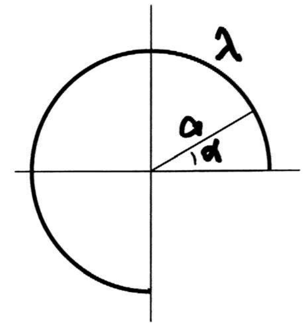
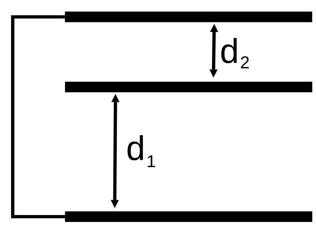
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Ingegneria Elettrotecnica

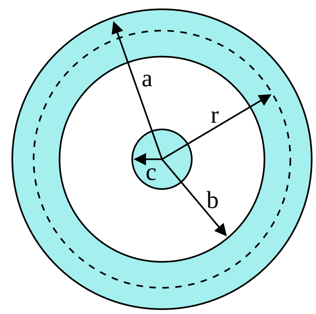
Prova scritta di Fisica 2 - 14 Gennaio 2013



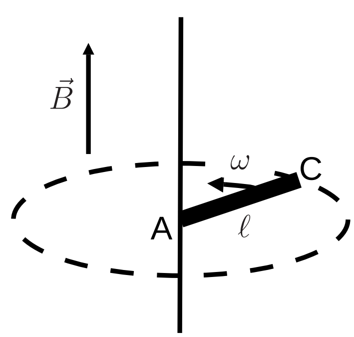
Esercizio 1 (8 punti)
Una carica statica nel vuoto distribuita su un arco di circonferenza di raggio a con densità lineare $\lambda = \lambda_0 \sin\alpha$ dove $0 < \alpha < 3\pi/2$. Calcolare il potenziale V e la componente E_z del campo elettrico lungo l'asse della circonferenza.



Esercizio 2 (8 punti)
Tre lamine conduttrici identiche di superficie S=1m^2 sono disposte in aria come in figura (d_1 = 7cm, d_2 = 3cm); le due lamine esterne sono collegate con un filo conduttore. Una carica Q pari ad 1 nC viene depositata sulla lamina centrale. Calcolare le densità superficiali di carica σ_1 e σ_2 sulle due facce della lamina centrale.



Esercizio 3 (8 punti)
Si consideri un cavo coassiale di raggi a, b e c. In ciascuno dei due conduttori scorre una corrente I distribuita in maniera uniforme, in versi opposti. Si determini l'espressione del modulo del campo magnetico $B(r)$ negli intervalli (1) $r < c$, (2) $c < r < b$, (3) $b < r < a$ e (4) $r > a$.



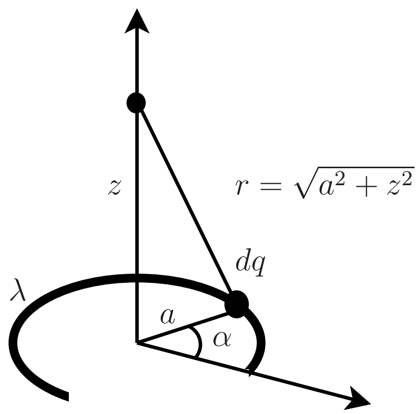
Esercizio 4 (8 punti)
Si consideri una sbarra di metallo di lunghezza ℓ in rotazione con velocità angolare costante ω intorno al suo estremo A nel verso indicato in figura. La sbarra è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme e perpendicolare al piano di rotazione. Calcolare la differenza di potenziale $\Delta V_{AC} = V_A - V_C$ fra i due estremi della sbarra A e C.

Domanda
Enunciare e dimostrare le condizioni di raccordo per il campi $\vec{E}$ e $\vec{D}$ all'interfaccia fra due dielettrici di costanti dielettriche ε_1, ε_2 rispettivamente.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 14 Gennaio 2013

Esercizio 1



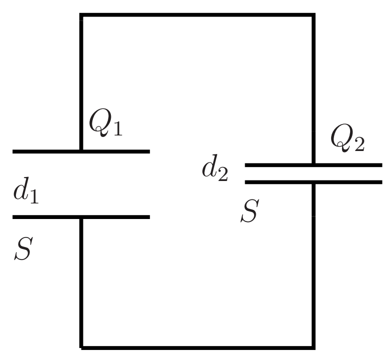
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0\ a\ \sin\alpha\ d\alpha}{r}$$

$$V = \frac{\lambda_0 a}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{3\pi/2}\sin\alpha\ d\alpha = \frac{\lambda_0 a}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda_0 a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) = \frac{\lambda_0\ a\ z}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Esercizio 2

Le tre lamine conduttrici sono equivalenti a due condensatori C_j $(j = 1, 2)$ a facce piane e parallele disposti come in figura; su ciascun condensatore è disposta una carica Q_j $(Q_1 + Q_2 = Q)$.



$$C_j = \varepsilon_0\frac{S}{d_j}, \quad Q_j = \frac{C_j}{C_1+C_2}Q \Rightarrow \sigma_j = \frac{C_j}{C_1+C_2}\frac{Q}{S}.$$

$$\sigma_1 = \frac{d_2}{d_1+d_2}\frac{Q}{S} = 3\,10^{-10}C/m^2 \quad \sigma_2 = \frac{d_1}{d_1+d_2}\frac{Q}{S} = 7\,10^{-10}C/m^2.$$

Esercizio 3

Dal teorema di Ampere applicato ad una circonferenza ℓ di raggio r e corrente concatenata I_{conc}:

$$\oint_\ell \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{conc} \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_{conc}(r)$$

- $r < c$

$$I \text{ uniforme} \quad \Rightarrow \quad I = J\pi c^2, \ J = \frac{I}{\pi c^2}, \ I_{conc}(r) = J\pi r^2 = I\frac{r^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi c^2} r$$

- $c < r < b$

$$I_{conc}(r) = I \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- $b < r < a$
  Nel conduttore esterno la corrente è uniforme e quindi $I = J^{ext}\pi\left(a^2 - b^2\right)$

$$I_{conc}(r) = I - J^{ext}\pi\left(r^2 - b^2\right) = I\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2} \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}$$

- $r > a$

$$I_{conc}(r) = I - I = 0 \quad \Rightarrow \quad B(r) = 0$$

Esercizio 4

Le cariche mobili nella sbarra di metallo a distanza r dall'estremo A viaggiano con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico $\vec{B}$ ($\vec{v} \perp \vec{B}$); tali cariche sono sottoposte ad una forza Lorentz ($\hat{r}$ versore radiale uscente da A ed $\vec{\omega}$ è parallelo a $\vec{B}$):

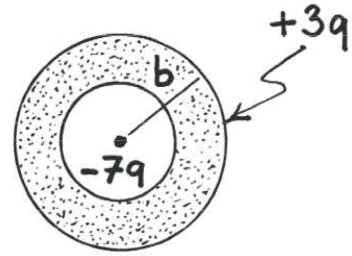
$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = q\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\vec{B} = q\omega r B\hat{r} \quad \text{con} \quad 0 \leq r \leq \ell.$$

All'equilibrio nel metallo si crea un campo elettrico $\vec{E}_S$ tale che $\vec{E}_S = -\vec{F}_L/q$ in ogni punto della sbarra.

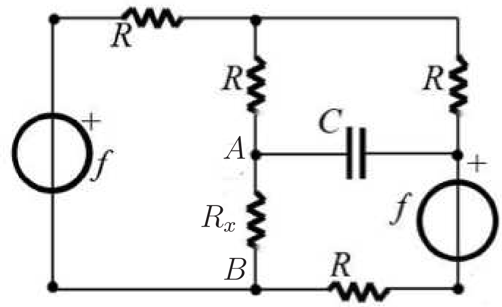
$$\Delta V_{AC} = V_A - V_C = -\int_C^A \vec{E}_S \cdot d\vec{\ell} = \int_\ell^0 \omega r B dr = -\frac{\omega B\ell^2}{2}$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

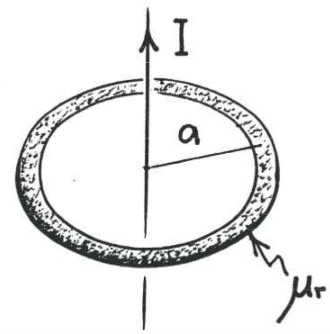
Prova scritta di Fisica 2 - 8 Febbraio 2013



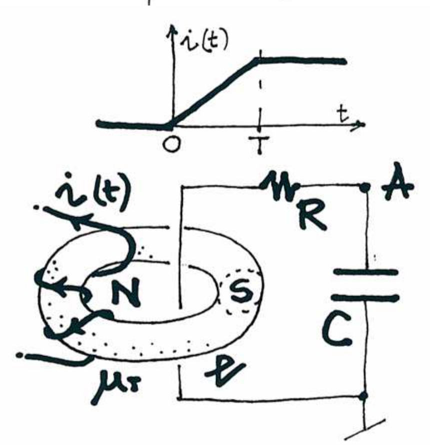
Esercizio 1 (8 punti)
Una carica puntiforme $-7q$ è posta al centro di un guscio sferico conduttore immerso nel vuoto, di raggio esterno b e dotato di una carica $+3q$. Si calcolino rispettivamente le espressioni della componente radiale del campo elettrostatico presente nello spazio esterno al guscio (a distanza r dal centro) e del potenziale V_g del guscio stesso, ponendo $V(\infty) = 0$.



Esercizio 2 (8 punti)
Il circuito è a regime. Calcolare per quale valore di R_x è massima la potenza dissipata sulla resistenza R_x stessa (R=30kΩ).



Esercizio 3 (8 punti)
Un lungo filo rettilineo, percorso da una corrente stazionaria $I = 10A$, è disposto sull'asse di un sottile anello materiale di permeabilità magnetica $\mu_r = 3$ e raggio medio $a = 10$cm. Si calcoli il modulo della corrente superficiale di magnetizzazione $\vec{J}_m^S$ e se ne indichi la direzione ed il verso.



Esercizio 4 (8 punti)
Un nucleo di ferrite con permeabilità costante $\mu_r \gg 1$, di sezione d'area S e lunghezza $\ell \ll \sqrt{S}$, è concatenato con un circuito di resistenza R ove è inserito un condensatore C. Sul nucleo sono avvolte N spire percorse da una corrente che nell'intervallo temporale $0-T$ passa dal valore nullo ad uno costante con andamento lineare $i(t) = kt$. Si calcoli l'espressione del potenziale $V(t)$ nel punto A, per $0 < t < T$, in situazione quasi stazionaria, tenendo conto del segno a partire dal verso indicato da $i(t)$. Si disegni l'andamento qualitativo di $V(t)$, anche per $t > T$, assumento $RC \approx T$.

Domanda
Definire la densità di corrente $\vec{J}$, esplicitare la sua dipendenza dalla velocità di drift $\vec{v}_D$ delle cariche mobili e ricavare l'equazione di continuità.

Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
Ingegneria Elettrotecnica

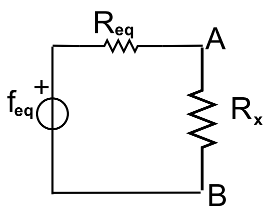
Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 8 Febbraio 2013

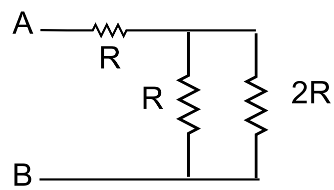
Esercizio 1

$$\text{Gauss: } 4\pi r^2 E_r = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{-7q+3q}{\varepsilon_0} = \frac{-4q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E_r = \frac{-q}{\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

$$V_g = \int_b^{\infty} E_r dr = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_b^{\infty} = -\frac{q}{\pi\varepsilon_0 b}.$$

Esercizio 2





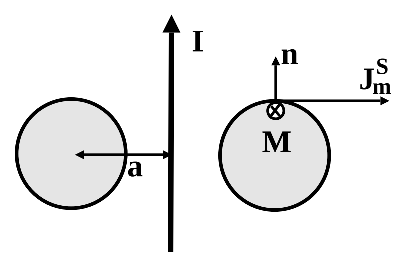
Essendo il circuito in condizioni stazionarie il condensatore può essere sostituito da un circuito aperto. Il circuito è equivalente ad un circuito ad una maglia, con R_{eq}, f_{eq} calcolate secondo il teorema di Thevenin. La massima potenza su R_x si ha quando

$$R_x = R_{eq} = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R = 50\text{k}\Omega.$$

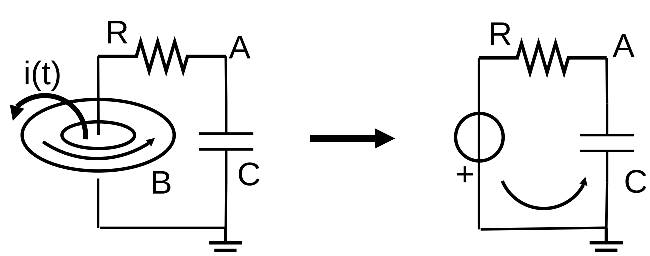
Esercizio 3

$$\text{Ampere:} \quad 2\pi a H = I \quad \rightarrow \quad H = \frac{I}{2\pi a}$$

$$\vec{J}_m^S = \vec{M}\times\hat{n} \quad J_m^S = M = \chi_m H = (\mu_r - 1)\frac{I}{2\pi a} = 2\frac{10}{2\pi 10^{-1}} \simeq 30\text{A/m}$$

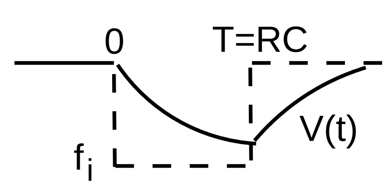


Esercizio 4



$$NI = \frac{\ell}{\mu S}\Phi \longrightarrow \Phi = \frac{\mu N I S}{\ell} \qquad f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu N k t S}{\ell}\right) = -\frac{\mu N k S}{\ell}$$

$$V(t) = -\frac{\mu N k S}{\ell}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

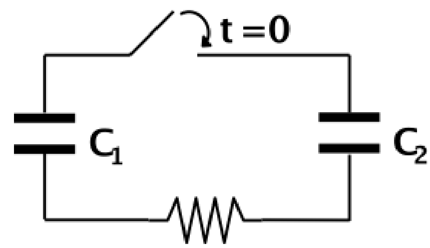


Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

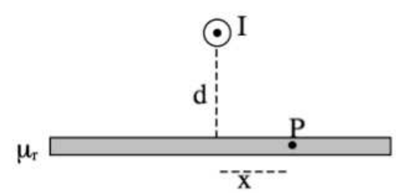
Prova scritta di Fisica 2 - 29 Aprile 2013

Esercizio 1 (8 punti)
Una carica elettrostatica nel vuoto è distribuita all'interno di un guscio sferico di raggio interno $\boldsymbol{a}$ ed esterno $\boldsymbol{b}$, con densità di volume $\rho = kr$. Calcolare il campo elettrostatico in tutto lo spazio.

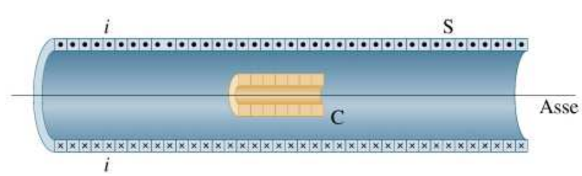
Esercizio 2 (8 punti)
Il condensatore C_1 rappresentato in figura è inizialmente carico alla tensione V_0 mentre C_2 è scarico. Al tempo t = 0 l'interruttore viene chiuso. Calcolare l'energia totale dissipata nella resistenza fino al raggiungimento della nuova situazione di equilibrio.



Esercizio 3 (8 punti)
Un lungo filo rettilineo, percorso dalla corrente stazionaria $\boldsymbol{I}$, è a distanza $\boldsymbol{d}$ da un foglio sottile, molto esteso, di un materiale omogeneo isotropo con permeabilità μ_r. Calcolare l'espressione del modulo del vettore induzione magnetica nel generico punto P. all'interno del materiale, individuato dalla distanza $\boldsymbol{x}$.



Esercizio 4 (8 punti)
Si consideri il solenoide S in figura, composto da n=200 spire/cm e percorso dalla corrente i=2 A. Al centro di S vi sia una bobina C composta da N=300 spire strettamente impacchettate di diametro d_c=2 cm. La corrente del solenoide cresca linearmente da 0 a 2 A in Δt=0.31 s. Calcolare il valore assoluto della f.e.m. indotta nell'avvolgimento interno mentre la corrente del solenoide sta aumentando.

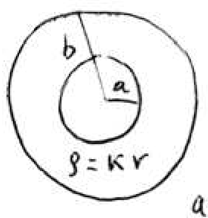


Domanda
Dimostrare il teorema di Coulomb (campo elettrico in prossimità della superficie di un conduttore carico).

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 29 Aprile 2013

Esercizio 1



Gauss: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_{int}(r)}{r^2}\hat{r}$

$r < a \quad \vec{E} = 0$

$a < r < b \quad Q_{int} = \int_a^r k r\, 4\pi r^2 dr = \pi k (r^4 - a^4) \Rightarrow \vec{E} = \frac{k(r^4 - a^4)}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

$r > b \quad Q_{int} = \int_a^b k r\, 4\pi r^2 dr = \pi k (b^4 - a^4) \Rightarrow \vec{E} = \frac{k(b^4 - a^4)}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

Esercizio 2

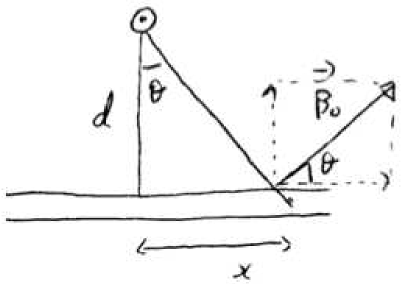
$E_0 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2$ All'equilibrio finale $V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$

con $Q_1 + Q_2 = Q_0 \Rightarrow Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_0 \qquad Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_0$

$$E_f = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2}\frac{C_1^2 V_0^2}{C_1 + C_2}$$

$E_{diss} = E_0 - E_f = \frac{1}{2}\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_0^2$ indipendente da R

Esercizio 3



$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{d^2+x^2}}$$

$$B_{n0} = B_0 \sin\theta = \frac{B_0\, x}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

$$B_{t0} = B_0 \cos\theta = \frac{B_0\, d}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

dentro il materiale

$$B_n = B_{n0} = \frac{B_0\, x}{\sqrt{d^2+x^2}} \qquad B_t = \mu_r B_{t0} = \frac{\mu_r B_0\, d}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

$$B = \sqrt{B_n^2 + B_t^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi (d^2+x^2)} \left(x^2 + \mu_r^2 d^2 \right)^{1/2}$$

Esercizio 4
Considerando il solenoide S come un solenoide infinito, il campo di induzione magnetica sulla bobina C è parallelo all'asse e di modulo costante pari a $B = \mu_0 n\ i$. Il flusso nella bobina vale

$$\Phi = \pi \frac{d_c^2}{4} B = \pi \frac{d_c^2}{4} \mu_0 n\ i.$$

Dalla Legge di Faraday, il modulo della f.e.m. vale:

$$|\text{f.e.m}| = \frac{d\Phi}{dt} = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \mu_0 \pi n\ N \frac{d_c^2}{4}\frac{\Delta i}{\Delta t} = 4\pi 10^{-7} \times \pi \times 200\ 10^2 \times 300 \times \frac{(2\ 10^{-2})^2}{4}\frac{2}{0.31} \approx 15\text{mV}.$$

Universita' degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica: Prova scritta di Fisica 2

10 Giugno 2013

1 Esercizio Uno (Otto punti)

Si consideri uno strato piano infinito, carico, con densita' superficiale di carica σ uniforme. Si segni un'origine su tale piano e si asporti da questo piano una fetta pari ad un disco di raggio R, partendo dall'origine stessa. Si calcoli l'espressione del campo elettrico generato da tale distribuzione di carica in un punto P, sulla perpendicolare al piano passante per il centro del foro (l'origine), a distanza x dal piano e si grafichi tale campo elettrico come funzione di x.
Si discuta il comportamento del campo a grandi distanze (e.g. $x >> R$).

2 Esercizio Due (Otto punti)

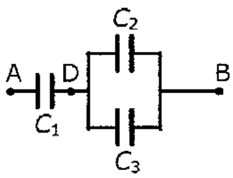
Si consideri il circuto riportato in figura (Fig. Uno, sinistra), di cui sono noti $C_1 = 3\mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$, $C_3 = 2\ \mu F$. Il punto B e' a terra ed il punto A ha potenziale $V_A = 200V$. Si determini la carica su ogni condensatore, il potenziale nel punto D e l'energia elettrostatica posseduta da ciascun condensatore.

3 Esercizio Tre (Otto punti)

Una guida metallica rettangolare di resistenza trascurabile, larga $d = 0.2$ metri e' immersa in un campo di induzione magnetica costante con direzione perpendicolare alla guida e modulo pari a $B = 2$ Tesla. Sulla guida puo' muoversi senza attrito una barretta al cui interno sono collocate -in serie tra loro- una resistenza $R = 1.4K\Omega$ ed un induttanza $L = 250mH$ (vedasi Fig. Uno, destra).
Osserviamo che il contatto elettrico con la guida avviene solo mediante la serie RL.
Si vuole far muovere la barretta (e quindi la serie RL) lungo tale guida, partendo da ferma e portandosi a velocita' costante $v = 3m/s$ mediante l'applicazione di una forza meccanica F avente direzione di applicazione perpendicolare alla barretta e giacente sul piano della guida.
Ricavare l'espressione della forza meccanica F da supplire al circuito affinche' tale moto si osservi.
Graficare l'andamento nel tempo di F, cioe' graficare $F(t)$.

4 Esercizio Quattro (Otto punti)

Un magnete permanente a forma toroidale ha il nucleo magnetizzato di lunghezza l ed il traferro in aria di spessore d. Il valore del vettore induzione magnetica misurato nel traferro e' B. Scrivere l'espressione per l'intensita' di magnetizzazione M nel magnete e graficare la funzione M sia come funzione di d che come funzione di l.



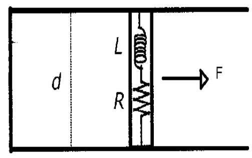


Figure 1: Sinistra: Figura dell'esercizio Due. Destra: Figura dell'esercizio Tre.

5 Domanda di teoria

Discutere le condizioni di raccordo di tutti i campi di interesse in Fisica2 (E, D, B, H) sulla superficie di separazione tra due mezzi.

6 Soluzione dell'esercizio uno

Si puo' procedere innanzitutto applicando il Principio di Sovrapposizione per schematizzare il problema come il calcolo del contributo al campo elettrico $E(x)$ di uno strato piano infinito di densita' di carica $+\sigma$, contributo che chiamiamo $E^+(x)$ ed un disco con densita' di carica $-\sigma$, contributo che chiamiamo $E^-(x)$.
Sappiamo scrivere immediatamente $E^+(x)$:

$$E^+(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \tag{1}$$

Per il calcolo del campo generato dal disco con carica $-\sigma$, da considerazioni di simmetria sappiamo che il campo è normale al disco, ed ha espressione

$$E^-(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right). \tag{2}$$

Per il principio di sovrapposizione si ha

$$E(x) = E^+(x) + E^-(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}, \tag{3}$$

che per $x >> R$ diventa $E(x >> R) \sim \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, come deve poiche' diventa trascurabile il contributo del disco.

7 Soluzione dell'esercizio due

Per calcolare la quantita' di carica su ciascun condensatore troviamo la capacita' totale del circuito. Il parallelo tra C_2 e C_3 vale $C_{23} = C_2 + C_3 = 6\mu F$. C_{23} e' in serie con C_1 e quindi la capacita' totale C_T e' data dall'espressione

$$C_T = \frac{C_1 C_{23}}{C_1 + C_{23}} = 2\mu F. \tag{4}$$

La quantita' totale di carica posseduta dai condensatori risulta quindi essere $Q = C_T V_A = 0.4\mu C$.
Q d'altronde e' anche la carica comune ai condensatori C_1 e C_{23}, da cui si evince che la differenza di potenziale tra A e D risulta essere

$$V_A - V_D = Q/C_1 \sim 133.3V. \tag{5}$$

Di conseguenza la differenza di potenziale ai capi del parallelo tra C_1 e C_2 e' $V_D - V_B = 66.7V$.
Le rimanenti quantita' di carica ancora ignote sono quindi

$$Q(C_2) = C_2(V_D - V_B) \sim 2.6 \cdot 10^{-4}C. \quad Q(C_3) = C_3(V_D - V_B) \sim 1.3 \cdot 10^{-4}C.$$

L'energia elettrostatica immagazzinata da ciascun condensatore risulta essere

$$U(C_1) = \frac{1}{2}C_1(V_A - V_D)^2 \sim 26.6mJ, \tag{6}$$

$$U(C_2) = \frac{1}{2}C_2(V_D - V_B)^2 \sim 8.9mJ, \tag{7}$$

$$U(C_3) = \frac{1}{2}C_3(V_D - V_B)^2 \sim 4.5mJ. \tag{8}$$

8 Soluzione dell'esercizio tre

La f.e.m. V_i *indotta* nel circuito formato da guida piu' serie RL si ricava come variazione nel tempo del flusso di campo di induzione magnetica B non appena la forza esterna F agisce sulla barretta:

$$V_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -dBv. \tag{9}$$

Ovviamente la f.e.m. indotta ha verso tale da generare un campo magnetico il cui flusso si oppone alla variazione del flusso B. A questo punto dobbiamo analizzare il circuito -che e' un normale circuito RL in cui il generatore e' rappresentato dalla f.e.m. stessa (che ha valore costante se la velocita' v e' costante)-. La condizione iniziale e' quindi equivalente alla chiusura di un circuito RL tramite un interruttore.
Sappiamo come descrivere il fenomeno fisico:

$$V_i - L\frac{di}{dt} = Ri, \tag{10}$$

da cui

$$i(t) = \frac{V_i}{R}\left(1 - \exp(-t/\tau)\right), \tag{11}$$

con $\tau = L/R$ e $i(t=0) = 0$.
Dovendo essere costante la velocita' della sbarretta, la forza meccanica F deve avere la stessa direzione e modulo (ma verso opposto) della forza magnetica F_m agente sulla sbarretta e generata a causa della presenza del campo B e della corrente indotta nel circuito. La forza magnetica si puo' scrivere come $F_m = dBi(t)$ cioe'

$$F_m = \frac{d^2B^2v}{R}\left(1 - \exp(-t/\tau)\right). \tag{12}$$

Quindi per avere una velocita' costante della barretta, il modulo della forza meccanica $F(t)$ deve variare con la legge sopra riportata: Una volta che l'interruttore e' stato caricato, cioe' per tempi $t >> \tau$, essa e' semplicemente costante.
Notare che a forza costante sta corrispondendo velocita' costante e che il sistema sia un sistema intrinsecamente termodinamico per la presenza della resistenza nel circuito.

9 Soluzione dell'Esercizio Quattro

Dalla relazione $\overrightarrow{H}_f = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M}$ si ha

$$\overrightarrow{M} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{H}_f = (\mu_r - 1)\overrightarrow{H}_f. \tag{13}$$

Il valore di $\overrightarrow{H}_f$ si ricava dal Teorema di Ampere $\oint \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dl} = H_f l + H_0 d = 0$, da cui

$$H_f = -\frac{d}{l}H_0, \tag{14}$$

dove H_0 indica il valore di H nel traferro. Poiche' $H_0 = B_0/\mu_0$ si ha

$$M = -\frac{(\mu_r - 1)}{\mu_0}\frac{d}{l}B. \tag{15}$$

Al passaggio dal traferro al ferro si ha $B_{n1} = B_{n2}$ e quindi

$$B = B_f = \mu_0\mu_r H_f = \mu_0\mu_r(-\frac{d}{l}H_0) = \mu_0\mu_r(-\frac{d}{l}\frac{B}{\mu_0}), \tag{16}$$

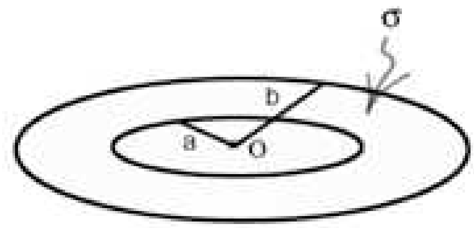
da cui $\mu_r = -l/d$ ed anche $(\mu_r - 1) = -(l+d)/d$, da cui

$$M = \frac{l+d}{d\mu_0}\frac{d}{l}B = \frac{l+d}{l}\frac{B}{\mu_0}. \tag{17}$$

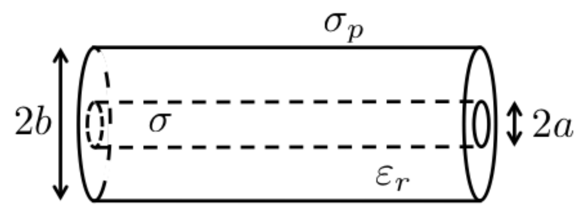
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 19 Luglio 2013

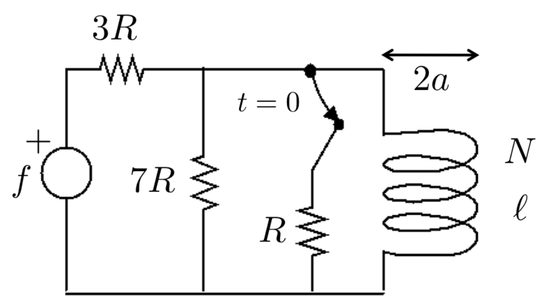
Esercizio 1 (8 punti)
Una carica statica nel vuoto è distribuita su una corona circolare di raggi a e b con densità superficiale $\sigma = k/r$, dove r è la distanza dal centro O, variabile tra a e b. Calcolare l'espressione $V(0)$ del potenziale nel punto O con $V(\infty) = 0$.



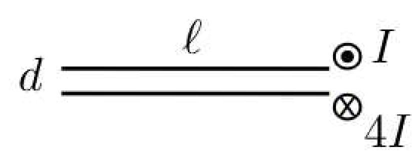
Esercizio 2 (8 punti)
Un lungo conduttore cilindrico di raggio a è inglobato in un guscio dielettrico cilindrico di costante ε_r e raggio esterno b. Il conduttore è staticamente carico con densità superficiale uniforme σ. Si calcoli l'espressione dela densità superficiale della carica di polarizzazione σ_p sulla superficie esterna del dielettrico.



Esercizio 3 (8 punti)
Nel circuito in figura è presente un solenoide ideale di N spire, raggio a, lunghezza ℓ e resistenza dell'avvolgimento trascurabile. L'interruttore si chiude a $t = 0$, quando la situazione stazionaria è già stabilita. Si calcoli l'espressione dell'energia dissipata sulla resistenza R per $t > 0$.



Esercizio 4 (8 punti)
Due lunghi conduttori laminari di larghezza ℓ sono affacciati in aria a distanza $d \ll \ell$ e sono rispettivamente percorsi dalle correnti stazionarie I e $4I$, uniformemente distribuite e con i versi indicati in figura. Si calcoli l'espressione del campo B_{int} e B_{est} appena fuori dalla regione centrale, lontano dai bordi, indicandone direzione e verso.

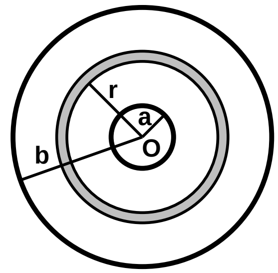


Domanda
Enunciare e dimostrare il teorema di Gauss. Successivamente, ricavare la I equazione di Maxwell.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 19 Luglio 2013

Esercizio 1



$$dV(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{k\ 2\pi r dr}{r^2} = \frac{k}{2\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

$$V(0) = \frac{k}{2\varepsilon_0}\int_a^b d(\ln r) = \frac{k}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Esercizio 2

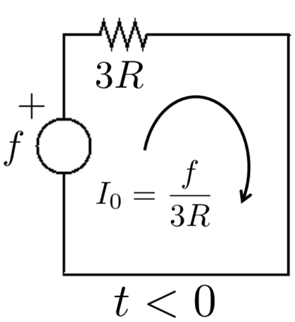
$$\sigma_p = P = \varepsilon_0 \chi E$$

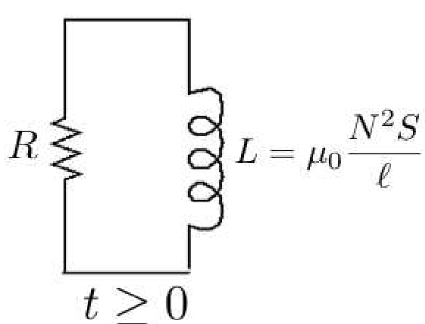
Utilizzando Gauss e la simmetria cilindrica:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 b} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 b}\frac{\sigma 2\pi a h}{h}$$

$$\sigma_p = P = \varepsilon_0\chi E = \frac{(\varepsilon_r - 1)\,\sigma a}{\varepsilon_r b}$$

Esercizio 3





Sia $S = \pi a^2$ la sezione del solenoide di lungehzza ℓ e N avvolgimenti. Per la conservazione dell'energia, l'energia dissipata su R è pari a quella immagazzinata nel solenoide.

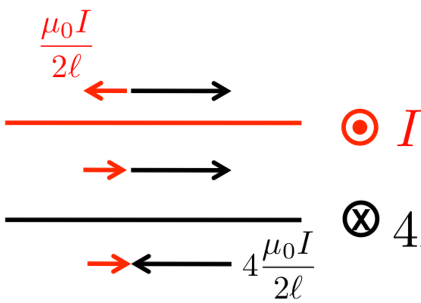
$$U_R = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{\pi}{2}\frac{N^2a^2}{\ell}\frac{f^2}{9R^2}$$

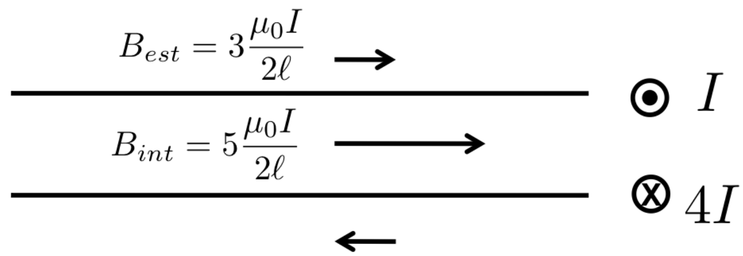
Esercizio 4
Sia J_S la densità di corrente superficiale (A/m). Il campo B per un piano di corrente infinito vale (dal teorema di Ampere)

$$B = \frac{\mu_0 J_S}{2}.$$

Nel caso di lamina di lunghezza infinita e larghezza ℓ e percorsa da corrente I_{lam}, il campo B appena fuori dalla regione centrale, lontano dai bordi può essere approssimato con quello della lamina infinita con

$$J_S = \frac{I_{lam}}{\ell} \longrightarrow B = \frac{\mu_0 I_{lam}}{2\ell}$$



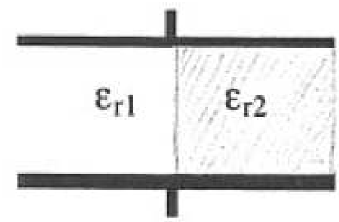


Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

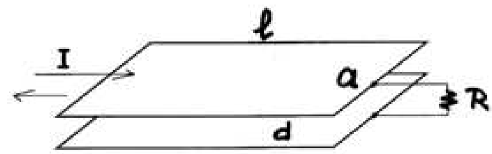
Prova scritta di Fisica 2 - 25 Settembre 2013

Esercizio 1 (8 punti)
Una carica q=20 nC è distribuita uniformemente, nel vuoto, lungo una circonferenza di raggio R=9 cm; al centro O della circonferenza è posta una carica puntiforme Q=-100 nC. Calcolare il lavoro L necessario per portare la carica Q dal punto O al punto P, posto sull'asse della circonferenza a distanza $d=\sqrt{3}R$ da O.

Esercizio 2 (8 punti)
Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto una capacità C_0=10μF. Viene riempito per metà volume con un dielettrico di costante relativa ε_{r1}=1.4 e per l'altra metà con un dielettrico di costante ε_{r2}=1.6. Calcolare il nuovo valore della capacità C ed il rapporto fra le cariche di polarizzazione sui due dielettrici.



Esercizio 3 (8 punti)
Due lamine di rame di larghezza a=10cm, lunghezza $\ell \gg a$ e resistenza trascurabile, sono affacciate fra loro a distanza d=1mm in aria. Ad una estremità esse sono collegate tramite un conduttore di resistenza $R = 400\Omega$. All'altra estremità una corrente stazionaria I entra in una lamina ed esce dall'altra. Calcolare il rapporto tra le energie elettrica U_E e magnetica U_M presenti nel sistema.



Esercizio 4 (8 punti)
Una spira circolare rigida di raggio r=10cm è costituita da un filo di rame (resistività ρ=1.7 10^{-8} Ωm) di sezione S=0.5mm^2 ed è immersa in un campo B=1T, uniforme e normale al piano della spira. Il campo B viene poi rapidamente portato a zero. Calcolare la carica elettrica che fluisce nella spira durante il processo transitorio descritto.

Domanda
Considerare una distribuzione lineare di carica di lunghezza infinita. Ricavare il campo ed il potenziale in ogni punto dello spazio.

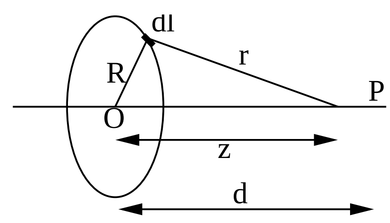
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 25 Settembre 2013

Esercizio 1

Il lavoro che si deve compiere dall'esterno per spostare la carica Q dal punto O al punto P è dato da

$$L = Q\,[V(P) - V(O)]\,,$$



dove V è il potenziale elettrico. Il potenziale generato da una carica puntiforme q a distanza r dalla carica stessa , e assumendo nullo il potenziale all'infinito, è $V(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r$. Nel caso in esame, la distribuzione lineare di carica $\lambda = q/2\pi R$, sull'asse della circonferenza si ha:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{circ}\frac{\lambda dl}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda 2\pi R}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}}.$$

Nei punti P ($z = d = \sqrt{3}R$) e O ($z = 0$), il potenziale è quindi

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{d^2+R^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R} \quad \text{e} \quad V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R},$$

da cui

$$L = Q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{2R} = 9\ 10^9 \times \frac{10^{-7}\times 2\ 10^{-8}}{2\times 9\ 10^{-2}} = 10^{-4}\ \text{J} = 100\ \mu\text{J}.$$

Esercizio 2

Il condensatore può essere considerato costituito da due condensatori in parallelo, con capacità totale

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}(S/2)}{d} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}(S/2)}{d} = \frac{\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}}{2}C_0 = 15\ \text{pF}$$

$\sigma = \vec{P}\cdot\vec{n}$; ... ($\vec{n}$: normale alla sup. del diel.) ; $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$

quindi $\sigma_{1p} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)|\vec{E}_1|$; $\sigma_{2p} = \varepsilon_0(\varepsilon_{r2} - 1)|\vec{E}_2|$; ← perché $\vec{E} /\!/ \vec{n}$

essendo $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$, si ha: $\dfrac{\sigma_{1p}}{\sigma_{2p}} = \dfrac{\varepsilon_{r1}-1}{\varepsilon_{r2}-1} = 0.67$

Esercizio 3

$$U_E = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{a\ell}{d}R^2I^2 \qquad U_M = \frac{1}{2}I\ \Phi = \frac{1}{2}I\ B\ S = \frac{1}{2}I\ \mu_0 J_S\ \ell d = \frac{1}{2}\mu_0\frac{\ell d}{a}I^2$$

$$\frac{U_E}{U_M} = \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}R^2\left(\frac{a}{d}\right)^2 \simeq 10^4$$

Esercizio 4

$$q = \int_0^{\infty} i\, dt = \int_0^{\infty} -\frac{(d\phi/dt)}{R}\, dt = -\frac{1}{R}\int_{\phi_{iniziale}}^{\phi_{finale}} d\phi = \frac{\phi_{iniziale} - \phi_{fin}}{R} = \frac{\phi_{iniziale}}{R}$$

resistenza della spira

$$R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{2\pi r}{S}$$

$$\phi_{iniziale} = B\pi r^2$$

$$\longrightarrow \quad q = \frac{B\pi r^2}{2\rho\pi r}S = \frac{BrS}{2\rho} = 1.47\ \mathrm{C}$$

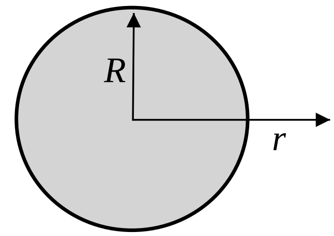
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 6 Novembre 2013

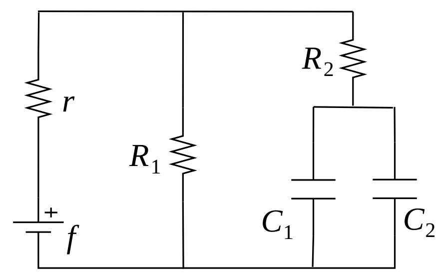
Esercizio 1 (8 punti)

In una sfera di raggio R la carica è distribuita con densità non uniforme che dipende dalla distanza dal centro r secondo l'espressione $\rho(r) = a/r$, dove a è una costante. Calcolare (i) la carica totale presente nella sfera; (ii) l'andamento del campo elettrico in tutto lo spazio $(0 < r < \infty)$ e farne il grafico; (iii) il potenziale in tutto lo spazio $(0 < r < \infty)$ e farne il grafico.



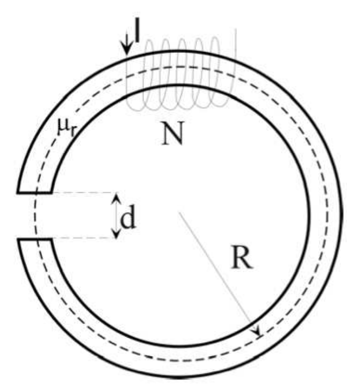
Esercizio 2 (8 punti)

Un generatore di forza elettromotrice f e resistenza interna r è collegato ad un circuito come in figura. Calcolare in condizioni stazionarie la corrente che scorre nel generatore e la potenza che eroga; calcolare la potenza dissipata in R_1 ed R_2 e l'energia elettrostatica immagazzinata in ciascuno dei due condensatori.



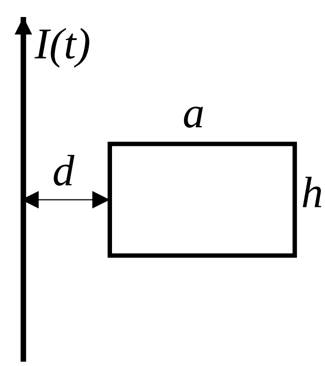
Esercizio 3 (8 punti)

In un toroide di materiale ferromagnetico di raggio medio R=20cm è ricavato un traferro di spessore d=4mm. Intorno al toroide è presente un avvolgimento di N=120 spire di filo conduttore. Sapendo che il materiale ha un campo di saturazione B_S=1.2T e che si comporta in maniera circa lineare con permeabilità relativa μ_r=1200, calcolare il valore di corrente davvolgimento I necessario ad ottenere un campo B nel traferro pari al 75% del campo di saturazione.



Esercizio 4 (8 punti)

La spira rettangolare rappresentata in figura è posta nel piano (x, y) a distanza d da un filo posto lungo l'asse y e percorso da una corrente variabile $I(t) = \alpha\, t$. Ricavare: (a) modulo e verso della corrente che circola nella spira se questa ha resistenza R; (b) modulo, direzione e verso della forza che subisce nel tempo la spira al passaggio della corrente.



Domanda

Dimostrare le leggi di Kirchhoff (leggi dei nodi e delle maglie).

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

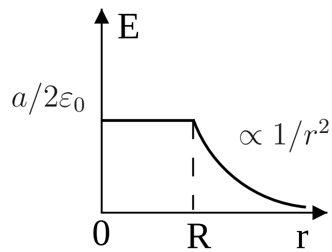
Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 6 Novembre 2013

Esercizio 1
La carica contenuta nella sfera è

$$Q = \int_V \rho dV = \int_0^R \frac{a}{r} 4\pi r^2 dr = 2\pi a R^2.$$

Dalla simmetria sferica $\mathbf{E}(r) = E(r)\hat{r}$. Se $Q_{int}(r)$ è la carica contenuta in una sfera di raggio r, dal teorema di Gauss

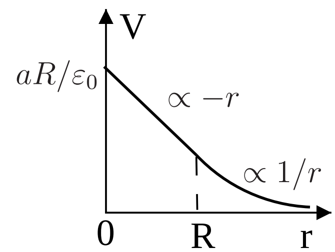
$$E(r) = \frac{Q_{int}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$



$$0 \le r \le R \quad Q_{int}(r) = 2\pi a r^2 \quad \rightarrow \quad E(r) = \frac{a}{2\varepsilon_0}.$$

$$r > R \quad Q_{int}(r) = Q = 2\pi a R^2 \quad \rightarrow \quad E(r) = \frac{a}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}.$$

Assumendo il potenziale nullo all'infinito:



$$V(P) = V(P_0) - \int_{P_0}^{P} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad \rightarrow \quad V(r) = \int_r^\infty E(r')dr'.$$

$$r \ge R \quad V(r) = \frac{aR^2}{2\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = \frac{aR^2}{2\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

$$0 \le r \le R \quad V(r) = \frac{a}{2\varepsilon_0}\int_r^R dr' + \frac{aR^2}{2\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr'}{r'^2} = \frac{a}{2\varepsilon_0}(R-r) + \frac{aR}{2\varepsilon_0} = \frac{a}{2\varepsilon_0}(2R-r).$$

Esercizio 2
In condizioni stazionarie, nel ramo contenente R_2 e nei due condensatori non scorre corrente. La corrente I che scorre nel generatore è

$$I = \frac{f}{R_1 + r}$$

e la potenza W erogata dal generatore è la somma di quella dissipata su R_1 e su r, cioè

$$W = rI^2 + R_1 I^2 = (r + R_1)\, I^2 = f\ I.$$

La potenza dissipata su R_2 è nulla e quella dissipata su R_1 vale W_1=$R_1 I^2$. L'energia immagazinata nella capacità C_j $(j = 1, 2)$ è

$$U_j = \frac{1}{2} C_j V^2 \quad \text{con} \quad V = \frac{R_1}{r + R_1} f.$$

Esercizio 3
Dal teorema di Ampere abbiamo

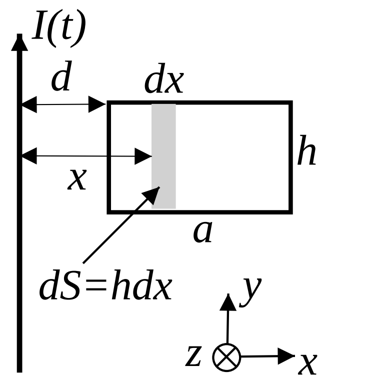
$$(2\pi R - d)\, H_{ferro} + d H_{aria} = NI$$

$$(2\pi R - d)\, \frac{B}{\mu_0 \mu_r} + d \frac{B}{\mu_0} = NI$$

$$I \approx \frac{0.75 B_S}{\mu_0 N} \left(\frac{2\pi R}{\mu_r} + d \right) \approx 30\text{A}$$

Esercizio 4
Il campo di induzione magnetica generato dal filo ad una distanza x vale

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{\boldsymbol{z}}.$$



Dalla legge di Faraday la corrente indotta I_{ind} nella spira è

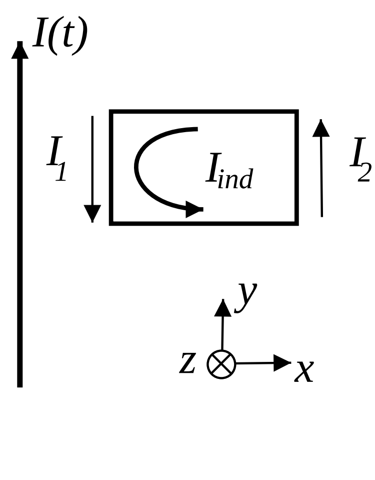
$$I_{ind} = \frac{\text{f.e.m.}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(B)}{dt}.$$

Assumendo la normale alla superficie della spira diretta lungo $\hat{\boldsymbol{z}}$

$$\Phi(B) = \int_{spira} B\, dS = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} h dx = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \left(\frac{d+a}{d} \right) \quad \text{e} \quad |I_{ind}| = \frac{\mu_0 \alpha h}{2\pi R} \ln \left(\frac{d+a}{d} \right);$$

la corrente scorre nella spira in verso antiorario se $\alpha > 0$.

Solo le correnti I_1 e I_2 che scorrono sui lati verticali della spira causano una azione meccanica non nulla; assumendo i versi come in figura, I_1=I_2=$|I_{ind}|$. Dalla seconda legge di Laplace,



$$d\boldsymbol{F}_1 = I_1\, d\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{B}(d) = |I_{ind}|\, \frac{\mu_0 I}{2\pi d} (-\hat{\boldsymbol{y}}) \times \hat{\boldsymbol{z}}\, d\ell = |I_{ind}|\, \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{\boldsymbol{x}}\, d\ell$$

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{\mu_0 I\, |I_{ind}|}{2\pi d} \hat{\boldsymbol{x}} \int_0^h d\ell = \frac{\mu_0 I\, |I_{ind}|\, h}{2\pi d} \hat{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = -I_2 \frac{\mu_0 I}{2\pi (d+a)} \hat{\boldsymbol{x}} \int_0^h d\ell = -\frac{\mu_0 I\, |I_{ind}|\, h}{2\pi (d+a)} \hat{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \frac{\mu_0 I\, |I_{ind}|\, h}{2\pi d} \frac{a}{d+a} \hat{\boldsymbol{x}}$$