \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^2 [z\rho^3 + \rho z^2]_0^{5-\rho^2} \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^2 [(5 - \rho^2)\rho^3 + \rho(5 - \rho^2)^2] \, d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{5}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6 + \frac{25}{2}\rho^2 - \frac{5}{2}\rho^4 + \frac{1}{6}\rho^6 \right]_0^2 \\ &= 2\pi[20 + 50 - 40] \\ &= 60\pi \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \pi/6 \\ -1 & \pi/6 \leq x \leq \pi/4 \\ 0 & \pi/4 < x < 3\pi/4 \\ 1 & 3\pi/4 \leq x \leq 5\pi/6 \\ 0 & 5\pi/6 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE

La funzione è discontinua e quindi la convergenza non sarà totale. Si ha $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \, dx = 0$ e poi, per $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/4} -\cos kx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{3\pi/4}^{5\pi/6} \cos kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\sin kx}{k} \right]_{\pi/6}^{\pi/4} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{3\pi/4}^{5\pi/6} \\ &= \frac{2}{k\pi} \left[\sin \frac{k\pi}{6} - \sin \frac{k\pi}{4} - \sin \frac{3k\pi}{4} + \sin \frac{5k\pi}{6} \right]. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \left[\sin \frac{k\pi}{6} - \sin \frac{k\pi}{4} - \sin \frac{3k\pi}{4} + \sin \frac{5k\pi}{6} \right] \cos kx = \begin{cases} -1 & \pi/6 < x < \pi/4, \\ 1 & 3\pi/4 < x < 5\pi/6, \\ -1/2 & x = \pi/6, \pi/4, \\ 1/2 & x = 3\pi/4, 5\pi/6, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE La funzione è dispari rispetto al punto $\pi/2$, e quindi i coefficienti di indice pari devono essere tutti nulli. Infatti,

$$\begin{aligned}\sin \frac{3k\pi}{4} &= \sin \left(k\pi - \frac{k\pi}{4} \right) = (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi}{4} \\ \sin \frac{5k\pi}{6} &= \sin \left(k\pi - \frac{k\pi}{6} \right) = (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi}{6}\end{aligned}$$

e quindi

$$a_k = \frac{2 [1 + (-1)^{k+1}]}{k\pi} \left(\sin \frac{k\pi}{6} - \sin \frac{k\pi}{4} \right) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ \frac{4}{k\pi} \left(\sin \frac{k\pi}{6} - \sin \frac{k\pi}{4} \right) & k \text{ dispari.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 5u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) + 1 & x \in \mathbb{R}, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove f è la funzione dell'esercizio precedente.

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore in dimensione 1. Osserviamo che $a_k(f+1) = a_k(f) + a_k(1)$ e che $a_0(1) = 2, a_k(1) = 0$ per $k \geq 1$. Alternativamente, la serie di Fourier di $f(x) + 1$ si ottiene aggiungendo 1 a quella di f . Quindi la soluzione è:

$$u(x, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \left[\sin \frac{k\pi}{6} - \sin \frac{k\pi}{4} - \sin \frac{3k\pi}{4} + \sin \frac{5k\pi}{6} \right] e^{-5k^2t} \cos kx.$$

ESERCIZIO 5

Dopo aver calcolato e disegnato le caratteristiche, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 5uu_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} -4x & x > 0 \\ -3x & x < 0. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica.

SOLUZIONE

Caratteristiche: $x = x_0 + 20x_0t$ per $x_0 > 0$, $x = x_0 + 15x_0t$ per $x_0 < 0$. Soluzione in forma implicita:

$$u = \begin{cases} -4[x + 5ut] & x \geq 0 \\ -3[x + 5ut] & x < 0 \end{cases}$$

e quindi

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{-4x}{1+20t} & x \geq 0, \\ \frac{-3x}{1+15t} & x < 0. \end{cases}$$

Verifica:

$$\begin{aligned} \text{per } x > 0 \quad u_t - 5uu_x &= \frac{80x}{(1+20t)^2} - 5 \frac{-4x}{1+20t} \cdot \frac{-4}{1+20t}, & u(x, 0) &= -4x; \\ \text{per } x < 0 \quad u_t - 5uu_x &= \frac{45x}{(1+20t)^2} - 5 \frac{-3x}{1+20t} \cdot \frac{-3}{1+20t}, & u(x, 0) &= -3x. \end{aligned}$$