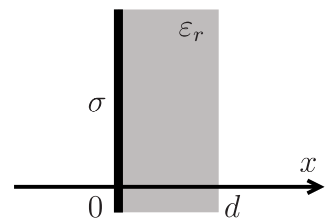
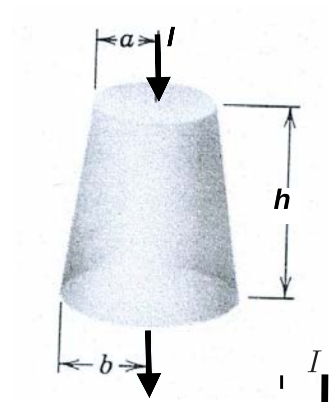
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 17 Gennaio 2014

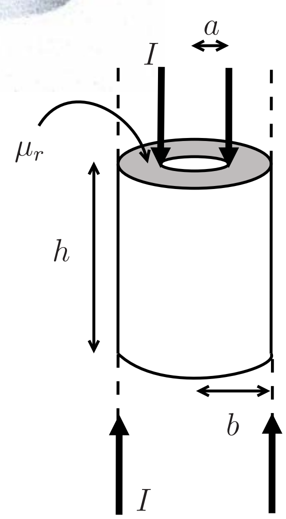
Esercizio 1 (8 punti)
Una lastra piana di dielettrico omogeneo, di costante ε_r, infinitamente estesa nel vuoto e spessa d, su una faccia possiede una distribuzione superficiale uniforme di carica libera, di densità σ. Rispetto al sistema di riferimento indicato, si calcoli l'espressione del potenziale elettrostatico $V(x)$ in tutto lo spazio, assumendo $V(d) = 0$. Si tracci anche un grafico qualitativo di $V(x)$.



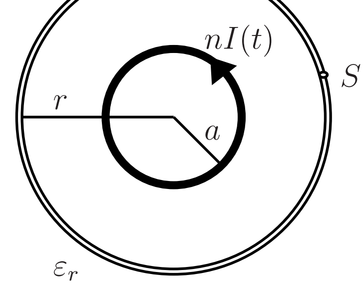
Esercizio 2 (8 punti)
Un conduttore di resistività ρ ha una forma di tronco di cono con basi circolari di raggi, rispettivamente, a e b ed altezza h. Assumendo una densità di corrente uniforme attraverso ogni sezione, calcolare la resistenza di questo conduttore e mostrare che il risultato si riconduce alla resistenza di un conduttore cilindrico quando $a = b$.



Esercizio 3 (8 punti)
Un cavo coassiale lungo è costituito da due conduttori cilindrici concentrici di raggi a e b. Il conduttore centrale è attraversato da una corrente I e quello esterno da $-I$ (stessa corrente, verso opposto). Lo spazio fra i due conduttori è riempito di un materiale ferromagnetico di costante μ_r. Calcolare l'energia magnetica U_m immagazzinata in un tratto h del cavo. Ricavare poi l'induttanza per unità di lunghezza del cavo.



Esercizio 4 (8 punti)
All'esterno di un solenoide a sezione circolare di raggio a, alimentato dalla densità di corrente quasi stazionaria $nI(t) = nI_0 \sin(\omega t)$, è inserito un anello coassiale di dielettrico omogeneo di costante ε_r, raggio r e sezione $S \ll \pi r^2$. Si calcoli l'espressione del vettore di polarizzazione $\vec{P}$ nel dielettrico. Calcolare inoltre la corrente di polarizzazione $i_p(t)$ presente nell'anello.



Domanda
Descrivere il moto di una carica q puntiforme di massa m e velocit $\vec{v_0}$ in un campo $\vec{B}$ costante nel tempo ed uniforme nello spazio.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

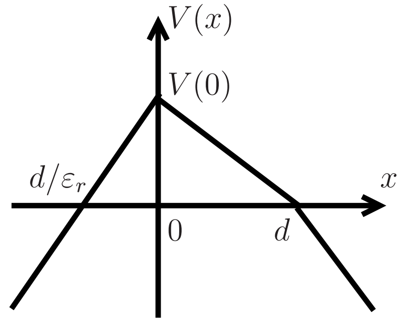
Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 17 Gennaio 2014

Esercizio 1

$$x \geq d: \quad V(x) - V(d) = V(x) = \int_x^d E_x dx = \int_x^d \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) dx' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[x']_x^d = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(d-x).$$

$$0 \leq x \leq d: \quad V(x) - V(d) = V(x) = \int_x^d E_x dx = \int_x^d \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\right) dx' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}[x']_x^d = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}(d-x).$$

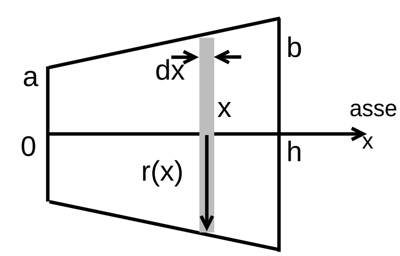
$$x \leq 0: \quad V(x) - V(d) = V(x) = \int_x^d E_x dx = \int_x^0 \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) dx' + V(0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[x']_x^0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_r\varepsilon_0} d = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(x + \frac{d}{\varepsilon_r}\right).$$



Esercizio 2

Un tratto di conduttore a distanza x dalla faccia del tronco di cono ha un raggio

$$r(x) = a + \frac{b-a}{h}x.$$



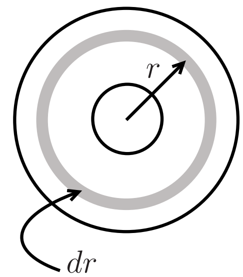
Un elemento di conduttore lungo dx ha una resistenza dR, tale che

$$dR = \frac{\rho dx}{\pi r(x)^2} = \frac{\rho dx}{\pi\left(a + \frac{b-a}{h}x\right)^2}.$$

$$R = \int dR = \int_0^h \frac{\rho dx}{\pi\left(a + \frac{b-a}{h}x\right)^2} = \frac{\rho h}{\pi(b-a)}\int_0^{b-a} \frac{dy}{(a+y)^2} = \cdots = \frac{\rho h}{\pi ab}$$

Nel caso di un conduttore cilindrico $a = b$, la R diventa quella di un conduttore cilindrico di lunghezza h e sezione πa^2: $R = \rho h/\pi a^2$.

Esercizio 3
La densità di energia magnetica



$$u_m = \frac{1}{2}BH = \frac{\mu_0\mu_r}{2}H^2$$

Dal teorema di Ampere per H, dentro al cavo coassiale ($a < r < b$)

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = 2\pi r H = I \qquad \longrightarrow \qquad H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$U_m = \int u_m d\tau = \int_a^b u_m 2\pi r h dr = \cdots = \frac{\mu_0\mu_r I^2 h}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0\mu_r I^2 h}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{L}{h} = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Esercizio 4

$$\text{Faraday:} \quad E\ 2\pi r = -\frac{dB}{dt}\pi a^2 \qquad \longrightarrow \qquad E = -\frac{d}{dt}\left[\mu_0 n I_0 \sin(\omega t)\right]\frac{a^2}{2r} = -\mu_0 n I_0 \omega \frac{a^2}{2r}\cos\omega t$$

Sia $\hat{t}$ versore tangente alla circonferenza di raggio r con verso antiorario,

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)nI_0\omega\frac{a^2}{2r}\cos\omega t\ \hat{t}.$$

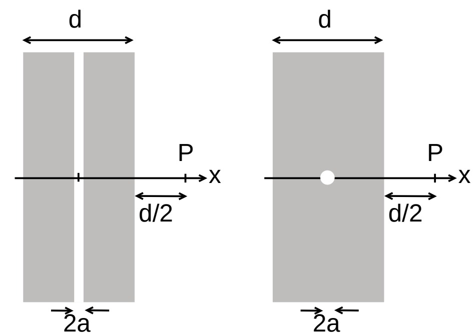
$$i_p(t) = \frac{\partial P}{\partial t}S = \frac{d}{dt}(\varepsilon_0\chi E)S = \mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)nI_0\omega^2\frac{a^2}{2r}S\sin(\omega t)$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

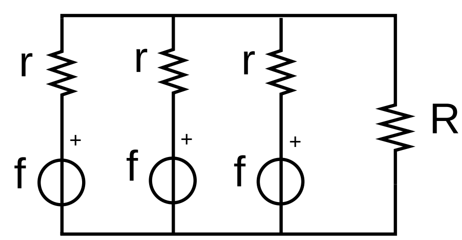
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 7 Febbraio 2014

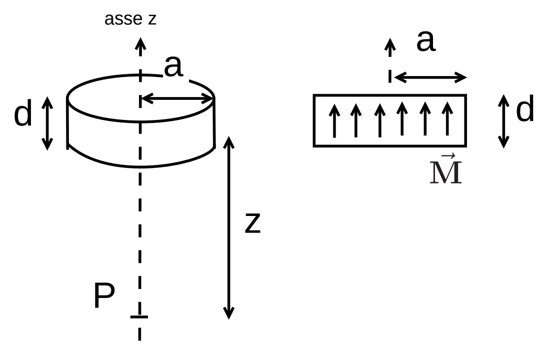
Esercizio 1 (8 punti)
Sia data una lastra piana indefinita di spessore d e carica con densità di carica ρ. Su questa lastra è stato aperto un foro cilindrico di raggio $a \ll d$, anche esso di lunghezza indefinita, centrato rispetto ai bordi della lastra. Si ricavi l'espressione del campo elettrico $\vec{\mathbf{E}}$ generato dalla lastra in un punto P posto sull'asse x a distanza $d/2$ dalla faccia più vicina della lastra.



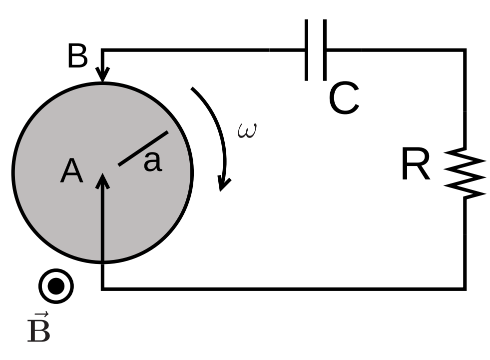
Esercizio 2 (8 punti)
In un circuito sono presenti tre generatori di f.e.m. pari a $f = 10$V, ciascuno in serie ad una resistenza $r = 30\Omega$; i generatori sono connessi in parallelo e chiusi su una resistenza $R = 40\Omega$. Calcolare ampiezza e verso della corrente che scorre in R e calcolare la potenza P_R dissipata su R.



Esercizio 3 (8 punti)
Una pastiglia cilindrica di raggio a e altezza d è magnetizzata con $\vec{\mathbf{M}} = M\hat{z}$ uniforme e diretto lungo l'asse del cilindro. Calcolare modulo, direzione e verso del campo $\vec{\mathbf{B}}$ nel punto P posto sull'asse del cilindro a distanza $z \gg d$ dal centro del cilindro stesso.



Esercizio 4 (8 punti)
Un disco conduttore è collegato tramite un filo di resistenza R ad un condensatore di capacità C, in modo che un capo del condensatore si collegato al centro centro del disco A e l'altro capo al bordo del disco B. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. Il condensatore è scarico quando il disco comincia a ruotare raggiungendo subito la velocità angolare di regime ω. Trascurando l'autoinduzione, la conducibilità del disco ed ogni attrito, calcolare la carica Q a cui si carica la capacità C, indicandone anche il segno. Calcolare anche la corrente $I(t)$ che scorre nel circuito in funzione del tempo, indicandone anche il verso.



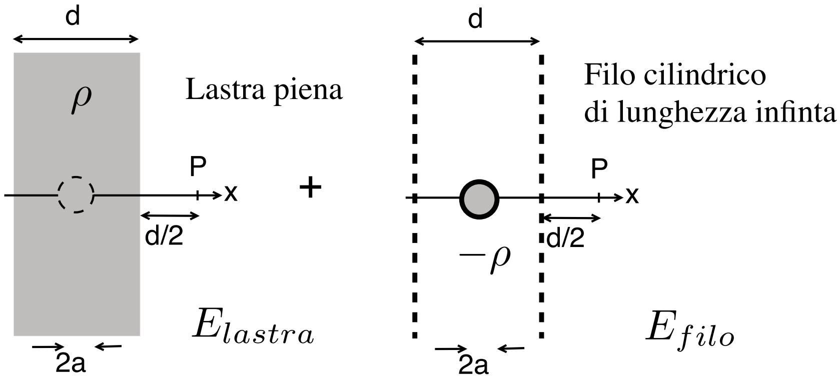
Domanda
Ricavare le condizioni di raccordo fra i campi $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{D}}$ all'interfaccia fra due mezzi dielettrici diversi.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzione della prova scritta di Fisica 2 - 7 Febbraio 2014

Esercizio 1

Per simmetria $\vec{E} = E\hat{x}$



Sovrapposizione degli effetti

$$\vec{E} = E_{lastra}\hat{x} + E_{filo}\hat{x}$$

Lastra piena: teorema di Gauss $\quad E_{lastra} = \dfrac{\rho d}{2\epsilon_0}$

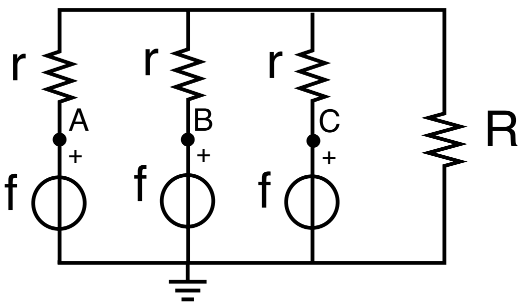
Un tratto di filo carico lungo L ha una carica $\quad Q = -\rho\pi a^2 L \qquad \lambda = \dfrac{Q}{L} = -\rho\pi a^2$

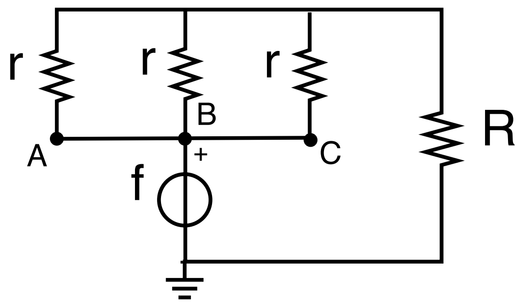
$$E_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} = \cdots = \frac{-\rho a^2}{2\epsilon_0 d}$$

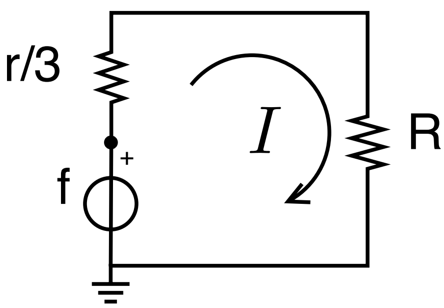
$$E = E_{lastra} + E_{filo} = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} - \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 d} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(d - \frac{a^2}{d}\right)$$

Esercizio 2

A, B, C hanno lo stesso potenziale



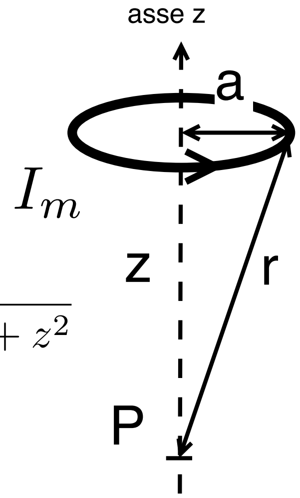




$$I = \frac{f}{R + r/3} = \frac{10}{50} = 0.2\text{A}$$

$$P_R = RI^2 = 40 \cdot 0.04 = 1.6W$$

Esercizio 3



$$\vec{J}_m^S = \hat{n} \times \vec{M} \qquad J_m^S = M = \frac{I_m}{d}$$

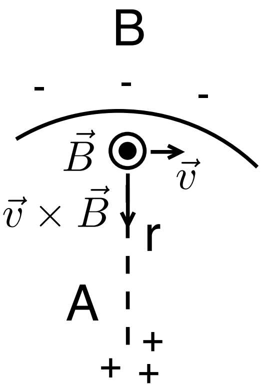
Il cilindro magnetizzato è equivalente ad una spira percorsa da corrente I_m

$$r = \sqrt{a^2 + z^2}$$

$$\vec{B} = B_z \hat{z}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I_m a}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi a} d\ell = \dots = \frac{2\mu_0}{4\pi} \frac{I_m \pi a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2\mu_0}{4\pi} \frac{M \tau_{cil}}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

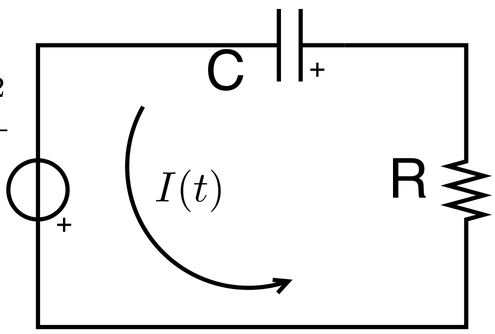
Esercizio 4



$$\vec{E_L} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$V_A - V_B = f_L = \int_{centro}^{bordo} (vB) dr = \int_0^a \omega r B dr = \frac{\omega B a^2}{2}$$

$$f_L = \frac{\omega B a^2}{2}$$



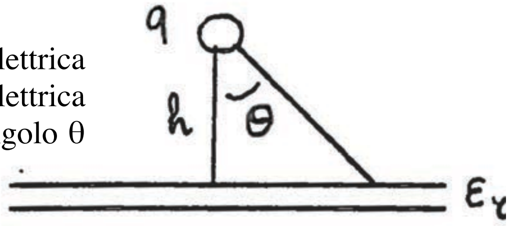
$$Q = C f_L = C \frac{\omega B a^2}{2}$$

$$I(t) = \frac{f_L}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

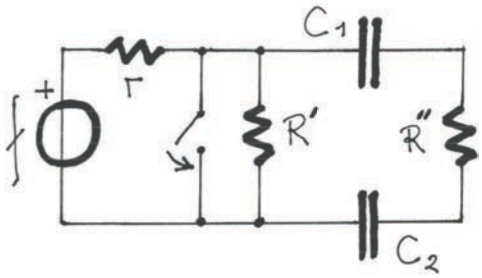
$$\tau = RC$$

UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2013 – 2014 – Ing. Elettrotecnica
Prova scritta del 9 Aprile 2014

A1) Una carica q è sospesa a una distanza h sopra una lastra dielettrica sottile, di dimensioni lineari molto maggiori di h e di costante dielettrica ε_r. Determinare il campo elettrico nella lastra in funzione dell'angolo θ indicato in figura.
(8 punti)

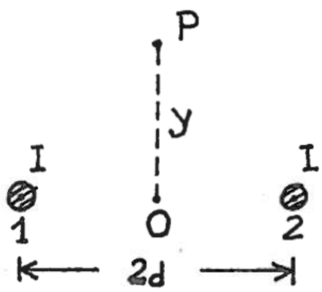


A2) Il circuito in figura è a regime quanto al tempo t=0 si chiude l'interruttore. Calcolare l'energia dissipata in R' e R" fino alla nuova condizione di regime supponendo $C_1=C_2$.
(8 punti)



A3) Un disco conduttore sottile, di raggio R e conducibilità σ, è immerso in un campo di induzione magnetica $B=B_0\sin\omega t$ uniforme e parallelo all'asse del disco. Ricavare l'espressione del campo elettrico e della densità di corrente indotta J in funzione della distanza dall'asse del disco.
(8 punti)

A4) Due conduttori rettilinei 1 e 2 complanari e paralleli (da considerarsi complanari e paralleli (da considerarsi infinitamente estesi), separati da considerarsi infinitamente estesi), separati da una distanza 2d, sono separati da una distanza 2d, sono percorsi nello stesso verso da una percorsi nello stesso verso da una corrente continua I. Si consideri un corrente continua I. Si consideri un piano ortogonale ai due fili (piano di piano ortogonale ai due fili (piano di figura): si determini a quale figura): si determini a quale distanza y lungo la linea di mezzeria, dal y lungo la linea di mezzeria, dal centro O del sistema, il modulo del centro O del sistema, il modulo del campo induzione magnetica B
è massimo.
(8 punti)

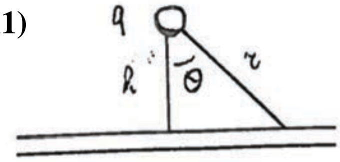


Domanda

B1) Determinare la capacità di un condensatore cilindrico riempito di dielettrico.

Soluzioni

A1)



Se $\vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos^2\theta}{h^2}\hat{r}$ è il campo elettrico nel vuoto, si può scrivere per le sue componenti tangenziale e normale

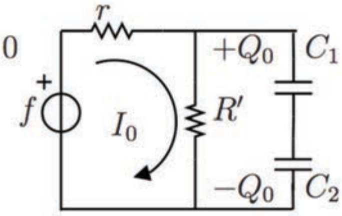
$$(E_0)_t = E_0 \sin\theta \qquad (E_0)_n = E_0 \cos\theta$$

che nel dielettrico diventano

$$(E_d)_t = (E_0)_t \qquad (E_d)_n = \frac{1}{\varepsilon_r}(E_0)_n$$

A2)

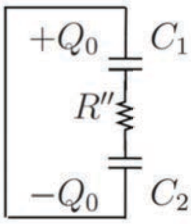
t< 0



$$C_s = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{C_1}{2} \qquad Q_0 = C_sR'I_0 = \frac{C_1}{2}\frac{R'f}{r+R'}$$

$$U_C = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C_s} = \frac{C_1}{4}\left(\frac{R'f}{r+R'}\right)^2$$

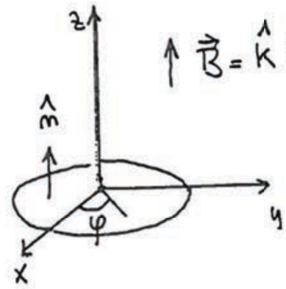
t > 0



Tutta l'energia dei condensatori si dissipa su R"

$U_{R'} = 0 \qquad U_{R''} = U_C$

A3)



$\uparrow \vec{B} = \hat{k}\, B_0 \sin\omega t$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS$$

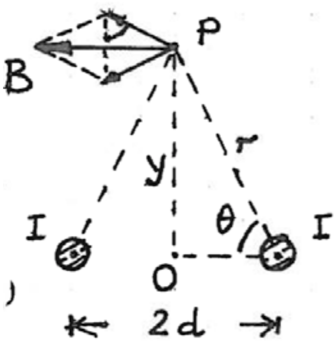
$$\int_0^{2\pi} E\, r\, d\varphi = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r B\, 2\pi r' dr'$$

$$E\, 2\pi r = -\pi r^2 \frac{\partial}{\partial t} B_0 \sin\omega t$$

$$E = -\frac{1}{2} B_0 r\omega \cos\omega t \qquad J = -\frac{1}{2}\sigma r \omega B_0 \cos\omega t$$

$\vec{J}$ è tangente alla generica circonferenza di raggio r

A4)



$$B = 2\,\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\sin\theta = \frac{\mu_0}{\pi} I \frac{y}{d^2+y^2}$$

$$\frac{dB}{dy} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left[\frac{1}{d^2+y^2} - \frac{2y^2}{(d^2+y^2)^2}\right]$$

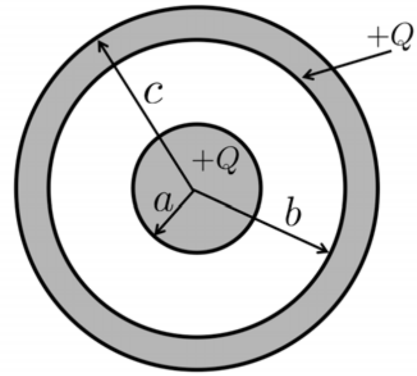
Il massimo si ha per $\frac{dB}{dy} = 0$, ossia per $y = d$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

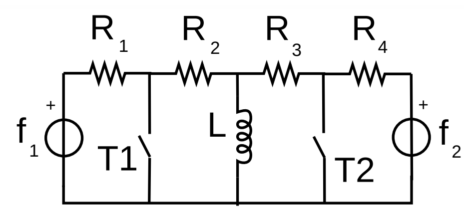
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 13 Giugno 2014

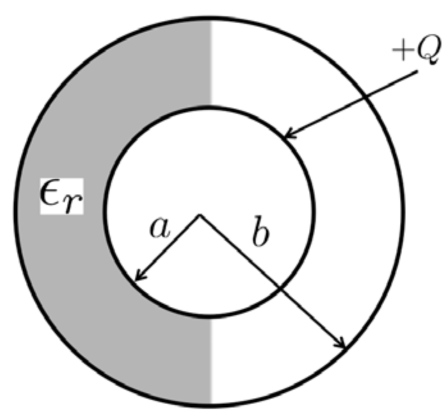
Esercizio 1 (8 punti)
Una sfera metallica di raggio a è caricata con una carica $+Q$. Essa e' circondata da un guscio metallico concentrico, di raggio interno b e raggio esterno c, al quale viene fornita una uguale carica +Q. Il sistema e' nel vuoto. Si ricavi l'espressione del potenziale in tutto lo spazio, in funzione della distanza dal centro del sistema, assumendo $V(\infty) = 0$.



Esercizio 2 (8 punti)
Nel circuito in figura gli interruttori T1 e T2 sono inizialmente aperti ed il circuito è a regime. Al tempo $t = 0$ gli interruttori vengono chiusi. Si calcoli, per $t > 0$, l'andamento nel tempo del modulo della corrente che fluisce nella resistenza R_2. ($f_1 = 0.2V, f_2 = 0.3V, R_1 = R_2 = 10\Omega, R_3 = 40\Omega, R_4 = 20\Omega, L = 0.8H$).



Esercizio 3 (8 punti)
Un condensatore sferico è riempito a metà, come schematizzato in figura, di una sostanza isotropa ed omogenea di costante dielettrica relativa ε_r. Il raggio dell'armatura interna è a, mentre quello dell'armatura esterna è b. Il condensatore è carico con carica totale $+Q$ sull'armatura interna.
Calcolare la densità di carica libera sull'armatura interna in corrispondenza della parte affacciata al vuoto (σ_1) ed di quella a contatto con il dielettrico (σ_2); calcolare inoltre la densità di carica di polarizzazione (σ_{pol}) sulla superficie del dielettrico per $r = a$.



Esercizio 4 (8 punti)
In una regione di spazio priva di cariche e correnti, nel vuoto, è presente un campo elettrico $\vec{E}(t)$ variabile nel tempo. Il campo $\vec{B}(t)$ che si genera ha componenti $B_x = -ay$, $B_y = ax$, B_z=0. Sapendo che la condizione iniziale è $\vec{E}(t = 0) = 0$, si determini l'andamento temporale del campo elettrico.

Domanda
Ricavare le espressioni per l'energia potenziale e momento delle forze che agiscono su un dipolo elettrico immerso in un campo elettrico uniforme.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 13 Giugno 2014

Esercizio 1

$$r \geq c: \quad V(r) = \int_r^\infty E_r dr + V(\infty) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{r}$$

$$b \leq r \leq c: \quad V(r) = \text{const} = V(c) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{c}$$

$$a \leq r \leq b: \quad V(r) = \int_r^b E_r dr + V(b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^b \frac{dr}{r^2} + V(c) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{b} + \frac{2Q}{c}\right)$$

$$r \leq a: \quad V(r) = V(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a} - \frac{Q}{b} + \frac{2Q}{c}\right)$$

Esercizio 2
Nella situazione iniziale, la corrente I_0 che scorre in L si può calcolare sovrapponendo i contributi dovuti a f_1 ed f_2.

$$I_0 = I_1 + I_2 \quad \text{con} \quad I_1 = \frac{f_1}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = \frac{f_2}{R_3 + R_4} \quad \longrightarrow \quad I_0 = 15\text{mA}$$

Per $t > 0$, L si scarica sul parallelo fra R_1 ed R_3:

$$i(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{con} \quad \tau = \frac{L}{R_\|} = \frac{L\,(R_2 + R_3)}{R_2 R_3} = 0.1\text{s}.$$

La corrente che scorre nella resistenza R_2 è (regola del partitore di corrente)

$$i_2(t) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} i(t) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 12 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\text{mA}.$$

Esercizio 3
Il campo elettrico tangenziale E_t si conserva all'interfaccia vuoto-dielettrico. Vicino all'armatura interna (Teorema di Coulomb)

$$E_{vuoto} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}, \quad E_{dielettrico} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad \text{e} \quad \sigma_1 2\pi a^2 + \sigma_2 2\pi a^2 = Q$$

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2\pi a^2(1+\varepsilon_r)}, \quad \sigma_2 = \frac{Q\varepsilon_r}{2\pi a^2(1+\varepsilon_r)},$$

$$\sigma_{pol} = \vec{P}\cdot\hat{n} = -\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E(a) = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi a^2(1+\varepsilon_r)},$$

Esercizio 4

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

quindi

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)_x = -\frac{\partial (ax)}{\partial z} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0,$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)_y = -\frac{\partial (-ay)}{\partial z} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0,$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)_z = \frac{\partial (ax)}{\partial x} + \frac{\partial (ay)}{\partial y} = 2a = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

Da queste e dalla condizione iniziale segue:

$$E_x = E_y = 0 \quad \text{e} \quad E_z = \frac{2a}{\mu_0 \varepsilon_0} t$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Ingegneria Elettrotecnica

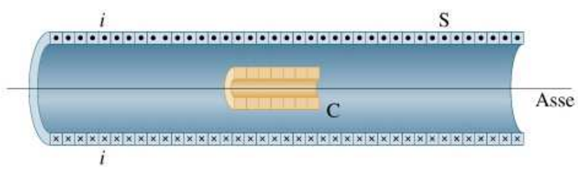
Prova scritta di Fisica 2 - 27 Giugno 2014

Esercizio 1 (8 punti)
Una carica q=20 nC è distribuita uniformemente, nel vuoto, lungo una circonferenza di raggio R=9 cm; al centro O della circonferenza è posta una carica puntiforme Q=-100 nC. Calcolare il lavoro L necessario per portare la carica Q dal punto O al punto P, posto sull'asse della circonferenza a distanza $d=\sqrt{3}R$ da O.

Esercizio 2 (8 punti)
Un condensatore C =2 μF si scarica attraverso una resistenza R=500 kΩ. Calcolare i tempi necessari per dimezzare (1) la carica, (2) la tensione a capi del condensatore, (3) l'energia elettrostatica.

Esercizio 3 (8 punti)
Attraverso un filo orizzontale fissato ad un supporto rigido scorre una corrente I_a=96 A. Sopra di esso c'è un filo sottile e parallelo a questo attraverso cui scorre una corrente I_b=23 A e che pesa 0.073 N/m. A che distanza dal filo più basso deve essere posto questo secondo filo se lo si vuole sostenere per repulsione magnetica? Le correnti nei due fili sono concordi o discordi?

Esercizio 4 (8 punti)
Si consideri il solenoide S in figura, composto da n=220 spire/cm, di diametro d=3.2 cm e percorso dalla corrente i=1.5 A. Al centro di S vi sia una bobina C composta da N=130 spire strettamente impacchettate di diametro d_c=2.1 cm. La corrente del solenoide cresca linearmente da 0 a 1.5 A in Δt=0.16 s. Calcolare il valore assoluto della f.e.m. indotta nell'avvolgimento interno mentre la corrente del solenoide sta aumentando.



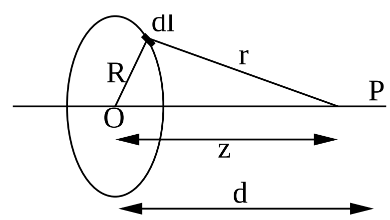
Domanda
Si considerino tre cariche puntiformi q disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato d. Calcolare in modulo direzione e verso la forza agente su ciascuna carica.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 27 Giugno 2014

Esercizio 1
Il lavoro che si deve compiere dall'esterno per spostare la carica Q dal punto O al punto P è dato da

$$L = Q\left[V(P) - V(O)\right],$$



dove V è il potenziale elettrico. Il potenziale generato da una carica puntiforme q a distanza r dalla carica stessa , e assumendo nullo il potenziale all'infinito, è $V(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r$. Nel caso in esame, la distribuzione lineare di carica $\lambda = q/2\pi R$, sull'asse della circonferenza si ha:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{circ}\frac{\lambda dl}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda 2\pi R}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}}.$$

Nei punti P $(z = d = \sqrt{3}R)$ e O $(z = 0)$, il potenziale è quindi

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{d^2+R^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R} \quad \text{e} \quad V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R},$$

da cui

$$L = Q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{2R} = 9\ 10^9 \times \frac{10^{-7}\times 2\ 10^{-8}}{2\times 9\ 10^{-2}} = 10^{-4}\ \text{J} = 100\ \mu\text{J}.$$

Esercizio 2
La costante di tempo vale $\tau = RC = 2\ 10^{-6} \times 500\ 10^3$=1 s. Per un condensatore che si scarica

$$Q(t) = Q_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad V(t) = V_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{e} \quad U(t) = \frac{Q^2}{2C} = U_0\exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right).$$

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0\exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \quad \Rightarrow \quad t_1 = \tau\ \ln 2 = 0.69\tau = 0.69\ \text{s} \quad (t_1 = t_2)\,.$$

$$\frac{U_0}{2} = U_0\exp\left(-2\frac{t_1}{\tau}\right) \quad \Rightarrow \quad t_3 = \tau\ \frac{\ln 2}{2} = 0.35\tau = 0.35\ \text{s}$$

Esercizio 3
Perchè vi sia repulsione le due correnti devono scorrere in verso opposto e perchè vi sia equilibrio la forza magnetica repulsiva per unità di lunghezza deve essere uguale alla forza peso per unità di lunghezza. Sia d la distanza fra i due fili; il modulo del campo di induzione magnetica generato dal filo (a) sul filo (b) vale

$$B_a = \mu_0 \frac{I_a}{2\pi d}.$$

e dalla seconda legge di Laplace, la forza agente sul conduttore (b) per unità di lunghezza vale

$$\left|\frac{F}{L}\right| = \mu_0 \frac{I_a I_b}{2\pi d}.$$

Eguagliandola alla forza gravitazionale per unità di lunghezza $(F/L)_g$, si ottiene

$$d = \mu_0 \frac{I_a I_b}{2\pi (F/L)_g} = 4\pi 10^{-7} \frac{96 \times 23}{2\pi\ 0.073} = 6.0 \text{ mm}.$$

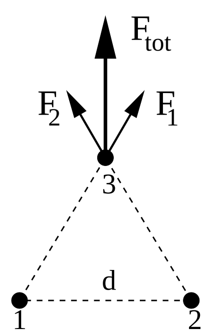
Esercizio 4
Considerando il solenoide S come un solenoide infinito, il campo di induzione magnetica sulla bobina C è parallelo all'asse e di modulo costante pari a $B = \mu_0 n\ i$. Il flusso nella bobina vale

$$\Phi = \pi \frac{d_c^2}{4} B = \pi \frac{d_c^2}{4} \mu_0 n\ i.$$

Dalla Legge di Faraday, il modulo della f.e.m. vale:

$$|\text{f.e.m}| = \frac{d\Phi}{dt} = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \mu_0 \pi n\ N \frac{d_c^2}{4}\frac{\Delta i}{\Delta t} = 4\pi 10^{-7} \times \pi \times 220\ 100 \times 130 \times \frac{(2.1\ 10^{-2})^2}{4}\frac{1.5}{0.16} = 12\text{mV}.$$

Teoria
Per simmetria, le forze agenti su ciascuna carica sono uguali e dirette come in figura. Dalla legge di Coulomb:



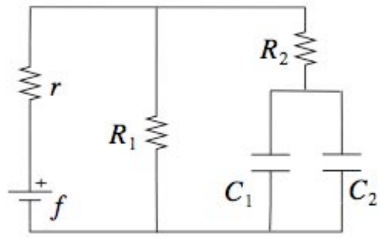
$$|\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_2| = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}.$$

$$|\boldsymbol{F}_{tot}| = 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\cos(30°) = \sqrt{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

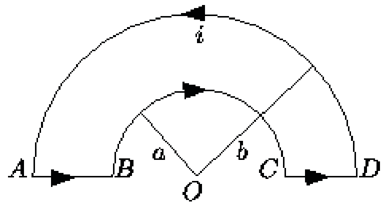
UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2013 – 2014 – Ing. Elettrotecnica
Prova scritta di Fisica 2 - 11 Luglio 2014

1) Un elettrone che si muove lungo la direzione x con velocità v_0 è sottoposto, per un tratto lungo d, ad un campo elettrico uniforme E_0 ortogonale alla sua velocità. Calcolare l'espressione della tangente dell'angolo che la direzione dell'elettrone forma con l'asse delle x dopo essere uscito dalla regione in cui è presente il campo elettrico.
(8 punti)

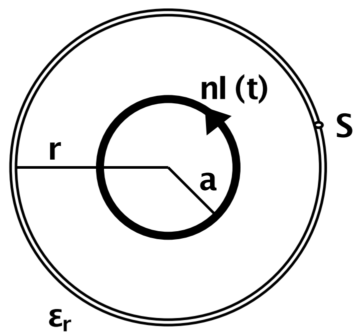
2) Un generatore di forza elettromotrice f e resistenza interna r è collegato ad un circuito come in figura. Calcolare in condizioni stazionarie la corrente che scorre nel generatore e la potenza che eroga; calcolare la potenza dissipata in R_1 ed R_2 e l'energia elettrostatica immagazzinata in ciascuno dei due condensatori.
(8 punti)



3) Nel circuito rappresentato in figura, i raggi delle semicirconferenze sono a=10 cm e b=15 cm. Se la corrente vale i=20A, calcolare il campo di induzione magnetica nel centro O delle semicirconferenze.
(8 punti)



4) All'esterno di un solenoide a sezione circolare di raggio a, con n spire per unità di lunghezza, alimentato dalla corrente quasi stazionaria $I(t) = I_0\sin(\omega t)$, è inserito un anello coassiale di dielettrico omogeneo di costante ε_r, raggio r e sezione $S<<\pi r^2$. Si calcoli l'espressione del vettore di polarizzazione nel dielettrico.
(8 punti)



Domanda

Enunciare e ricavare l'equazione di continuità .

Soluzioni

A1)

Il campo elettrico imprime all'elettrone un'accelerazione $a_y=F/m=-qE/m$ che lo fa spostare nella direzione y secondo la legge $y=\frac{1}{2}a_y t^2$ mentre lungo l'asse x si muove con moto uniforme $x=v_0t$

Eliminando la variabile t dalle equazioni si ottiene $y=-\frac{qE}{2mv_0^2}x^2$

Le componenti della velocità dell'elettrone all'uscita del campo sono $v_y=\sqrt{2a_y y}=\frac{qEd}{mv_0}$ $\quad v_x=v_0$

da cui è possibile ricavare l'angolo che la direzione dell'elettrone forma con l'asse x

$$tan\Theta=\frac{-v_y}{v_x}=\frac{qEd}{mv_0^2}$$

A2)

In condizioni stazionarie, nel ramo contenente R_2 e nei due condensatori non scorre corrente. La corrente I che scorre nel generatore è

$$I=\frac{f}{R_1+r}$$

e la potenza W erogata dal generatore è la somma di quella dissipata su R_1 e su r, cioè

$$W=rI^2+R_1I^2=(r+R_1)I^2=fI.$$

La potenza dissipata su R_2 è nulla e quella dissipata su R_1 vale $W_1=R_1I^2$. L'energia immagazinata nella capacità C_j $(j=1,2)$ è

$$U_j=\frac{1}{2}C_jV^2 \quad \text{con} \quad V=\frac{R_1}{r+R_1}f.$$

A3) $d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{d\vec{l}\times\Delta\vec{r}}{\Delta r^3}$ $\qquad B_{AB}=B_{CD}=0$ $\qquad B_{DA}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b^2}\int_0^{\pi b}dl=\frac{\mu_0 I}{4b}$

$B_{BC}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a^2}\int_0^{\pi a}dl=\frac{\mu_0 I}{4a}$ $\qquad B_{tot}=\frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=-2.1\times10^{-5}\ \mathrm{T}$ $\qquad$ (entrante nel foglio)

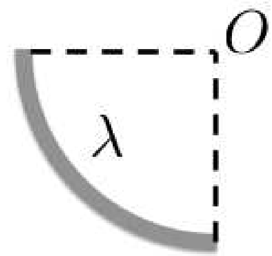
A4) Faraday: $E\,2\pi r=-\frac{dB}{dt}\pi a^2 \quad \longrightarrow \quad E=-\frac{d}{dt}\left[\mu_0 n I_0\sin(\omega t)\right]\frac{a^2}{2r}=-\mu_0 n I_0\omega\frac{a^2}{2r}\cos\omega t$

Sia $\hat{t}$ versore tangente alla circonferenza di raggio r con verso antiorario,

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}=-\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)nI_0\omega\frac{a^2}{2r}\cos\omega t\ \hat{t}.$$

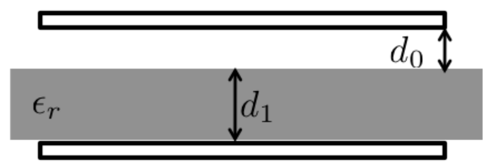
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 12 Settembre 2014

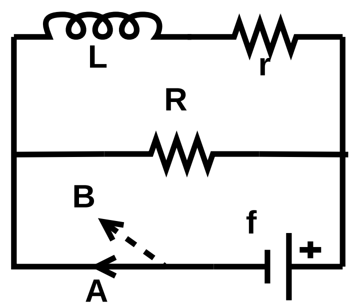


Esercizio 1 (8 punti)
Un tratto di filo sottile, uniformemente carico con densità lineare di carica positiva λ, è sistemato in un piano in modo da formare un quarto di circonferenza di raggio R. Ricavare l'espressione, nel vuoto, del campo elettrico generato dal filo nel centro della circonferenza O (modulo, direzione e verso).

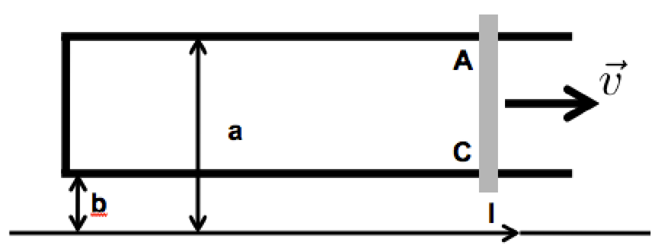
Esercizio 2 (8 punti)
Si consideri un condensatore piano di superficie S. Fra le armature c'è aria per uno spessore d_0 ed un materiale isolante (costante dielettrica relativa ε_r) nel rimanente spessore d_1. Si calcoli il valore del momento di dipolo elettrico dell'isolante, una volta applicata una d.d.p. ΔV costante alle armature del condensatore.



Esercizio 3 (8 punti)
Il circuito mostrato in figura si trova a lavorare in condizioni di regime con l'interruttore chiuso (posizione A). A partire da questa situazione, all'istante $t = 0$ l'interruttore viene aperto (posizione B). Calcolare l'energia complessivamente dissipata sulla resistenza R tra l'apertura dell'interruttore ed il raggiungimento della nuova situazione di regime.



Esercizio 4 (8 punti)
Un sottile filo conduttore di sezione costante e resistenza elettrica trascurabile è piegato a U e disposto , come mostrato in figura, con i lati lunghi paralleli ad un lungo filo rettilineo percorso da corrente stazionaria I, a distanza a e b da questo, rispettivamente. Il filo ad U è chiuso, a formare un circuito rettangolare, da una sbarretta conduttrice AC, di resistenza R, disposta perpendicolarmente al filo percorso da corrente.



Tale sbarretta garantisce un doppio contatto elettrico strisciante nei punti A e C e viene tenuta, da una opportuna forza esterna, in moto traslatorio rettilineo uniforme a velocità v. Nell'ipotesi che tutto sia nel vuoto, ricavare l'espressione (intensità e verso) della corrente i che passa nel circuito. Trascurare gli effetti di autoinduzione.

Domanda
Determinare le sollecitazioni che agiscono su una spira piana rettangolare percorsa da una corrente I immersa in un campo di induzione magnetica uniforme.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 12 Settembre 2014

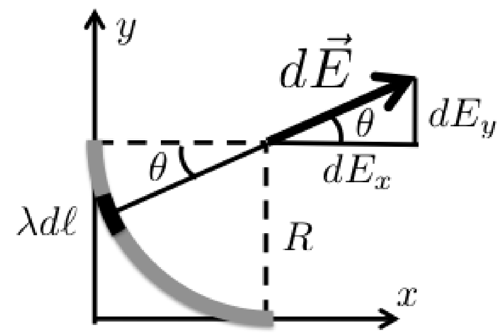
Esercizio 1

$$dE = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2} \quad \text{con} \quad d\ell = Rd\theta$$

$$dE_x = dE\cos\theta \quad \text{e} \quad dE_y = dE\sin\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

La direzione di $\vec{E}$ è nel primo quadrante xy $(E_x = E_y)$ ed il verso è come in figura per $\lambda > 0$.

Esercizio 2
Il modulo del momento di dipolo p

$$p = P\tau = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)ESd_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}Sd_1 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}Qd_1 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}C\Delta V d_1$$

con τ il volume del dielettrico nel condensatore con armature di superficie S, P il modulo del vettore intensità di polarizzazione, E il modulo del campo elettrico, Q la carica sulle armature e $\sigma = Q/S$.

$$\frac{1}{C} = \frac{d_0}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_1}{\varepsilon_r\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_r d_0 + d_1}{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}$$

$$p = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{\varepsilon_r d_0 + d_1}\Delta V d_1 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\Delta V S d_1}{\varepsilon_r d_0 + d_1}$$

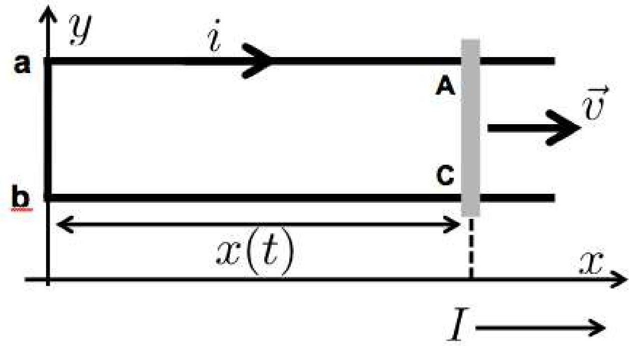
Esercizio 3
L'energia magnetica a $t = 0$ è

$$U_M = \frac{1}{2}Li_0 \quad \text{con} \quad i_0 = f/r.$$

Nella fase di scarica dell'induttore U_M si dissipa per effetto Joule su R e r. La frazione $R/r + R$ si dissipa su R

$$U_R = \left(\frac{1}{2}L\frac{f^2}{r^2}\right)\left(\frac{R}{r + R}\right).$$

Esercizio 4



$$f_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

$$\Phi(B) = \int_b^a \frac{\mu_0 I}{2\pi y} x dy = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{b}\right) x(t)$$

$$f_i = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \frac{dx}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{b}\right) v$$

$$i = \frac{|f_i|}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \ln\left(\frac{a}{b}\right) v \quad \text{(verso orario)}$$