Metodi Numerici con elementi di Programmazione

(A.A. 2013-2014)

Metodi Numerici

Appunti delle lezioni: Approssimazione di dati e funzioni

Approssimazione ai minimi quadrati

Docente Vittoria Bruni

Email: vittoria.bruni@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 16

Tel. 06 49766648

Ricevimento: Giovedì 14.00-15.00

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sul sito

http://ingaero.uniroma1.it/

nella pagina dedicata al corso Metodi Numerici con elementi di Programmazione

Approssimazione ai minimi quadrati

Approssimazione ai minimi quadrati

Problema.
Data la **tabella** $\{x_i, y_i\}$, $i = 0, \ldots, n$, si vuole trovare una **funzione analitica** che **approssimi** i dati.

In questo caso la **tabella** è il risultato di **misure sperimentali** ciascuna delle quali è affetta da un **errore di misura** ε_i.

Metodo di approssimazione: si sceglie la funzione approssimante φ_M in modo da **minimizzare**

$$\sum_{i=0}^{n} [\varphi_M(x_i) - y_i]^2 \qquad \textbf{Scarto quadratico}$$

oppure, introducendo i **pesi** $w_i > 0$, $\forall i$,

$$\sum_{i=0}^{n} w_i \, [\varphi_M(x_i) - y_i]^2 \qquad \textbf{Scarto quadratico pesato}$$

Caso lineare

Funzione approssimante
$\varphi_M(x)$ dipende linearmente da M parametri:

$$a_0, a_1, \ldots, a_M \qquad M << n$$

$$\Rightarrow \varphi_M(x) = a_0\psi_0(x) + a_1\psi_1(x) + \ldots + a_M\psi_M(x)$$

dove $\{\psi_k(x)\}_{k=0,\ldots,M}$ è una base per lo spazio di approssimazione

Metodo di approssimazione: si minimizza lo **scarto quadratico**

$$\sigma^2(a_0, a_1, \ldots, a_M) = \sum_{i=0}^{n} \left[\underbrace{a_0\psi_0(x_i) + a_1\psi_1(x_i) + \ldots + a_M\psi_M(x_i)}_{\varphi_M(x_i)} - y_i \right]^2$$

Risolvere il problema dell' **approssimazione ai minimi quadrati** vuol dire individuare i **coefficienti reali** a_k che rendono **minimo** $\sigma^2(a_0, \ldots, a_M)$.

Nota. L'approssimante ai minimi quadrati in generale **non passa** per i valori $\{x_i, y_i\}$ ma "*vicino*" ad essi.

Polinomio ai minimi quadrati

Funzione approssimante:

$$\varphi_M(x) = P_M(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{M-1} x^{M-1} + a_M x^M \qquad \boxed{M << n}$$

Metodo di approssimazione: si minimizza lo **scarto quadratico**

$$\sigma^2(a_0, a_1, ..., a_M) = \sum_{i=0}^{n} [\underbrace{a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_{M-1} x_i^{M-1} + a_M x_i^M}_{P_M(x_i)} - y_i]^2$$

Risolvere il problema dell'**approssimazione polinomiale ai minimi quadrati** vuol dire individuare il polinomio P_M, cioè i **coefficienti reali** a_k, per il quale σ è **minimo**.

Minimizzazione

- Per minimizzare σ bisogna annullare il **gradiente**

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma^2}{\partial a_k} = 0 \qquad k = 0, 1, ..., M$$

$$\Rightarrow 2\sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1\, x_i + \cdots + a_{M-1}\, x_i^{M-1} + a_M\, x_i^M - y_i)\, x_i^k = 0 \qquad k = 0, 1, ..., M$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^k + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+1} + \cdots + a_M \sum_{i=0}^{n} x_i^{M+k} = \sum_{i=0}^{n} y_i\, x_i^k \qquad k = 0, 1, ..., M}$$

- Per trovare i coefficienti incogniti a_k bisogna risolvere il sistema lineare ottenuto (**sistema delle equazioni normali**).

- Per verificare che la soluzione del sistema sia un **minimo** bisogna studiare l'**hessiano** $\left[\frac{\partial^2 \sigma^2}{\partial a_j \partial a_k}\right] = 2\left[\sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j}\right] = 2H$.

Sistema delle equazioni normali

Definizioni: $s_k := \sum_{i=0}^{n} x_i^k \qquad v_k := \sum_{i=0}^{n} y_i\, x_i^k \qquad k = 0, 1, ..., M$

Il **sistema delle equazioni normali** diventa

$$\begin{cases} s_0\, a_0 + s_1\, a_1 + ... + s_M\, a_M = v_0 \\ s_1\, a_0 + s_2\, a_1 + ... + s_{M+1}\, a_M = v_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_M\, a_0 + s_{M+1}\, a_1 + ... + s_{2M}\, a_M = v_M \end{cases} \iff \quad HA = B$$

$$A = [a_0, a_1, ..., a_M]^T$$

$$B = [v_0, v_1, ..., v_M]^T$$

$$H = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_M \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{M+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_M & s_{M+1} & \cdots & s_{2M} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{M+1 \times M+1}$$

Unicità della soluzione

Definiamo il vettore $Y = [y_0, y_1, ..., y_n]^T \Rightarrow B = V^T Y \qquad H = V^T V$

dove $V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^M \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^M \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1 \times M+1}$ è la **matrice di Vandermonde** dei nodi $\{x_i\}$.

$\Rightarrow$ Per ogni $X \in \mathbf{R}^{M+1}$ si ha $X^T H X = (VX)^T (VX) = ||VX||_2^2 \geq 0$. Inoltre, per la regolarità di V, l'uguaglianza vale se e solo se $X = 0$.

$\Rightarrow$ H è **definita positiva** e quindi **regolare** $\Rightarrow$ Il sistema delle **equazioni normali** ammette un' **unica soluzione**.

$\Rightarrow$ La matrice hessiana $2H$ è **definita positiva** $\Rightarrow$ la soluzione corrisponde a un **minimo**.

Nota. La matrice H è **malcondizionata**

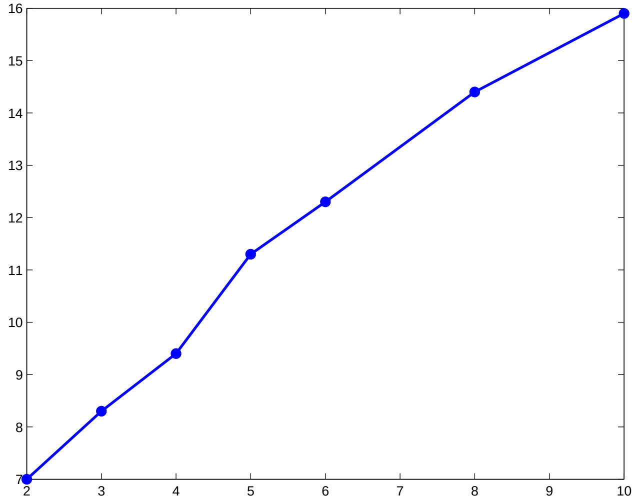
Esempio

La forza $F(x)$ necessaria per allungare una molla fino alla lunghezza x è data da $\boxed{F(x) = k(x - l)}$ (**Legge di Hooke**) dove k è la **costante elastica** e l è la **lunghezza a riposo** della molla.

Nella tabella qui di seguito sono riportate le misure sperimentali relative a una particolare molla.

x	2	3	4	5	6	8	10
$F(x)$	7.0	8.3	9.4	11.3	12.3	14.4	15.9

Determinare la costante elastica della molla.



Retta di regressione

Problema. Costruire il **polinomio di grado 1** $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ che approssima i dati $\{x_i, y_i\}$, $i = 0, ..., n >> 1$ nel senso dei **minimi quadrati**.

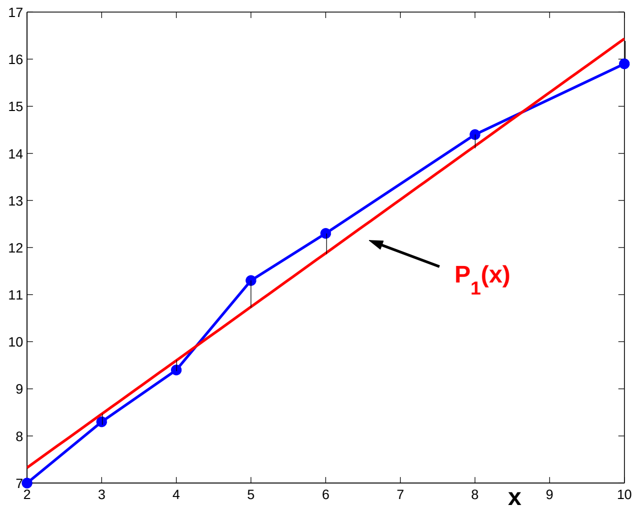
Equazioni normali $\Rightarrow$ **Soluzione**

$$\begin{cases} a_0 s_0 + a_1 s_1 = v_0 \\ a_0 s_1 + a_1 s_2 = v_1 \end{cases} \Rightarrow \quad a_0 = \frac{v_0 s_2 - v_1 s_1}{s_0 s_2 - s_1^2} \qquad a_1 = \frac{s_0 v_1 - s_1 v_0}{s_0 s_2 - s_1^2}$$

Esempio

Approssimando ai minimi quadrati i dati relativi alla molla si ottiene $a_0 = 5.049$ e $a_1 = 1.1383$. Il coefficiente a_1 fornisce l'approssimazione della costante elastica. Per questi valori dei coefficienti si ha

$$\sigma^2(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{6} [a_0 + a_1 x_i - y_i]^2 = 1.0071$$



Interpretazione probabilistica - 1

Siano x una **variabile deterministica** e $y = a_0 + a_1 x$ la **variabile dipendente**, legata a x da una **relazione lineare**.
Nel caso in cui i **dati** $\{x_i, y_i + \varepsilon_i\}$ siano affetti da **rumore** con **errore statistico** ε_i.

Definizione. A partire dai dati $\{x_i, y_i\}$ si definiscono la **varianza** e la **covarianza** rispettivamente come

$$var(x) = \frac{1}{n+1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \qquad cov(x, y) = \frac{1}{n+1} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

dove

$$\bar{x} = \frac{1}{n+1} \sum_i x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n+1} \sum_i y_i$$

sono le **medie osservate**.

Interpretazione probabilistica - 2

Ipotesi:

1) x è una **variabile deterministica**

2) $E(\varepsilon_i) = 0$ (**valore atteso**)

3) $var(\varepsilon_i)$ **costante** per ogni i

4) $cov(\varepsilon_i, \epsilon_j) = 0$ per ogni $i \neq j$

Nel metodo dei **minimi quadrati** si minimizza la quantità

$$\sigma^2(a_0, a_1) = \sum_i (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 = \sum_i \varepsilon_i^2$$

Se valgono **Hp. 1-4** i coefficienti a_0 e a_1, soluzione del problema di minimo, possono essere scritti come

$$a_1 = \frac{(n+1)(\sum_i x_i y_i) - (\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{(n+1)(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i)^2} = \frac{cov(x,y)}{var(x)}$$

$$a_0 = \frac{(\sum_i y_i)(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i)(\sum_i x_i y_i)}{(n+1)(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i)^2} = \bar{y} - a_1 \bar{x} = \bar{y} - \frac{cov(x,y)}{var(x)} \bar{x}$$

Approssimazione trigonometrica

Se la funzione o i dati che si vogliono approssimare hanno un andamento **periodico** si sceglie come classe di **funzioni approssimanti** l'insieme $\mathcal{T}_M$ dei **polinomi trigonometrici**.

$$\mathcal{T}_M := \left\{ t_M(x) = \sum_{k=0}^{M} \Big(a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x) \Big), a_k, b_k \in \mathbf{R} \;\; \forall k, x \in [0, 2\pi) \right\}$$

- **Interpolazione**: si usa quando si vogliono interpolare pochi **dati periodici** non affetti da errori
- **Approssimazione discreta ai minimi quadrati**: si usa quando si vogliono interpolare molti **dati periodici** affetti da **errori**
- I coefficienti a_k, b_k nell'approssimazione ai **minimi quadrati (discreta)** o nell'**interpolazione** costituiscono l'**Analisi di Fourier Discreta** di una funzione (segnale).

Esercizio

La tabella seguente riporta le misure della densità relativa ρ dell'aria a diverse altezze h.

h (km)	0	1.525	3.050	4.575	6.100	7.625	9.150
ρ	1	0.8617	0.7385	0.6292	0.5328	0.4481	0.3741

Si approssimi ρ con un polinomio di secondo grado e si stimi il valore di ρ in corrispondenza di $h = 10.5$ km.

Si cerca il polinomio $p_2(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2$ i cui coefficienti sono le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

dove

$s_0 = \sum_{i=0}^{6} h_i^0 = 7$

$s_1 = \sum_{i=0}^{6} h_i^1 = 1.525+3.050+4.575+6.100+7.625+9.150 = 32.0250$

$s_2 = \sum_{i=0}^{6} h_i^2 = 1.525^2+3.050^2+4.575^2+6.100^2+7.625^2+9.150^2 = 211.6319$

$s_3 = \sum_{i=0}^{6} h_i^3 = 1564.0410$

$s_4 = \sum_{i=0}^{6} h_i^4 = 12304.4095$

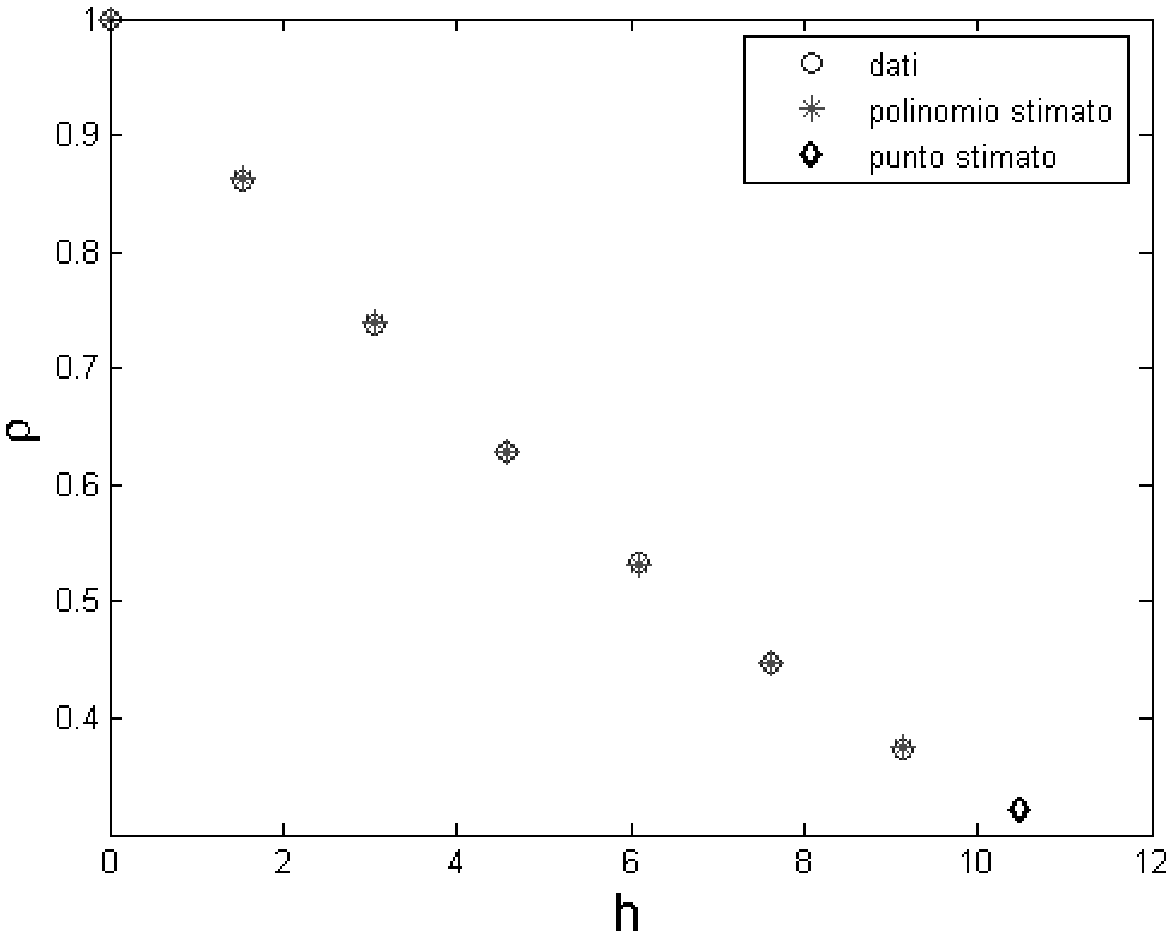
$v_0 = \sum_{i=0}^{6} h_i^0 \rho_i = 4.5844$

$v_1 = \sum_{i=0}^{6} h_i \rho_i = 16.5350$

$v_2 = \sum_{i=0}^{6} h_i^2 \rho_i = 99.2423$

Risolvere il sistema e verificare che $a_2 = 0.0028 \quad a_1 = -0.0934 \quad a_0 = 0.9989$ e

$$\sigma^2(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{6} (a_0 + a_1 h_i + a_2 h_i^2 - \rho_i)^2 = 2.9921 \cdot 10^{-5}$$



Quindi

$$p_2(h) = 0.9989 - 0.0934h + 0.0028h^2$$

da cui $p_2(10.5) = 0.3269$

Esercizio

Trovare il polinomio di secondo grado che meglio approssima i seguenti dati ai minimi quadrati:

x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y_i	0	0.25	1	2.25	4	6.25

E' necessario risolvere il seguente sistema

$$\begin{pmatrix} 6 & 7.5 & 13.75 \\ 7.5 & 13.75 & 28.125 \\ 13.75 & 28.125 & 61.1875 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.75 \\ 28.125 \\ 61.1875 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce facilmente che $[a_0\ a_1\ a_2]^T = [0\ 0\ 1]^T$

e quindi $\quad p_2(x) = x^2$

Se i valori y_i sono affetti da errore, cioè

$$y_i = [0.0674\ -0.9156\ 1.6253\ 3.0377\ 3.3535\ 7.9409],$$

il sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 6 & 7.5 & 13.75 \\ 7.5 & 13.75 & 28.125 \\ 13.75 & 28.125 & 61.1875 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.1093 \\ 32.2834 \\ 71.276 \end{pmatrix}$$

da cui $[a_0\ a_1\ a_2]^T = [-0.1812\ -0.3221\ 1.3537]^T$ e quindi

$$p_2(x) = -0.1812 - 0.3221x + 1.3537x^2$$

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*:

Cap. 6 §§ 6.12

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, *Esercizi di Calcolo Numerico*:

Es. 3.19-3.21, 3.23

Esercizi d'esame

ESERCIZIO 1

Data la tabella

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1/6	1/4	1/3	1/2
f_i	0	0.083333	0.176777	0.288675	0.500000

1.1) scrivere l'espressione del polinomio interpolatore relativo ai tre nodi equispaziati nell'intervallo chiuso $[0, 0.5]$;

1.2) sapendo che $|f^{(k)}(x)| \leq (k + 4|x|)4^{k-1}$, $k \geq 1$, per $x \in [0, 0.5]$, dare una maggiorazione in modulo dell'errore di troncamento che si commette approssimando $f(1/3)$ con il polinomio costruito al punto (1.1);

1.3) dare una maggiorazione in modulo dell'errore di propagazione.

Soluzione

1.1) I nodi da utilizzare sono x_0, x_2, x_4, il polinomio interpolatore sarà quindi un polinomio di grado al più 2. L'espressione di Lagrange fornisce

$$p_2(x) = f_0\, l_0(x) + f_2\, l_1(x) + f_4\, l_2(x) = 0.176777\, l_1(x) + 0.5\, l_2(x)$$

dove

$$l_0(x) = 8(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2}) \qquad l_1(x) = -16\, x\, (x-\frac{1}{2}) \qquad l_2(x) = 8\, x\, (x-\frac{1}{4})\,.$$

1.2) Per il modulo dell'errore di troncamento vale la maggiorazione

$$|E_2(x)| \le \frac{|x(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})|}{3!} \max_{x\in[0,0.5]} |f^{(3)}(x)|$$

Poiché per $x \in [0, 0.5]$ si ha $|f^{(3)}(x)| \le (3+4|x|)16 \le 80$, in $x = 1/3$ si ottiene

$$|E_2(\frac{1}{3})| \le \frac{1}{3}\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{6}\,80 = \frac{5}{81} \approx 0.062 < 0.5\,.$$

1.3) Per il modulo dell'errore di propagazione vale la maggiorazione

$$|E^*(\frac{1}{3})| \leq \epsilon \sum_{i=0}^{2} |l_i(\frac{1}{3})| \approx 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot 1.2222 \approx 0.61 \cdot 10^{-6}.$$

dove l'errore sui dati è $\epsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$, come si può dedurre dai dati. L'errore di propagazione è trascurabile rispetto all'errore di troncamento, quindi possiamo supporre che l'approssimazione non abbia nessun decimale esatto. In realtà la maggiorazione dell'errore è pessimistica, in quanto dalla tavola si deduce che

$$|E(\frac{1}{3})| = |f_3 - p_2(\frac{1}{3})| \approx |0.288675 - 0.268246| \approx 0.02 < 0.5 \cdot 10^{-1}$$

quindi l'approssimazione ha un decimale esatto.

ESERCIZIO 2

Data la seguente tabella delle differenze divise

i	x_i	f_i					
0	1.8	1.341641					
			0.367640				
1	1.9	1.378405		-0.047750			
			...		0.011667		
2	2.0	1.414214		...		...	
			0.349240		0.010500		...
3	2.1	1.449138		...		-0.0054175	
			...		...		
4	2.2	1.483240		...			
			...				
5	2.3	1.516570					

2.1) determinare il polinomio interpolatore di grado minimo che produce un'approssimazione del valore della funzione nel punto $x = 1.95$ con errore di troncamento in modulo inferiore a $0.5 \cdot 10^{-5}$;

2.2) indicato con $p(x)$ il polinomio determinato al punto 2.1 e sapendo che f_5 è dato con errore $0.5 \cdot 10^{-5}$, valutare l'effetto dell'errore di propagazione su $p(1.95)$.

Soluzione

2.1) Sia $p_n(x)$ il polinomio di grado n che interpola i dati in $n+1$ nodi. L'errore di troncamento in un punto x dell'intervallo di interpolazione è dato da

$$E_n(x) = \pi_n(x)\frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}, \qquad \tau \in (x_0, x_n),$$

dove $\frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} \approx f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}]$.

Poichè la tabella data contiene 6 nodi, per poter stimare l'errore di troncamento usando i valori in tabella, il polinomio interpolatore deve essere al più di grado 4.

Sia $n = 1$. Scegliendo i nodi x_1 e x_2,

$$|E_1(1.95)| = |(1.95-x_1)(1.95-x_2)||f[x_0, x_1, x_2]| = 0.05^2 \cdot 0.047750 =$$

$$= 1.19 \cdot 10^{-4} > 0.5 \cdot 10^{-5}.$$

Come nodo aggiuntivo è stato scelto x_0 in quanto $f[x_0, x_1, x_2]$ è già calcolato nella tabella data. In alternativa, volendo scegliere come ulteriore nodo x_3, è necessario prima completare alcune parti della tabella delle differenze divise.

Sia $n = 2$. Scegliendo i nodi x_0, x_1 e x_2,

$$|E_2(1.95)| = |(1.95 - x_0)(1.95 - x_1)(1.95 - x_2)||f[x_0, x_1, x_2, x_3]| =$$

$$0.15 \cdot 0.05^2 \cdot 0.011667 = 4.37 \cdot 10^{-6} < 0.5 \cdot 10^{-5}.$$

Anche in questo caso $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ è dato in tabella.

Quindi il polinomio cercato è

$$p_2(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

da cui

$$p_2(1.95) = 1.341641 + 0.15 \cdot 0.367640 + 0.15 \cdot 0.05 \cdot (-0.047750) = 1.396428.$$

2.2) Il polinomio p_2 non dipende dal valore della funzione nel nodo x_5, quindi l'errore su f_5 non si propaga sul valore di $p_2(1.95)$.

ESERCIZIO 3

Si consideri il polinomio di secondo grado che interpola una funzione $f(x) \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ nei nodi simmetrici $x_0 = -a$, $x_1 = 0$, $x_2 = a$.

3.1) Dare una maggiorazione in modulo dell'errore di troncamento valida per ogni punto $-1 \leq x \leq 1$ nel caso in cui $f(x) = \sin(x)$ e l'intervallo di interpolazione sia $I = [-1, 1]$;

3.2) dare una maggiorazione in modulo dell'errore di propagazione valida per ogni punto $-1 \leq x \leq 1$ nel caso in cui i valori di f siano dati con 5 decimali esatti.

ESERCIZIO 4

Si vuole costruire la retta di regressione relativa ai dati in tabella

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	-1.5	$-\xi$	-0.8	0.0	0.2	ξ	1.4
y_i	1.1	0.8	0.4	0.1	0.0	1.0	1.6

dove $0.5 \leq \xi \leq 1.0$,

4.1) studiare il numero di condizionamento della matrice dei coefficienti del sistema delle equazioni normali in funzione del parametro ξ e stabilire per quali valori di ξ si ha il condizionamento migliore;

4.2) per il valore minimo di ξ individuato al punto precedente, scrivere l'equazione della retta di regressione.

Traccia della Soluzione

La matrice dei coefficienti del sistema delle equazioni normali è

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -0.7 \\ -0.7 & 2\xi^2 + 4.89 \end{pmatrix}$$

la sua matrice inversa è

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{7(2\xi^2 + 4.89) - 0.49} \begin{pmatrix} 2\xi^2 + 4.89 & 0.7 \\ 0.7 & 7 \end{pmatrix}$$

Poichè $\mathbf{H}$ è simmetrica e definita positiva si ha

$$K_1(H) = K_\infty(H) \qquad K_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Studiando il condizionamento rispetto alla norma infinito, si ha una funzione dipendente da ξ. Si può verificare che il minimo di $K_\infty(H)$

è in corrispondenza di $\xi = 1$ da cui è possibile determinare la retta di regressione risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 7 & -0.7 \\ -0.7 & 2\xi^2 + 4.89 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0.47 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 5

Si consideri la seguente tabella relativa alla funzione $f(x) = \int_0^x g(t)dt$, con $f, g \in C^\infty(\mathbf{R})$

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.125	0.25	0.375	0.5
f_i	0	0.1218	0.2251	0.2941	0.3183

5.1 approssimare $\int_0^{\frac{1}{6}} g(t)dt$ usando l'espressione del polinomio interpolatore di Newton di terzo grado della funzione f nell'intervallo $[0, 0.375]$;

5.2 dare una stima dell'errore di troncamento.

Soluzione

La tavola alle differenza divise della funzione $f(x)$ è

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_h]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_h, x_l]$
0	0	0				
1	0.125	0.1218	0.9744			
2	0.25	0.2251	0.8264	-0.5920		
3	0.375	0.2941	0.5520	-1.0976	-1.3483	
4	0.5	0.3183	0.1936	-1.4336	-0.8960	0.9045

Scegliendo i nodi x_0, x_1, x_2, x_3, il polinomio di Newton di terzo grado $p_3(x)$ che approssima la funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0, 0.375]$ è

$$p_3(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] +$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] =$$

$$= 0.9744x - 0.5920x(x - 1/8) - 1.3483x(x - 1/8)(x - 1/4)$$

il cui valore nel punto $x = 1/6$ da un'approssimazione dell'integrale $\int_0^{1/6} g(t)dt$, cioè $p_3(1/6) = 0.1591$.

Una stima dell'errore di troncamento che si commette approssimando $f(1/6)$ con $p_3(1/6)$ è data da

$$E(1/6) \approx \pi_4(1/6) f[x_0, x_1, \ldots, x_4],$$

dove π_4 è il polinomio nodale relativo ai 4 nodi x_0, x_1, x_2, x_3 e $f[x_0, \ldots, x_4]$ è il primo termine omesso della tavola alle differenze divise. Quindi, $E(1/6) \approx 0.11 \cdot 10^{-3}$.

ESERCIZIO 6

6.1 Illustrare dettagliatamente le tipologie di errore tipiche dell' approssimazione di dati e funzioni, con particolare riferimento all'errore di troncamento dell'interpolazione polinomiale.

6.2 Si consideri la funzione $f \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ così definita: $f(x) = 3x^3 - 0.5x^2 + 0.25x - 0.001$.

$\forall\ x \in \mathbf{R}$, scegliere opportunamente nodi equidistanti nell'intervallo $[x - \delta, x + \delta]$, con $\delta \in \mathbf{R}^+$, affinchè la parabola costruita su di essi produca una stima di $f(x - \frac{\delta}{2})$ con tre decimali esatti. Si trascurino gli errori di arrontondamento.

ESERCIZIO 7

7.1) Illustrare dettagliatamente l'interpolazione polinomiale e l'approssimazione polinomiale ai minimi quadrati evidenziandone similitudini e differenze. Per almeno un caso, dimostrare esistenza e unicità del polinomio.

7.2) Assegnati i valori della funzione $f(x) = \frac{1}{x+1}$ nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 1$, confrontare l'errore commesso approssimando il valore di f nel punto $\bar{x} = 0.6$ usando il polinomio $p(x)$ che interpola la funzione nei nodi assegnati e la parabola $q(x)$ che meglio approssima la funzione nei punti assegnati nel senso dei minimi quadrati.

ESERCIZIO 8

La seguente tabella riporta i valori esatti della funzione $f(x) \in C^{\infty}([-1, 2.5])$ in corrispondenza dei punti $x_0, x_1, \ldots, x_4 \in [1, 2.5]$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.5	0.25	0.5	1.5	2.5
$f(x_i)$	-0.750	-0.375	-0. 250	0.250	0.750

8.1 Indicato con $p(x)$ il polinomio che interpola $f(x)$ nei nodi in tabella, dare una stima dell'errore che si commette approssimando $f(0)$ con $p(0)$.

8.2 Indicato con $p_1(x)$ il polinomio che interpola $f(x)$ nei nodi x_0 e x_1, confrontare l'errore stimato al punto precedente con l'errore che si commette approssimando $f(0)$ con $p_1(0)$.

8.3 Dare una stima dell' errore che si commette approssimando $f(0)$ con $p_1(0)$ quando si costruisce $p_1(x)$ usando i valori perturbati di $f(x)$ riportati nella tabella seguente

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.5	0.25	0.5	1.5	2.5
fi	-0.705	-0.353	-0. 255	0.233	0.761