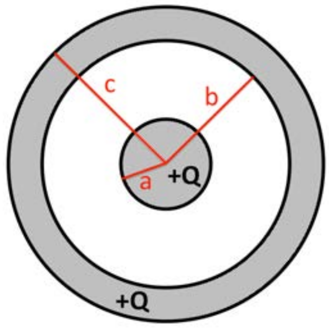
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

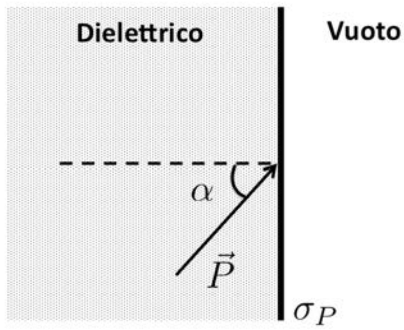
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 13 Gennaio 2015



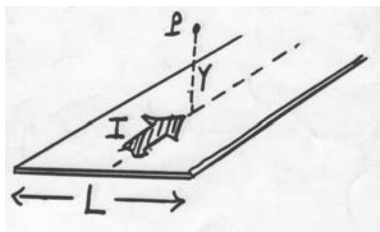
Esercizio 1 (8 punti)

Una sfera metallica di raggio a è caricata da una carica $+Q$. Essa è circondata da un guscio metallico concentrico di raggio interno b e raggio esterno c, al quale viene fornita una uguale carica $+Q$. Il sistema è nel vuoto. Si ricavi l'espressione del potenziale in tutto lo spazio, in funzione della distanza dal centro del sistema, assumendo $V(\infty) = 0$; farne anche un grafico approssimato.



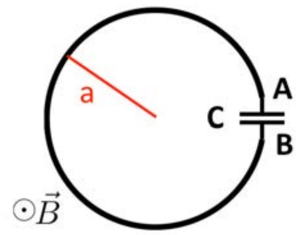
Esercizio 2 (8 punti)

In una lastra (indefinita in due dimensioni) di dielettrico isotropo, omogeneo, di costante dielettrica relativa ε_r, il vettore di polarizzazione $\vec{P}$ è uniforme e forma un angolo α con la normale alla superficie piana del dielettrico. Sapendo la densità di cariche di polarizzazione di superficie è σ_P, determinare il campo elettrico all'esterno del dielettrico.



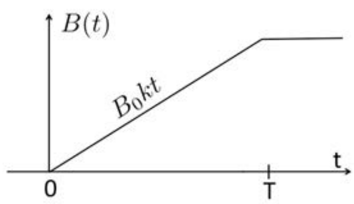
Esercizio 3 (8 punti)

Un nastro conduttore sottile, di larghezza L, diritto e molto lungo, nel vuoto, è percorso da una corrente I stazionaria ed uniformemente distribuita sulla sezione del nastro. Ricavare l'espressione del vettore induzione magnetica in un punto P situato a distanza y sulla perpendicolare al piano del nastro passante per l'asse del nastro stesso.



Esercizio 4 (8 punti)

Una spira circolare di raggio a e resistenza R è chiusa su un condensatore di capacità C e dimensioni geometriche trascurabili. La spira è immersa in un campo $\vec{B}$ omogeneo, perpendicolare al piano della spira (come in figura) e variabile nel tempo in maniera lineare fra 0 e $T \approx 10RC$. Calcolare e fare il grafico della differenza di potenziale $V_A - V_B = \Delta V_{AB}$. Si assuma il condensatore scarico per $t < 0$.



Domanda

Esprimere e disegnare approssimativamente il campo elettrico $\vec{E}$ in tutto lo spazio di un solenoide indefinito percorso da corrente $i(t)$ ed immerso nel vuoto.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 13 Gennaio 2015

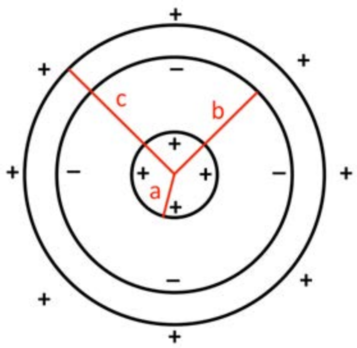
Esercizio 1

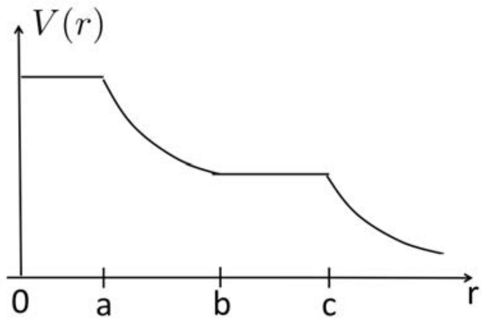
$$r \geq c: \quad V(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r'} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr'}{r'^2} + V(\infty) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Q}{r}$$

$$b \leq r \leq c: \quad V(r) = \text{cost} = V(c) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Q}{c}$$

$$a \leq r \leq b: \quad V(r) = \int_r^b \vec{E} \cdot d\vec{r'} + V(b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^b \frac{dr'}{r'^2} + V(b) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{b} + \frac{2Q}{c} \right)$$

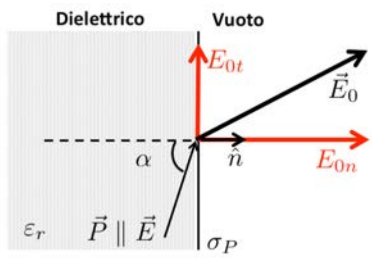
$$r \leq a: \quad V(r) = V(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{a} - \frac{Q}{b} + \frac{2Q}{c} \right)$$





Esercizio 2

Il campo nel vuoto è uguale a quello sulla superficie di separazione fra dielettrico e vuoto; a questa superficie di separazione si ha, essendo $\vec{E_0}$ il campo nel vuoto e $\vec{E}$ il campo nel dielettrico:

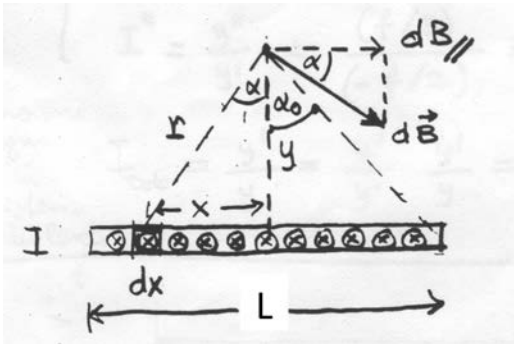


$$E_{0t} = E_t = E \sin\alpha \qquad E_{0n} = \varepsilon_r E_t = \varepsilon_r E \cos\alpha,$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} \qquad \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = P \cos\alpha.$$

$$E_{0t} = \frac{\sigma_P \tan\alpha}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)} \qquad E_{0n} = \frac{\varepsilon_r \sigma_P}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)} \qquad E_0 = \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)} \sqrt{\tan\alpha^2 + \varepsilon_r^2}$$

Esercizio 3



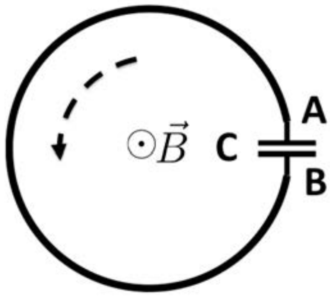
$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi r} dI = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{I}{L} dx \quad \text{con} \quad dB_{\parallel} = dB\cos\alpha$$

$$B = \int_{\text{striscia}} dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I}{2\pi L}\int_{\text{striscia}} \frac{dx}{r} = \dots$$

$$\dots = \frac{\mu_0 I}{2\pi L}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{\pi L}\arctan\left(\frac{L}{2y}\right)$$

essendo $r = y/\cos\alpha$ e $dx = y d\alpha/\cos^2\alpha$ e $\tan\alpha_0 = L/2y$.

Esercizio 4



$$\text{f.e.m.} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\pi a^2 B(t)\right)$$

$$t < 0 \text{ e } t > T: \quad \text{f.e.m.} = 0$$

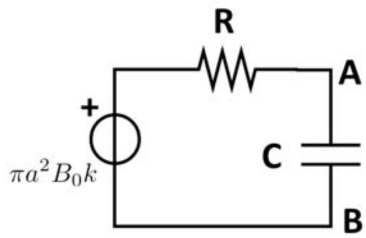
$$0 \le t \le T: \quad \text{f.e.m.} = -\pi a^2 B_0 k,$$

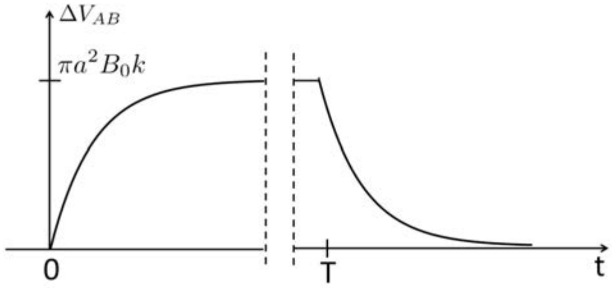
con il verso positivo indicato dalla linea tratteggiata.

Quindi per $t < 0$ il condensatore resta scarico, mentre si carica per $0 \le t \le T$ e raggiunge la tensione di regime, essendo $T \gg \tau = RC$, come mostrato dal circuito equivalente riportato di sotto. Per $t > T$, la f.e.m. indotta è nulla ed il condensatore si scarica.

$$0 \le t \le T: \quad \Delta V_{AB} = \pi a^2 B_0 k\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad \text{con} \quad \tau = RC.$$

$$t > T: \quad \Delta V_{AB} = \pi a^2 B_0 k \exp\left(-\frac{t-T}{\tau}\right) \quad \text{con} \quad \tau = RC.$$



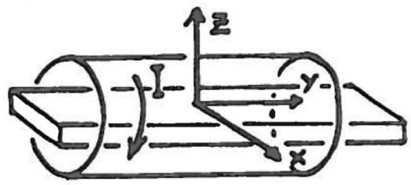


Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

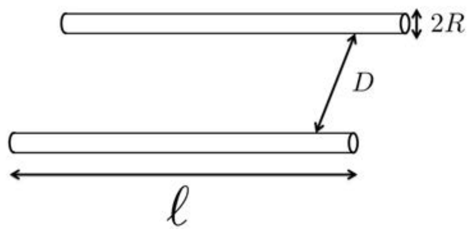
Prova scritta di Fisica 2 - 9 Febbraio 2015

Esercizio 1 (8 punti)
All'interno di un guscio sferico di centro O, raggio interno a e raggio esterno b, è distribuita una carica elettrica con densità di carica $\rho(r) = k/r^2$, dove k è una costante e r rappresenta la distanza dal centro O. La sfera di centro O e raggio a costituisce una cavità vuota al centro del guscio carico. All'esterno ($r > b$) c'è anche il vuoto. Ricavare l'espressione della differenza di potenziale $V(O) - V(A)$ tra il centro O ed il punto A posto a distanza $2b$ dal centro stesso.

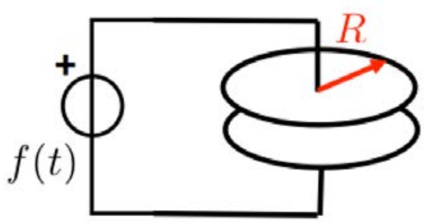
Esercizio 2 (8 punti)
Un solenoide lungo e compatto con $n = 10^3$ spire/m è percorso da una corrente stazionaria I=3A diretta come in figura. Al suo interno è inserita parallelamente all'asse una barra a sezione rettangolare di materiale ferromagnetico isotropo, lineare e omogeneo di permabilità $\mu_r = 150$. Calcolare le componenti del vettore densità di corrente di magnetizzazione superficiale $\vec{J}_{ms}$ sulla faccia superiore della barra rispetto al riferimento cartesiano in figura.



Esercizio 3 (8 punti)
Una linea elettrica è costituita da due fili conduttori rettilinei e paralleli, a sezione circolare di raggio R; la distanza fra i due fili vale $D \gg R$. I due fili sono percorsi dalla stessa corrente in versi opposti. Se la linea collega due luoghi la cui distanza è ℓ, quale è l'espressione del coefficiente di autoinduzione dell'intera linea?



Esercizio 4 (8 punti)
Un generatore di forza elettromotrice variabile nel tempo $f(t) = A \sin(\omega t)$ è collegato ad un condensatore a facce piane e parallele, circolari di raggio R nel vuoto; sia h la distanza fra le armature. Ricavare l'espressione del rapporto k tra i **valori massimi** delle energie magnetica ed elettrica contenute all'interno del volume cilindrico individuato dal condensatore.



Domanda
Considerare il circuito di carica di un condensatore di capacità C ad 1 maglia (resistenza R, generatore di f.e.m. f). Ricavare l'espressione della tensione ai capi del condensatore e della corrente che scorre nel circuito.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 9 Febbraio 2015

Esercizio 1

$$V(O) - V(A) = \int_0^a \vec{E}^{INT} \cdot d\vec{\ell} + \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_b^{2b} \vec{E}^{EST} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_b^{2b} \vec{E}^{EST} \cdot d\vec{\ell}$$

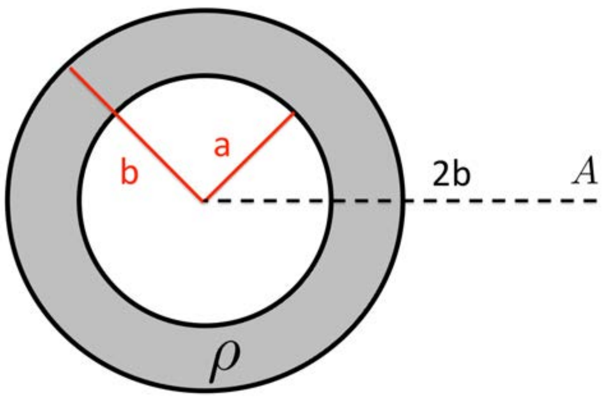
Per $a \leq r \leq b$, dal Teorema di Gauss:

$$E(r) 4\pi r^2 = Q^{INT}(r)/\varepsilon_0$$

$$Q^{INT}(r) = \int_a^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = \int_a^r \frac{k}{r'^2} 4\pi r'^2 dr' = 4\pi k(r-a) \qquad Q_{TOT} = 4\pi k(b-a)$$

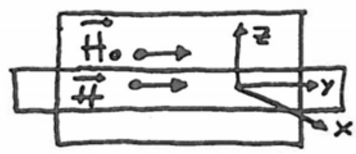
$$a < r < b: \quad E(r) = \left[\frac{k(r-a)}{\varepsilon_0 r^2}\right] \qquad r > b: \quad E^{EST}(r) = \left[\frac{k(b-a)}{\varepsilon_0 r^2}\right]$$

$$V(O) - V(A) = \int_a^b \frac{k(r-a)}{\varepsilon_0 r^2} dr + \int_b^{2b} \frac{k(b-a)}{\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{k}{\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) - 1 + \frac{a+b}{2b}\right]$$



Esercizio 2

Il campo nel vuoto è uguale a quello sulla superficie di separazione fra materiale ferromagnetico e vuoto; a questa superficie di separazione si ha, essendo $\vec{H}_0$ il campo nel vuoto e $\vec{H}$ il campo nel materiale ferromagnetico:



$$\vec{H}_0 = nI\hat{y}, \; H_{0t} = H_t \quad \longrightarrow \quad \vec{H} = nI\hat{y}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu nI\hat{y}$$

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \vec{n} = \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}\right) \times \hat{z} = (\mu_r - 1)\, nI\hat{y} \times \hat{z} = (\mu_r - 1)\, nI\hat{x} = \hat{x}\ 4.5\ 10^5\ \text{A/m}$$

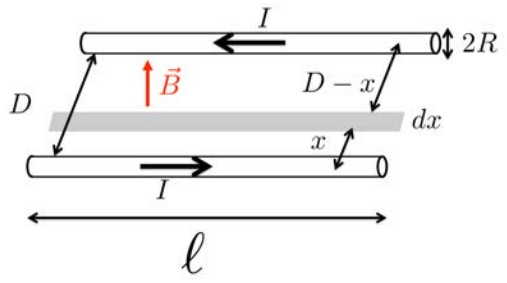
Esercizio 3

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(D-x)}$$

$$\Phi(B) = \int_R^{D-R} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(D-x)}\right] \ell dx = \dots$$

$$\dots = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} 2 \ln\left(\frac{D-R}{R}\right) \approx \frac{\mu_0 I \ell}{\pi} \ln\left(\frac{D}{R}\right) = LI$$

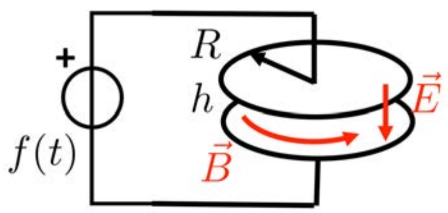
$$L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln\left(\frac{D}{R}\right)$$



Esercizio 4

$$f(t) = A \sin(\omega t) \quad E(t) = f(t)/h$$

$$U_E(t) = \pi R^2 h \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) = \frac{\pi \varepsilon_0 R^2 A^2}{2h} \sin^2(\omega t)$$



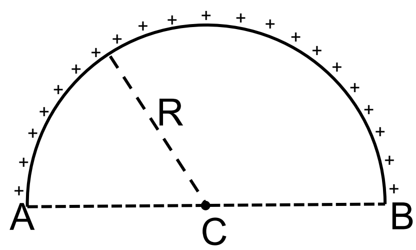
$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \quad \rightarrow \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt} \quad \rightarrow \quad B(r,t) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2h} A \omega r \cos(\omega t)$$

$$U_M(t) = \int_0^R \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r h dr = \frac{\pi}{16h} \mu_0 \varepsilon_0^2 A^2 \omega^2 R^4 \cos^2(\omega t)$$

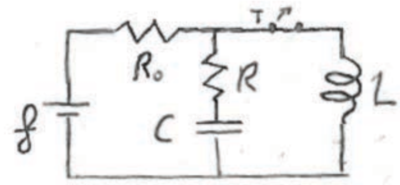
$$k = \frac{U_M^{max}}{U_E^{max}} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R^2 \omega^2}{8}$$

UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2014 – 2015 – Ing. Elettrotecnica
Prova scritta del 16 Aprile 2015

1. Una carica Q è distribuita uniformemente su un filo AB a forma di semicirconferenza di centro C e raggio R. Determinare in direzione, modulo e verso il campo elettrico nel punto C (nel vuoto). (**8 punti**)

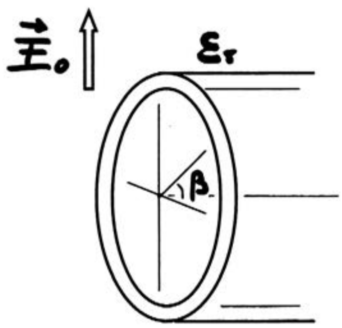


2. Il circuito in figura è a regime quando, all'istante t=0, l'interruttore T viene aperto. Calcolare dopo quanto tempo la tensione ai capi della resistenza R è uguale alla tensione ai capi del condensatore C. (Considerare R_0=R). (**8 punti**)



3. Una spira quadrata di lato a e resistenza totale R giace su un piano a distanza a da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente i(t)=K t. Calcolare direzione, intensità e verso della forza agente sulla spira. (**8 punti**)

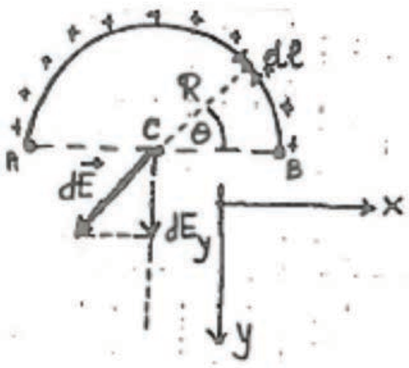
4. Un guscio cilindrico lungo e sottile di dielettrico di costante relativa εr è immerso in un campo elettrostatico E0 uniforme nel vuoto, orientato perpendicolarmente all' asse del cilindro. Esprimere in funzione dell' angolo β:
i) le componenti tangenziale e normale del campo elettrico all'interno del guscio dielettrico;
ii) la densità di carica di polarizzazione σp sulla superficie esterna dello stesso. (**8 punti**)



Determinare la forza per unità di lunghezza che si esercita tra due fili infinitamente lunghi paralleli percorsi da correnti I_1 ed I_2 e, da questa, dare la definizione operativa dell'unità di misura della corrente.

Soluzioni

1.



$$|d\vec{E}| = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\lambda\, d\ell}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{\pi R}\,\frac{R\,d\theta}{4\pi R^2\varepsilon_0}$$

$$E_x = \int dE_x = 0 \quad \text{(simmetria)}$$

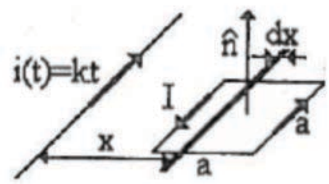
$$E_y = \int dE_y = \int dE\,\mathrm{sen}\,\theta = \int_0^\pi \frac{Q\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

2.

$$Q_c(t=0)=0 \qquad Q_c(t) = C\mathcal{E}\left(1-e^{-t/\tau}\right) \qquad \tau = (R_0+R)C$$

$$\Delta V_c(t^*) = R\,I(t^*) \qquad \mathcal{E}\left(1-e^{-t^*/\tau}\right) = \frac{R}{R_0+R}\,\mathcal{E}\,e^{-t^*/\tau} \qquad t^* = -\tau\ln\frac{2}{3}$$

3.



$$d\Phi(\bar{B}) = -\frac{\mu_0 k\,t}{2\pi\,x}\,a\,dx\,;$$

quindi $I = -\dfrac{d\Phi(\bar{B})}{R\,dt} = \dfrac{\mu_0 k}{2\pi R}\,a\ln 2$;

la forza, repulsiva vale quindi:

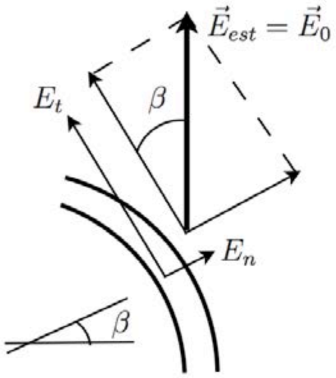
$$F = I\,a\frac{\mu_0 i(t)}{2\pi a} - I\,a\frac{\mu_0 i(t)}{2\pi\,2a} = \frac{I\,i(t)\,\mu_0}{4\pi}.$$

4.

$$E_t = E_{ot} = E_0\cos\beta$$

$$\varepsilon_r E_n = E_{on} \quad\rightarrow\quad E_n = \frac{E_0}{\varepsilon_r}\sin\beta$$

$$\sigma_P = P_n = \varepsilon_0\chi E_n = \varepsilon_0\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}E_0\sin\beta$$

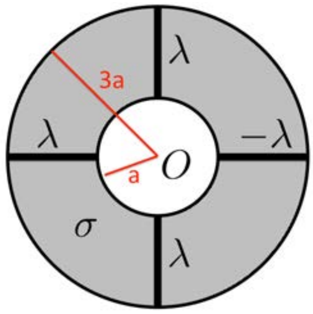


Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

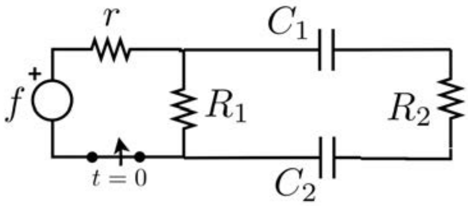
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 19 Giugno 2015

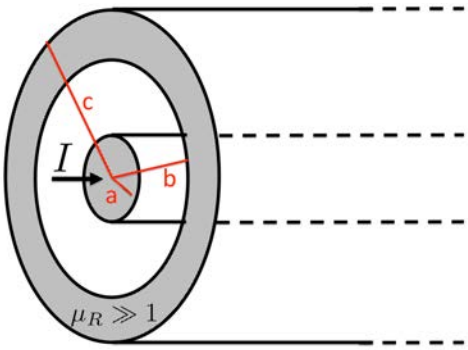
Esercizio 1 (8 punti)
Si consideri il disco sottile cavo con densità di carica uniforme σ con raggio interno a e raggio esterno $3a$. Su di esso siano incollati quattro fili sottili che distano $\pi/2$rad uno dall'altro e di lunghezza $2a$, come in figura. Tre fili hanno densità lineare di carica λ ed uno solo con densità lineare di carica $-\lambda$. Si calcoli il potenziale nel punto centrale O, assumendo il potenziale nullo all'infinito.



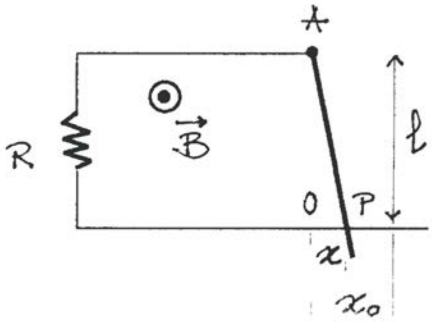
Esercizio 2 (8 punti)
Si consideri il circuito in figura. Il circuito è a regime con l'interruttore chiuso quando questo viene aperto all'istante $t = 0$: si calcoli l'energia dissipata sull'insieme delle due resistenze R_1 ed R_2 quando viene raggiunta la nuova condizione di regime.



Esercizio 3 (8 punti)
Un lungo conduttore omogeneo ed isotropo di sostanza diamagnetica, di forma cilindrica a sezione circolare a, è percorso da una corrente stazionaria I uniformemente distribuita sulla sezione del conduttore. Esternamente e coassialmente al conduttore (ed elettricamente scollegato da questo), è posto un tubo di materiale ferromagnetico, pure omogeneo ed isotropo, di permeabilità magnetica relativa μ_R, di raggio interno $b > a$ e raggio esterno c. Nell'intercapedine tra il conduttore centrale ed il tubo esterno c'è aria. Ricavare l'espressione dell'andamento di H e B in funzione della distanza r dall'asse del sistema e rappresentarne graficamente l'andamento qualitativo.



Esercizio 4 (8 punti)
Il circuito in figura ha un tratto mobile imperniato in A e con un contatto strisciante in P, la cui distanza da O viene fatta oscillare nel tempo con legge $x(t) = x_0 \cos \omega t$, con ω costante. La distanza OA è pari a ℓ. Il circuito è immerso in un campo $\vec{B}$ stazionario ed uniforme, perpendicolare al piano del circuito, che possiede una resistenza complessiva pari a R. Si calcoli l'espressione della corrente indotta $I(t)$, trascurando l'autoinduzione.



Domanda
Descrivere il moto di una particella di carica q e massa m in moto con velocità $\vec{v}$ in una regione in cui ci sia un campo $\vec{B}$ uniforme. Si considerino $\vec{v}$ e $\vec{B}$ orientati arbitrariamente.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

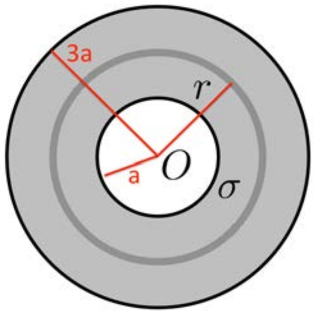
Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 19 Giugno 2015

Esercizio 1
Il filo con densità $-\lambda$ produce un potenziale uguale ed opposto ad uno degli altri 3 fili, quindi per la sovrapposizione degli effetti, il potenziale nel punto O sarà

$$V_{tot} = 2V_\lambda(O) + V_\sigma(O)$$

Un elemento di carica del filo $dq = \lambda dx$ produce nel punto O un potenziale

$$dV_\lambda(O) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(a+x)} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(a+x)} \quad \rightarrow \quad V_\lambda(O) = \int_0^{2a} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(a+x)} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 3$$



essendo x la distanza dall'estremo del filo sul bordo interno del disco.
Il potenziale del disco cavo si ricava come sovrapposizione dei potenziali di circonferenze di raggio r e carica $dq = \sigma 2\pi r dr$:

$$dV_\sigma(O) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma dr}{2\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad V_\sigma(O) = \int_a^{3a} \frac{\sigma dr}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}.$$

$$V_{tot} = 2V_\lambda(O) + V_\sigma(O) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 3 + \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$

Esercizio 2
A regime con l'interruttore chiuso, non scorre corrente in R_2 e la serie delle due capacità è caricata ad una tensione

$$\frac{R_1}{r+R_1}f.$$

L'energia immagazzinata nella serie delle due capacità vale

$$U_c = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\left(\frac{R_1}{r+R_1}f\right)^2;$$

U_c è l'energia che viene dissipata nelle resistenze.

Esercizio 3

Per $r < a$, essendo un diamagnete $\mu_{r,D} \approx 1$

$$r \leq a: \qquad \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = J\pi r^2 \quad \rightarrow \quad H \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi a^2}\pi r^2$$

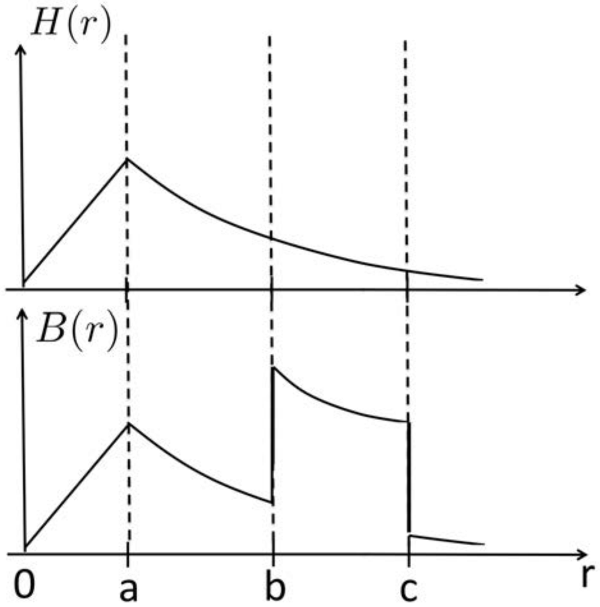
Quindi

$$r \leq a \text{ (diamag.)}: \quad H(r) = \frac{I}{2\pi a^2}r, \quad B(r) = \mu_0 \mu_{r,D} H(r) \approx \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$$

$$a \leq r \leq b \text{ (aria)}: \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I \quad \rightarrow \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$b \leq r \leq c \text{ (ferromag.)}: \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I \quad \rightarrow \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad B(r) = \mu_R \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

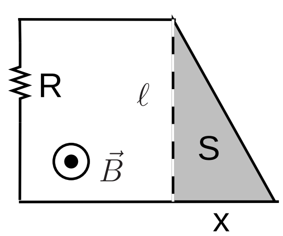
$$r \geq c \text{ (aria)}: \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Esercizio 4

$$I(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B}{R}\frac{dS}{dt} = -\frac{B}{R}\frac{d}{dt}\left(\frac{x\ell}{2}\right) =$$

$$= -\frac{B\ell}{2R}\frac{dx}{dt} = \frac{B\ell x_0 \omega}{2R} \sin \omega t$$

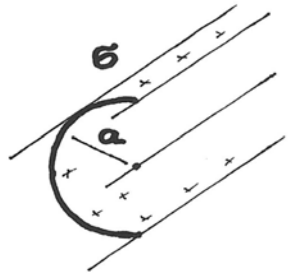


Università degli Studi di Roma “La Sapienza”

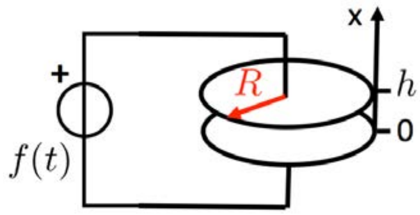
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 17 Luglio 2015

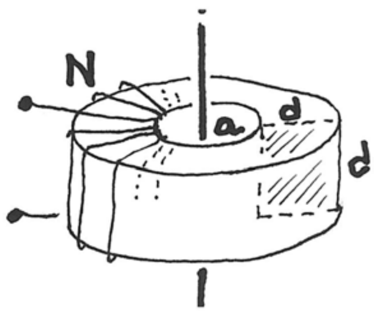
Esercizio 1 (8 punti)
Una carica statica nel vuoto è distribuita su una superficie semicilindrica di raggio a e lunghezza illimitata, con densità superficiale σ uniforme. Si calcoli l'espressione del campo elettrico $\vec{E}$ (in modulo e direzione) in un generico punto sull'asse.



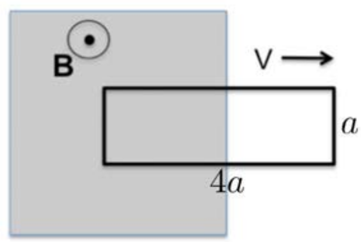
Esercizio 2 (8 punti)
Un generatore di forza elettromotrice variabile nel tempo $f(t) = A\sin(\omega t)$ è collegato ad un condensatore a facce piane e parallele, circolari di raggio R nel vuoto; sia $h \ll R$ la distanza fra le armature. Ricavare l'espressione della forza $F_x(t)$ (modulo e verso) che si esercita fra le due armature, considerando come verso positivo quello indicato in figura. Inoltre calcolarne anche il valor medio (nel tempo) $\bar{F}_x$.



Esercizio 3 (8 punti)
Un lungo filo conduttore rettilineo è posto sull'asse di un solenoide toroidale di $N = 100$ spire avvolte compatte su un anello non ferromagnetico, di sezione quadrata di lato $d = 2cm$ e di raggio interno $a = 1cm$. Si calcoli il coefficiente di mutua induzione M tra il solenoide e il circuito di cui fa parte il filo rettilineo.



Esercizio 4 (8 punti)
Una spira rettangolare di resistenza R e di lati a e $4a$ viene estratta con velocità costante v da una regione di campo magnetico $\vec{B}$ uniforme in cui era immersa per metà. Calcolare il lavoro L necessario per estrarre la spira.

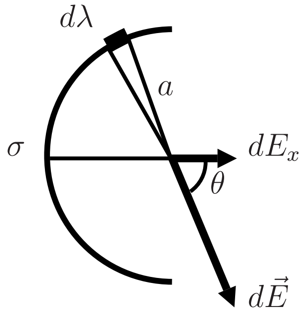


Domanda
Si ricavino le condizioni di raccordo per i campi B ed H alla superficie di separazione fra due mezzi con permeabilità relative differenti.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 17 Luglio 2015

Esercizio 1



Per simmetria $\vec{E} = \hat{x}E_x$

$$dE_x = \frac{d\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta = \frac{\sigma a d\theta}{2\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}[\sin\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}$$

Esercizio 2

Essendo il condensatore non isolato,

$$F_x = +\left.\frac{\partial U_V}{\partial x}\right|_{x=h} \quad \text{con} \quad U_V(x) = \frac{C(x)}{2}f(t)^2 = \frac{\pi R^2\varepsilon_0}{2x}A^2\sin(\omega t)^2.$$

Sia il periodo T tale che $\omega = 2\pi/T$,

$$F_x(t) = -\frac{\pi R^2\varepsilon_0}{2h^2}A^2\sin(\omega t)^2 \quad \text{con} \quad \bar{F_x} = \frac{1}{T}\int_0^T F_x(t)dt = -\frac{\pi R^2\varepsilon_0}{4h^2}A^2$$

Esercizio 3

Sia $dS = d\, dr$ l'elemento infinitesimo di superficie della sezione quadrata del solenoide a distanza r dal filo con $r \in [a, a+d]$,

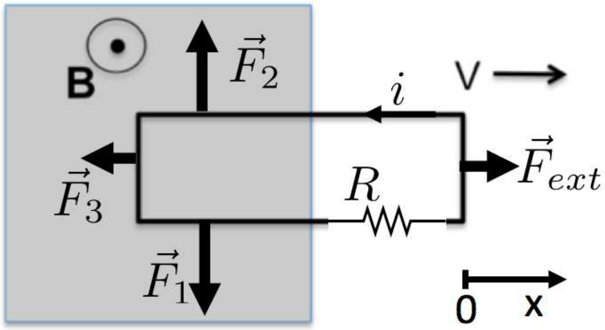
$$\Phi = \int_{sez.} BdS = N\int_a^{a+d}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}d\ dr = \frac{N\mu_0 d}{2\pi}\ln\left(\frac{a+d}{a}\right)\cdot I = MI.$$

$$M = \frac{10^2\cdot 4\pi 10^{-7}\cdot 2\ 10^{-2}}{2\pi}\ln 3 \simeq 4\ 10^{-7}\text{H} = 0.4\ \mu\text{H}.$$

Esercizio 4

Poiché la spira si muove a velocità costante v, la risultante delle forze agenti sulla spira deve essere nulla. Sia x la posizione della spira a partire dalla condizione iniziale (metà spira immersa nel campo $\vec{B}$). La parte della spira immersa nel campo B ha superficie $(2a - x)a$.

$$\Phi\left(\vec{B}\right) = \int_{spira}\vec{B}\cdot\hat{n}dS = B(2a-x)a \quad \text{da cui} \quad f.e.m. = -\frac{d\Phi}{dt} = Ba\frac{dx}{dt} = Bav \quad \text{e} \quad i = \frac{Bav}{R}.$$



Sia $\vec{F}_{spira}$ la forza agente sulla parte della spira immersa in $\vec{B}$ e $\vec{F}_{ext}$ la forza esterna che muove la spira:

$$d\vec{F}_{spira} = id\vec{\ell} \times \vec{B} \quad \text{e quindi} \quad \vec{F}_{spira} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_3 = -iaB\hat{x} = -\frac{B^2a^2v}{R}\hat{x} = -\vec{F}_{ext}.$$

poiché essendo la velocità costante

$$\vec{F}_{spira} + \vec{F}_{ext} = 0$$

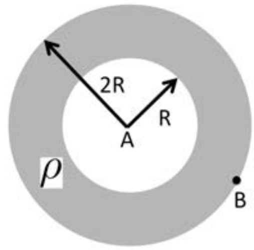
$$L = \int_0^{2a} \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{\ell} = \frac{2a^3B^2v}{R}.$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

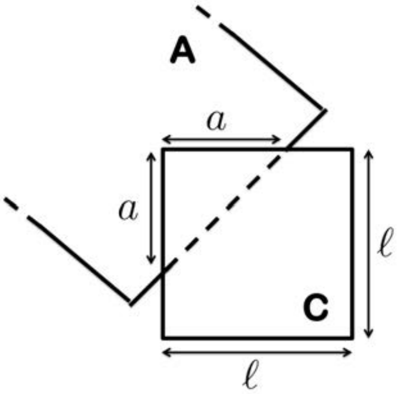
Ingegneria Elettrotecnica

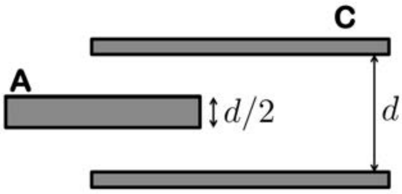
Prova scritta di Fisica 2 - 24 Settembre 2015

Esercizio 1 (8 punti)
Si consideri una distribuzione di carica statica nel vuoto, con densità costante ρ all'interno del guscio sferico di raggi R e $2R$. Si calcoli l'espressione della differenza di potenziale tra il punto centrale A ed un punto B sul bordo estremo della distribuzione.

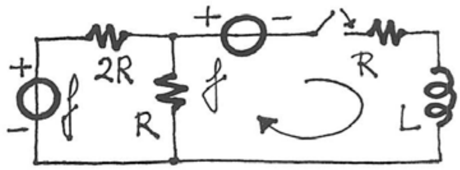


Esercizio 2 (8 punti)
Un condensatore piano **C**, isolato in aria, possiede una carica Q. Tra le due armature viene parzialmente inserita una lastra conduttrice **A**, neutra, isolata e posta al centro del condensatore **C**. Con la geometria in figura, calcolare la forza che agisce sulla lastra **A** in modulo, direzione e verso.

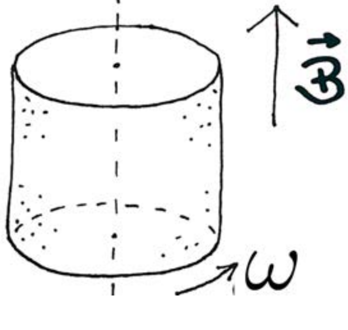




Esercizio 3 (8 punti)
Nel circuito in figura l'interruttore si chiude al tempo $t = 0$. Si calcoli l'espressione della corrente $I(t)$ nell'interruttore, riferendosi al verso indicato.



Esercizio 4 (8 punti)
Un cilindro di rame ruota attorno all'asse con velocità angolare stazionaria ω, nel verso indicato, immerso in un campo costante B parallelo all'asse stesso. Si calcoli l'espressione del potenziale elettrico $V(r)$ presente nel cilindro, dove r è la distanza dall'asse, assumendo $V(0) = 0$. Facoltativo: si calcoli la densità di carica ρ all'interno del cilindro.



Domanda
Descrivere il ciclo di isteresi per un materiale ferromagnetico.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 24 Settembre 2015

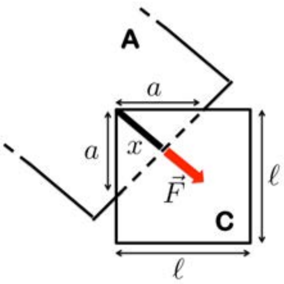
Esercizio 1
La simmetria consente di ricavare $\vec{E}$ dalla legge di Gauss.

$$r < R : \qquad \vec{E} = 0$$

$$R \le r \le 2R : \qquad 4\pi r^2 E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4\pi}{3}\left(r^3 - R^3\right) \quad \longrightarrow \quad E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right).$$

$$V_A - V_B = \int_0^{2R} E(r)dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_R^{2R}\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)dr = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

Esercizio 2



Per simmetria $\vec{F}$ è lungo la diagonale dell'armatura di C.

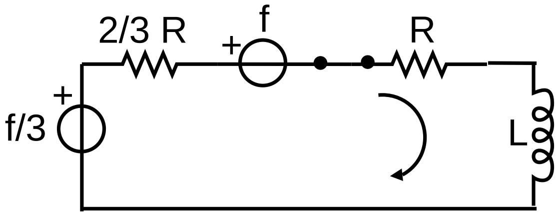
$$F_x = -\frac{\partial U_E(x)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2C(x)}\right)$$

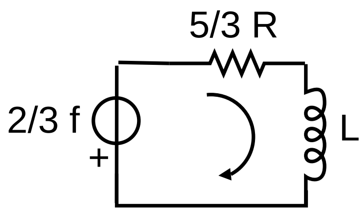
$$C(a) = \varepsilon_0\frac{a^2/2}{d/2} + \varepsilon_0\frac{\ell^2 - a^2/2}{d} = \frac{\varepsilon_0}{d}\left(\ell^2 + \frac{a^2}{2}\right)$$

$$a = \sqrt{2}x \qquad \longrightarrow \qquad C(x) = \frac{\varepsilon_0}{d}\left(\ell^2 + x^2\right)$$

$$F_x = -\frac{Q^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{d}{\varepsilon_0\left(\ell^2 + x^2\right)}\right] = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0}\frac{2x}{\left(\ell^2 + x^2\right)^2} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}a}{\left(\ell^2 + a^2/2\right)^2}$$

Esercizio 3

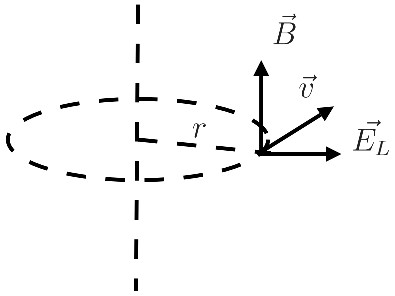


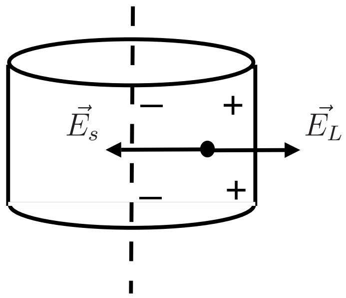


$$I(t) = I_\infty\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad \longrightarrow \quad I_\infty = -\frac{2}{5}\frac{f}{R}, \quad \tau = \frac{3L}{5R}$$

Esercizio 4

Nel conduttore, a distanza r dall'asse di rotazione, $\vec{v} = \omega r \vec{t}$ ed all'equilibrio, $\vec{E}_s = \vec{E}_L = -\omega B \vec{r}$.



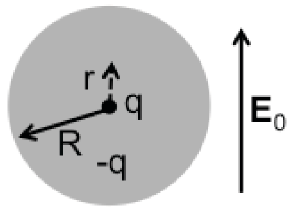


$$V(r) - V(0) = \int_r^0 E_r dr = \omega B \int_0^r r dr = \frac{1}{2}\omega B r^2$$

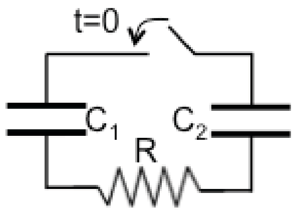
$$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0 \longrightarrow \rho = -\varepsilon_0 \nabla^2 \left[\frac{1}{2}\omega B \left(x^2 + y^2\right)\right] = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \omega B \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2 + y^2\right)\right] = -2\varepsilon_0 \omega B$$

UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2014 – 2015 – Ing. Elettrotecnica
Prova scritta del 11 Novembre 2015

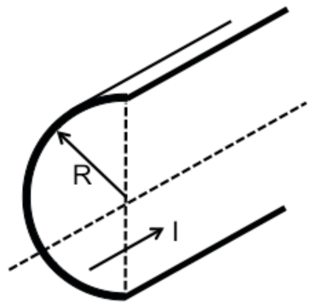
1. Una particella puntiforme di carica q è posta al centro di una regione sferica di raggio R, contenente una carica opposta –q uniformemente distribuita. Sul sistema è applicato un campo elettrico $\mathbf{E}_0$ uniforme. Determinare la posizione di equilibrio *r* della carica puntiforme q, dove con *r* si indica la distanza dal centro delle cariche negative (per r<R). **(8 punti)**



2. Calcolare l'energia dissipata dalla resistenza R nel circuito in figura dall'istante t=0 fino alla nuova condizione di regime. Inizialmente il condensatore di capacità C_1 è carico con carica Q_0, mentre il condensatore C_2 è scarico. **(8 punti)**

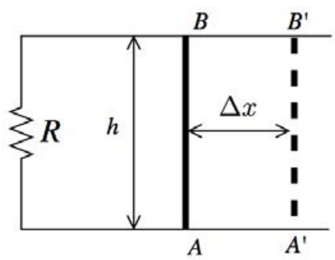


3. Un semi-cilindro infinito di raggio R e spessore trascurabile (cavo) è percorso da una corrente stazionaria I come in figura. Determinare il campo di induzione magnetica prodotto sull'asse del semi-cilindro. **(8 punti)**



4.

Il circuito in figura è immerso in un campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$, uniforme e ortogonale al piano del circuito. Il tratto di circuito AB viene portato strisciando nella posizione $A'B'$. Calcolare la carica che circola nel circuito a seguito di questo spostamento. Dati: $B = 1$ T; $R = 1$ kΩ; $h = 1$ m; $\Delta x = 10$ cm.



(8 punti)

Domanda

Dimostrare il teorema di Coulomb per un conduttore immerso in un dielettrico.

Soluzioni

1.

Affinché la posizione sia di equilibrio la somma delle forze agenti su q deve essere nulla: $q\mathbf{E}_0 + q\mathbf{E} = 0$ dove $\mathbf{E}$ è il campo elettrico prodotto dalla distribuzione di carica negativa. Il campo elettrico all'interno di una distribuzione di carica uniforme a simmetria sferica si può ricavare dal teorema di Gauss ed è pari a

$$\mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\varepsilon_0} \quad \text{con} \quad \rho = -\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \;\rightarrow\; \mathbf{E}_0 = -\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \;\rightarrow \mathbf{r} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{q}\,\mathbf{E}_0$$

2.

$$U_{in} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C_1}$$

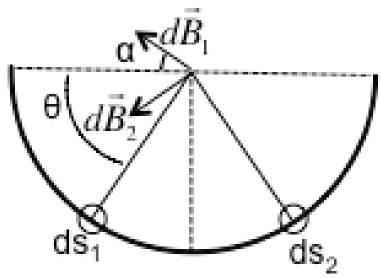
Nella situazione di equilibrio finale la tensione ai capi dei due condensatori è la stessa (condensatori in parallelo), $C_{eq} = C_1 + C_2$ e l'energia finale (la carica si conserva)

$$U_{fin} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C_1 + C_2}$$

L'energia dissipata sulla resistenza è quindi

$$U_d = -\Delta U = U_{in} - U_{fin} = \frac{1}{2}Q_0^2\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_1 + C_2}\right) = \frac{1}{2}Q_0^2\frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

3.



Con riferimento alla figura, i due fili di larghezza ds_1 e ds_2 generano in O un campo di induzione magnetica $d\vec{B}$ uguale in modulo e pari a

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} \quad \text{con} \quad dI = I\frac{ds}{\pi R}$$

Le due componenti verticali dei campi si annullano e rimangono soltanto quelle orizzontali che si sommano, per cui si ha:

$$dB = 2\frac{\mu_0 I ds}{2\pi^2 R^2}cos\alpha = \frac{\mu_0 I ds}{\pi^2 R^2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R^2}\int_0^{\pi/2} \sin\,\theta ds$$

$$ds = Rd\theta \;\rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

4.

La corrente I che scorre a causa della $f.e.m.$ indotta è

$$I = \frac{f.e.m.}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(B)}{dt}.$$

$$|q| = \left|\int_{IN}^{FIN} Idt\right| = \frac{1}{R}\left|\int_{IN}^{FIN}\frac{d\Phi}{dt}dt\right| = \frac{1}{R}\left|\int_{IN}^{FIN} d\Phi\right| = \frac{|\Phi_{FIN} - \Phi_{IN}|}{R} = \frac{Bh\Delta x}{R} = 10^{-4}\text{ C}$$