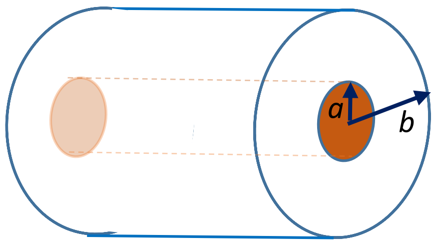
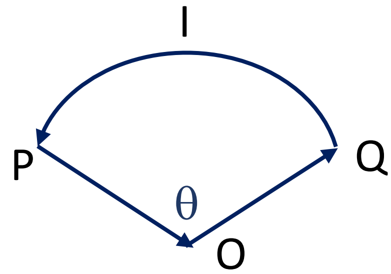
UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2019-2020 – Ing. Aerospaziale - Prova scritta del 16 giugno 2020

1) Un lungo conduttore cilindrico di raggio *a* è inglobato in un guscio dielettrico cilindrico (coassiale) di raggio esterno *b* e costante dielettrica ε_r. Il conduttore è staticamente carico con una densità di carica superficiale positiva σ.
Si ricavi:
- l'espressione della densità superficiale della carica di polarizzazione sulle superfici del dielettrico
- il grafico del campo elettrico nella regione $0 < r < b$
- l'espressione della differenza di potenziale tra un punto sull'asse del cilindro e la superficie esterna del dielettrico.

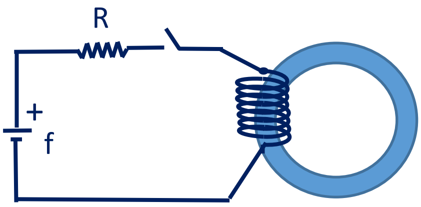


2) Nel circuito mostrato in figura, costituito da due raggi di lunghezza R e dall'arco di cerchio PQ che sottende l'angolo al centro θ, scorre una corrente stazionaria I. Ricavare l'espressione del modulo del vettore induzione magnetica B nel punto O.

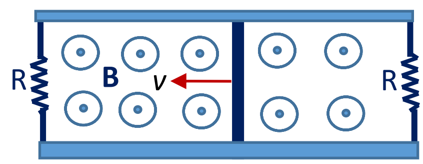


3) Nel circuito riportato in figura il filo è avvolto N volte attorno ad un elemento di materiale ferromagnetico costituito da un toroide di sezione S e raggio medio R_0. L'interruttore è inizialmente aperto quando all'istante t=0 viene chiuso. Sapendo che la permeabilità magnetica relativa del materiale ferromagnetico è $\mu_r >> 1$, ricavare:

- il coefficiente di autoinduzione della bobina con toroide.
- l'andamento temporale della corrente per t>0



4) Un lungo circuito rettangolare di lato *L*, costituito da due resistenze uguali R, è completamente immerso in un campo magnetico uniforme *B* perpendicolare al piano contenente il circuito e con verso uscente. Una piccola sbarretta metallica di lunghezza *L* e resistenza elettrica, anch'essa pari a *R*, in contatto elettrico con il circuito, si muove senza attrito con velocità costante *v* (vedi figura) sotto l'azione di una forza esterna. Ricavare l'espressione:
- della forza esterna
- della potenza dissipata nel circuito e della potenza fornita dalla forza esterna.



Per tutti gli esercizi si richiede l'analisi dimensionale del risultato

SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 16.06.2020

ESERCIZIO N.1

a) Consideriamo 2 regioni:

I) Nel conduttore $r < a$ il campo elettrico è nullo

II) Nel dielettrico $a < r < b$ applichiamo il teorema di Gauss al vettore $\vec{D}$

$$\int_S \vec{D} \cdot \vec{n}\, dS = Q^{int}$$

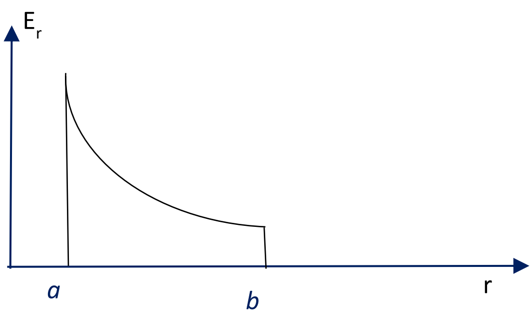
$$D_r\, 2\pi r L = \sigma\, 2\pi a L$$

$$E_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{a}{r}$$

$$\sigma_p(a) = -\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\sigma$$

$$\sigma_p(b) = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\frac{a}{b} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{a}{b}\sigma$$

b)



c) Sia A un punto sull'asse e B un punto sulla superficie esterna del dielettrico si ha:

$$V_A - V_B = \int_0^b \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{a}{r} dr = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\, ln\frac{b}{a}$$

ESERCIZIO N.2

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

Tratti OP e OQ, risulta $d\vec{l}$ parallelo a $\Delta\vec{r}$ pertanto $d\vec{B} = 0$

Tratto PQ $d\vec{l}$ è perpendicolare a $\Delta\vec{r}$, e risulta $|\Delta\vec{r}| = R$, pertanto:

$$B(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_P^Q \frac{dl}{R^2}$$

$$B(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R\theta}{R^2}$$

$$B(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\theta}{R}$$

<u>ESERCIZIO N.3</u>

a) All'interno dell'avvolgimento è presente un flusso di indizione magnetica concatenato che in accordo alla legge di Hopkinson è:

$$\Phi(\vec{B}) = \frac{NI}{\mathcal{R}}$$

dove la riluttanza $\mathcal{R}$ è data da:

$$\mathcal{R} = \frac{2\pi R_0}{\mu_0 \mu_r S}$$

L'avvolgimento è quindi caratterizzato da un coefficiente di autoinduzione

$$L = \frac{N\Phi(\vec{B})}{\mathrm{I}} = \frac{\mu_0 \mu_r S N^2}{2\pi R_0}$$

b) Alla chiusura dell'interruttore osserviamo un transitorio che parte da una corrente iniziale nulla:

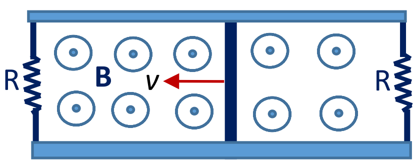
$$I(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

con

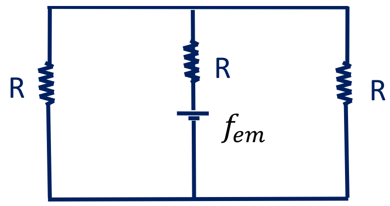
$$\tau = \frac{L}{R}$$

<u>ESERCIZIO N.4</u>

a) In un dato istante di tempo la sbarretta si muove con una velocità $v(t)$, si osserva una variazione di flusso del campo B che genera una forza elettromotrice:



$$\Phi = B\,S(t)$$
$$S(t) = l\,x(t)$$
$$f_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv$$



nella sbarretta scorre una corrente pari a

$$I = \frac{f_{em}}{R_{tot}} = -\frac{Blv}{R_{tot}}$$

$$R_{tot} = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$$

La sbarretta percorsa da corrente immersa nel campo B sarà soggetta a una forza magnetica data da:

$$d\vec{F}_M = \mathrm{I}\ \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

che risulterà frenante: Integrando sulla lunghezza della sbarretta, sarà pari a:

$$F_M = -I(t)lB = -\frac{vB^2l^2}{R_{tot}}$$

Per mantenere la sbarretta a velocità costante occorre applicare una forza esterna uguale e contraria.

$$F_{ext} = -F_M = \frac{vB^2l^2}{R_{tot}}$$

La potenza dissipata nel circuito è pari a:

$$W_{diss} = RI^2 + 2R\left(\frac{I}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}RI^2 = R_{tot}I^2 = R_{tot}\left(\frac{Blv}{R_{tot}}\right)^2 = \frac{B^2l^2v^2}{R_{tot}}$$

Notiamo che tale potenza è pari alla potenza erogata dal generatore equivalente:

$$W_{gen} = f_{em}I = R_{tot}I^2$$

La potenza fornita dalla forza esterna è data da

$$W_{ext} = F_{ext}v = \frac{B^2l^2v^2}{R_{tot}}$$