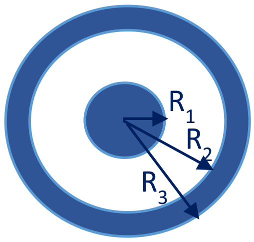
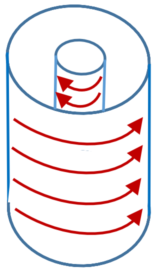
UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2019-2020 – Ing. Aerospaziale - Prova scritta del 6 maggio 2020

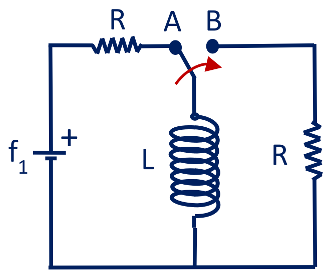
1) Una carica Q è distribuita su un conduttore sferico di raggio R_1. All'esterno, a distanza R_2 è posizionato un guscio sferico concentrico di materiale conduttore neutro, di spessore $\Delta = R_3 - R_2$ (come in figura). Lo spazio tra i due conduttori è riempito con un dielettrico lineare omogeneo con costante dielettrica ε_r nota.
a) Ricavare l'espressione del campo elettrico $E_r(r)$ in tutto lo spazio.
b) Disegnare il grafico di $E_r(r)$.
c) Ricavare la densità di carica di polarizzazione del dielettrico a $r = R_2$.



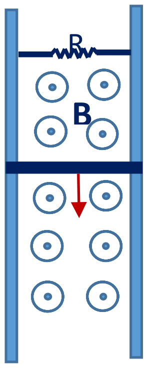
2) Su due superfici cilindriche coassiali di raggi R_1 e R_2 scorre una densità di corrente J (A/m) di pari ampiezza e di verso opposto. Assumiamo che le due superfici siano di lunghezza infinita e abbiano uno spessore trascurabile. Ricavare
a) Il campo di induzione magnetica in tutto lo spazio;
b) L'energia immagazzinata nel campo **B**, per unità di lunghezza



3) Sia dato il circuito rappresentato in figura inizialmente a regime, assumiamo noti i valori di f_1, R e L. All'istante t=0 l'interruttore in A si sposta dal morsetto A al morsetto B. Dopo un transitorio il sistema giunge a regime con una costante di tempo τ. Ricavare:
a) l'energia immagazzinata nell'induttore per t<0.
b) l'espressione della corrente nell'induttore per t>0.
c) l'energia dissipata nella resistenza durante il transitorio.



4) Una sbarretta metallica (conduttrice) di lunghezza l e massa m soggetta alla forza peso scivola senza attrito su due binari verticali. I binari, buoni conduttori, sono collegati tra loro mediante una resistenza R. La barretta, i binari e la resistenza formano un circuito immerso in un campo magnetico B uniforme perpendicolare al piano dei binari. La sbarretta, lasciata libera di muoversi, scivola sui binari mantenendo con essi il contatto elettrico e raggiunge una velocità massima. Determinare l'espressione della velocità massima in funzione dei parametri fisici del problema.



Per tutti gli esercizi si richiede l'analisi dimensionale del risultato

SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 14.02.2020

ESERCIZIO N.1

a) Consideriamo 4 regioni:

I) Nel conduttore $r < R_1$ il campo elettrico è nullo

II) Nel dielettrico $R_1 < r < R_2$ applichiamo il teorema di gauss al vettore D, otteniamo

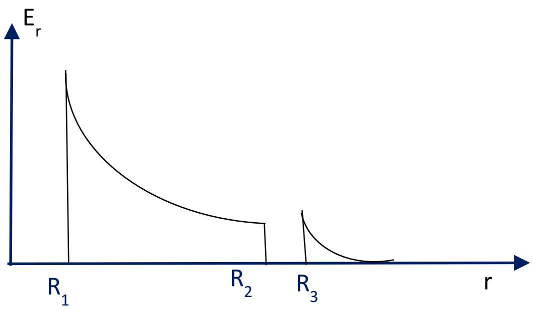
$$E_r = \frac{E_{0r}}{\varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

III) Nel conduttore $R_2 < r < R_3$ il campo è nullo

IV) Nel vuoto $r > R_3$. Applicando di nuovo il teorema di Gauss su una superficie sferica di raggio $r > R_2$, otteniamo

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

b)



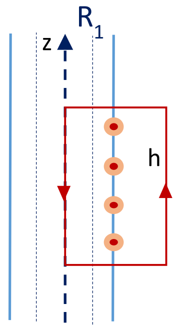
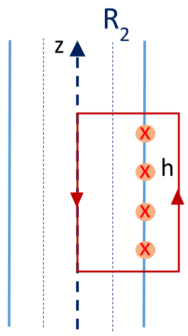
c)

$$\sigma_p = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_r(R_2) = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

ESERCIZIO N.2

a) Data la simmetria cilindrica abbiamo solo la componente B_z parallela all'asse dei cilindri. Il sistema può essere visto come due solenoidi infiniti coassiali, e il campo totale è la sovrapposizione dei due campi di induzione magnetica $B_z = B_{1z} + B_{2z}$. Inoltre essendo i cilindri infiniti il campo prodotto dai due cilindri è costante all'interno del cilindro e nullo all'esterno. Per ricavare i campi B_{1z} e B_{2z} utilizziamo la legge di circuitazione di Ampère:

Sulla superficie del cilindro interno la corrente scorre in verso orario, la componente del campo è negativa, mentre sul cilindro esterno il verso della corrente è antiorario, la componente del campo è positiva.

	$\oint B_{1z}\, dl = \mu_0 I^{conc}$ $I^{conc} = Jh$ $-B_{1z}h = \mu_0 Jh$ $\begin{cases} r < R_1 , B_{1z} = -\mu_0 J \\ r > R_1 , \quad B_{1z} = 0 \end{cases}$
	$\oint B_{2z}\, dl = \mu_0 I^{conc}$ $I^{conc} = -Jh$ $-B_{1z}h = -\mu_0 Jh$ $\begin{cases} r < R_2 , B_{2z} = \mu_0 J \\ r > R_2 , \quad B_{2z} = 0 \end{cases}$

I) r < R_1
$B_z = B_{1z} + B_{2z} = 0$

II) $R_1 < r < R_2$
$B_z = B_{1z} + B_{2z} = \mu_0 J$

III) $r > R_3$
$B_z = B_{1z} + B_{2z} = 0$

b) Energia magnetica immagazzinata in un tratto di lunghezza L:

$$w_m = \frac{B_z^2}{2\mu_0}$$

Energia magnetica in un tratto di lunghezza L:

$$U_m = \int \frac{B_z^2}{2\mu_0} d\tau$$
$$U_m = \frac{(\mu_0 J)^2}{2\mu_0} \pi (R_2^2 - R_1^2) L$$

Energia magnetica per unità di lunghezza:

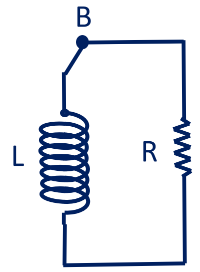
$$\frac{U_m}{L} = \frac{\mu_0 J^2}{2}\pi(R_2^2 - R_1^2)$$

ESERCIZIO N.3

a) t<0

$$I_0 = \frac{f}{R}$$
$$U_L = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{f}{R}\right)^2$$

b) t > 0 transitorio circuito RL



$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$\tau = \frac{L}{R}$$

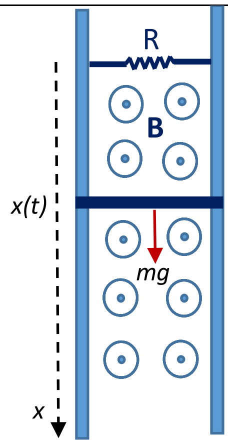
c)

Verifica:

$$U_R = U_L$$
$$U_R = \int_0^\infty RI^2\,dt$$
$$U_R = RI_0^2\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}}\,dt$$
$$U_R = \frac{1}{2}LI_0^2$$

ESERCIZIO N.4

a) In un dato istante di tempo la sbarretta si muove con una velocità $v(t)$, si osserva una variazione di flusso del campo B che genera una forza elettromotrice:

	$$\Phi = B\,S(t)$$ $$S(t) = l\,x(t)$$ $$f_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv(t)$$ nel circuito scorre una corrente oraria pari a $$I(t) = \frac{f_{em}}{R} = -\frac{Blv(t)}{R}$$

La sbarretta percorsa da corrente immersa nel campo B sarà soggetta a una forza magnetica data da:

$$d\vec{F}_M = \mathrm{I}\,\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

che risulterà frenante e, integrata sulla sbarretta, sarà pari a:

$$F_M = -I(t)lB = -\frac{v(t)B^2l^2}{R}$$

Per studiare il moto della sbarretta applichiamo il II principio della dinamica:

$$mg - \frac{v(t)B^2l^2}{R} = m\frac{dv(t)}{dt}$$

la velocità massima della sbarretta si ottiene ponendo la derivata della velocità pari a zero:

$$v^{max} = \frac{mgR}{B^2l^2}$$