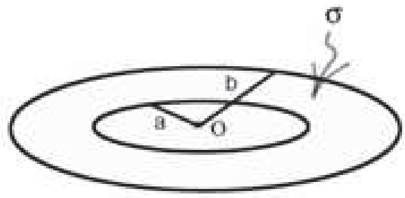
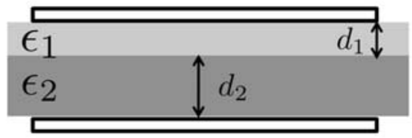
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 20 Gennaio 2016

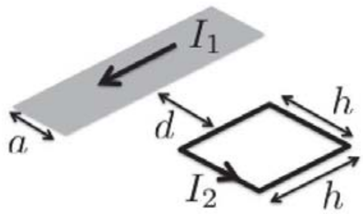
Esercizio 1 (8 punti)
Una carica positiva è distribuita nel vuoto su una corona circolare di raggio interno a ed esterno b, con densità superficiale $\sigma = kr^2$, dove r è la distanza dal centro e k è una costante. Ricavare l'espressione del potenziale $V(0)$ nel centro della distribuzione nell'ipotesi $V(\infty) = 0$.



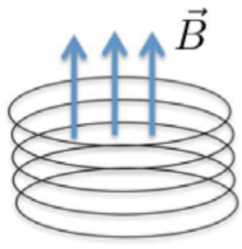
Esercizio 2 (8 punti)
Un condensatore piano con armature di area S è riempito da due lastre di dielettrico, una di spessore d_1 e di costante dielettrica ε_1, l'altra di spessore d_2 e costante dielettrica ε_2. Ai capi del condensatore è applicata una differenza di potenziale ΔV_0. Calcolare i valori E_1 e E_2 dei moduli di campo elettrico nei due dielettrici e la densità di carica totale di polarizzazione σ_p sulla superficie di separazione dei due dielettrici.



Esercizio 3 (8 punti)
Un nastro molto lungo di larghezza a è percorso da una corrente I_1 con verso indicato in figura. Sullo stesso piano e a distanza d dal bordo del nastro è posta una spira quadrata di lato h percorsa da una corrente I_2. Il verso di I_2 e l'orientazione della spira sono tali che nel lato più vicino al nastro I_2 è parallela a I_1. Ricavare modulo e verso della forza $\vec{F}$ agente sulla spira.



Esercizio 4 (8 punti)
Una bobina costituita da $N = 100$ spire, di sezione $S = 100$ cm^2 e resistenza totale $R = 5\Omega$ è posta in una zona di spazio dove vi è un campo $\vec{B}$ uniforme, perpendicolare alla sezione della bobina. Il campo $\vec{B}$ varia nel tempo aumentando linearmente da zero al valore $B_0 = 0.8$T in un tempo $\Delta t = 10$s. Calcolare la f.e.m. indotta nella bobina durante l'intervallo Δt e il lavoro totale speso nel tempo Δt.

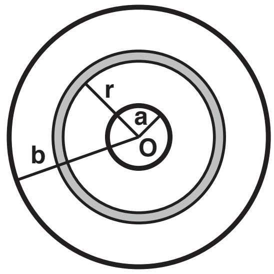


Domanda
Esprimere e disegnare approssimativamente il campo elettrico $\vec{E}$ (in tutto lo spazio) di un solenoide indefinito percorso da corrente $i(t)$ ed immerso nel vuoto.

Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 20 Gennaio 2016

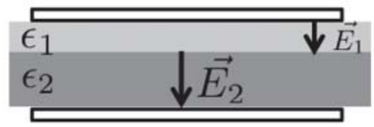
Esercizio 1
Sia dq la carica della spira di raggio r, come in figura.



$$dV(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{kr^2\ 2\pi r dr}{r} = \frac{kr^2}{2\varepsilon_0}dr$$

$$V(0) = \int_{\text{corona}} dV(0) = \int_a^b \frac{kr^2}{2\varepsilon_0}dr = \frac{k}{6\varepsilon_0}\left(b^3 - a^3\right)$$

Esercizio 2



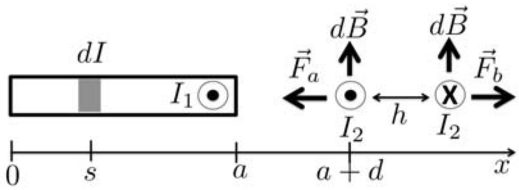
$$\text{Condizioni di raccordo:} \quad \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$$

$$\Delta V_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2 \qquad \sigma_\ell = D_1 = D_2 = D$$

$$D = \varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_1 = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}E_2 = \sigma_\ell \qquad E_1 = \frac{\varepsilon_2 \Delta V_0}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} = \frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}},\ E_2 = \frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}, \quad D = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}\Delta V_0}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}$$

$$\sigma_{P1} = \frac{\varepsilon_{r1} - 1}{\varepsilon_{r1}}D,\ \sigma_{P2} = \frac{\varepsilon_{r2} - 1}{\varepsilon_{r2}}D \qquad \sigma_{P,tot} = \sigma_{P1} - \sigma_{P2} = \varepsilon_0\frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}\Delta V_0$$

Esercizio 3



$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(x-s)} = \frac{\mu_0}{2\pi(x-s)}\frac{I}{a}ds \quad \text{essendo} \quad dI = \frac{I}{a}ds$$

$$B(x) = \int_{\text{striscia}} dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_0^a \frac{ds}{x-s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\left(\frac{x}{x-a}\right)$$

Sul lato più vicino della spira quadrata: $B(x) = B(a+d)$, mentre sul lato più lontano della spira quadrata: $B(x) = B(a+d+h)$. Essendo $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$:

$$\vec{F}_a = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 h}{2\pi a}\ln\left(\frac{a+d}{d}\right)\hat{x}, \quad \vec{F}_b = \frac{\mu_0 I_1 I_2 h}{2\pi a}\ln\left(\frac{a+d+h}{d+h}\right)\hat{x}$$

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \hat{x}\left(\left|\vec{F}_a\right| - \left|\vec{F}_b\right|\right) = -\hat{x}\frac{\mu_0 I_1 I_2 h}{2\pi a}\left[\ln\left(\frac{a+d}{d}\right) - \ln\left(\frac{a+d+h}{d+h}\right)\right]$$

Esercizio 4

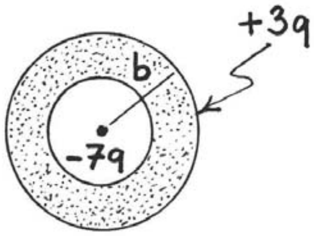
$$\Phi(t) = NSB = \frac{NSB_0}{\Delta t}t, \quad \text{f.e.m.} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{NSB_0}{\Delta t}, \quad I = \frac{\text{f.e.m.}}{R}, \quad q = \int_0^{\Delta t} I dt = -\frac{NSB_0}{R}$$

$$\mathscr{L} = q\text{f.e.m.} = \frac{N^2 S^2 B_0^2}{R\Delta t} = 1.28\ 10^{-2}\text{J}$$

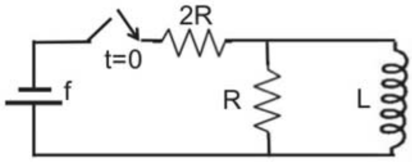
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 16 Febbraio 2016

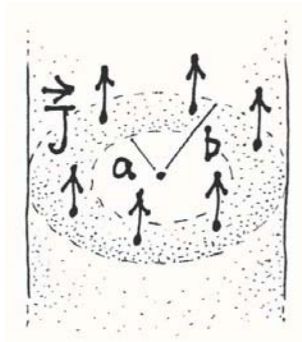
Esercizio 1 (8 punti)
Una carica puntiforme $-7q$ è posta al centro di un guscio sferico conduttore immerso nel vuoto, di raggio esterno b e dotato di una carica $+3q$. Si calcolino rispettivamente le espressioni della componente radiale E_r del campo elettrostatico presente nello spazio esterno al guscio e del potenziale V_g del guscio nell'ipotesi $V(\infty) = 0$.



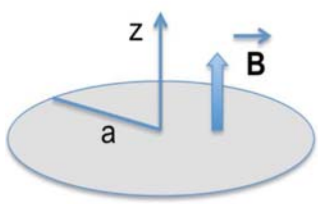
Esercizio 2 (8 punti)
Determinare l'andamento temporale della potenza W_L assorbita dall'induttanza e di quella W_g erogata dal generatore nel circuito in figura dopo la chiusura dell'interruttore.



Esercizio 3 (8 punti)
Un guscio cilindrico, di lunghezza illimitata, di raggi interno a ed esterno b, costituito da un materiale conduttore omogeneo di permeabilità magnetica relativa μ_r, immerso nel vuoto, è percorso da una corrente stazionaria uniformemente distribuita con densità J. Si calcolino le espressioni del campo densità di corrente di magnetizzazione J_m, sia nel volume sia sulle due superfici, interna ed esterna, del guscio conduttore. Di J_m s'indichi la direzione e il verso, anche mettendo questo ultimo in relazione con i diversi tipi di materiali.



Esercizio 4 (8 punti)
Un sottile disco conduttore di raggio a e resistività ρ è immerso in un campo $B = B_0 \sin(\omega t)$ uniforme e parallelo all'asse del disco. Si ricavi l'espressione della densità di corrente indotta J in funzione della distanza dall'asse del disco, specificandone la direzione e il verso in relazione a quello scelto per $\vec{B}$.



Domanda
Calcolare la capacità di un condensatore cilindrico riempito di dielettrico.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 16 Febbraio 2016

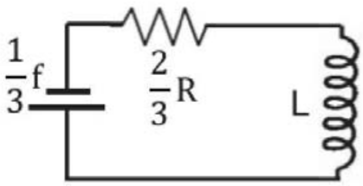
Esercizio 1

$$\text{Gauss: } 4\pi r^2 E_r = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{-7q+3q}{\varepsilon_0} = \frac{-4q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E_r = \frac{-q}{\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

$$V_g = \int_b^\infty E_r dr = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_b^\infty = -\frac{q}{\pi\varepsilon_0 b}.$$

Esercizio 2

Con il teorema di Thevenin, il circuito si può semplificare:



$$I = \frac{f}{2R}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \qquad \tau = \frac{3L}{2R}$$

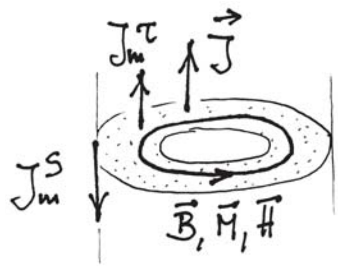
$$W_L = LI\frac{dI}{dt} = \frac{f^2}{6R}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad W_g = \frac{f^2}{3R}+I\frac{f}{3} = \frac{f^2}{3R}+\frac{f^2}{6R}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

in quanto la potenza totale fornita dal generatore W_g è pari a quella calcolata dal circuito equivalente più quella dissipata nelle due resistenze se non ci fosse l'induttanza.

Esercizio 3

$$2\pi r H = I_{conc}(r) \quad \rightarrow \quad H = \frac{J\pi\left(r^2-a^2\right)}{2\pi r} \text{ per } a \leq r \leq b.$$

$$\vec{J_m^\tau} = \text{rot}\vec{M} = \text{rot}\left(\chi_m \vec{H}\right) = \chi_m \text{rot}\vec{H} = \chi_m \vec{J} = (\mu_r - 1)\,\vec{J}.$$

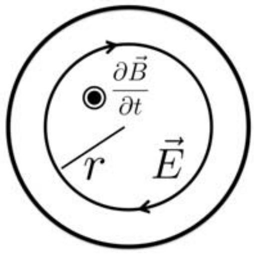


Sulla superficie esterna, $\vec{J_m^S}$ è diretto come in figura per materiali ferromagnetici o paramagnetici mentre si inverte per materiali diamagnetici.

$$\vec{J_m^S} = \vec{M}\times\hat{n} = \hat{t}\,(\mu_r - 1)\,\frac{J\pi(b^2-a^2)}{2\pi b},$$

dove $\hat{n}$ è la normale alla superficie e $\hat{t}$ ha la stessa direzione ma verso opposto rispetto a $\vec{J}$. Sulla superficie interna, $\vec{J_m^S}$ è nullo perchè $\vec{H}$ è nullo.

Esercizio 4



$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \omega B_0 \cos(\omega t)\hat{z}$$

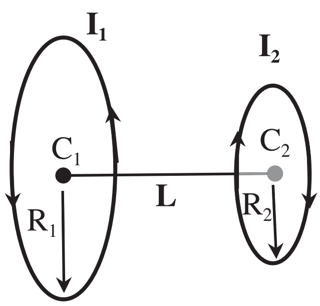
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{S(r)} \vec{B}\cdot\hat{n}dS = -\pi r^2 \omega B_0 \cos(\omega t)$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 2\pi r E \qquad \left|\vec{E}\right| = \frac{B_0\omega r\cos(\omega t)}{2} \qquad \left|\vec{J}\right| = \frac{B_0\omega r\cos(\omega t)}{2\rho}$$

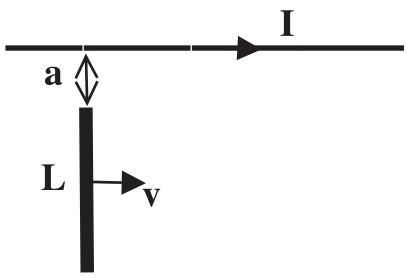
UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2015 – 2016 – Ing. Elettrica
Esame di Fisica II
Prova scritta del 18 Aprile 2016

1. Una sfera metallica, caricata con una carica Q, è ricoperta da un sottile strato di materiale dielettrico di spessore trascurabile e di costante dielettrica ε_r. Calcolare la carica di polarizzazione esistente sulla superficie esterna del dielettrico per $\varepsilon_r = 3$ e $Q = 3$ μC.
(8 punti)

2. Due spire circolari di raggi rispettivamente R_1 ed R_2 sono percorse in senso inverso dalle correnti I_1 ed I_2. Sapendo che le spire sono disposte su piani paralleli con i due centri C_1 e C_2 sull'asse comune delle due circonferenze e alla distanza L, determinare per quale valore di L viene annullato il campo magnetico nel punto C_1. Determinare inoltre il modulo del vettore **B** nel punto C_2.
(8 punti)



3. Una barretta conduttrice di lunghezza L si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}$, mantenedosi perpendicolare ad un filo rettilineo percorso dalla corrente stazionaria I. Sia **a** la distanza fra un estremo della barretta dal filo. Ricavare l'espressione della differenza di potenziale ΔV che si stabilisce fra gli estremi della barretta.
(8 punti)



4. Sia dato un condensatore in aria, piano, di superficie $\boldsymbol{S}$, di spessore $\boldsymbol{d}$ e ai cui capi è applicata una differenza di potenziale variabile nel tempo $V = a + bt$ con a e b costanti note. Determinare la corrente di spostamento.
(8 punti)

Domanda
Ricavare il potenziale elettrostatico per una carica puntiforme, per una distribuzione continua su dominio tridimensionale. Ricavare inoltre il potenziale in tutto lo spazio per un filo di densità lineare di carica λ.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2015 – 2016 – Ing. Elettrica
Esame di Fisica II
Soluzioni della prova scritta del 18 Aprile 2016

1)

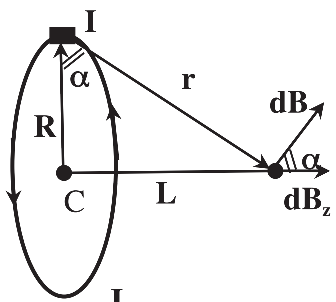
$$\sigma_{pol} = p = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$Q_{pol} = 4\pi\sigma_{pol}R^2 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}Q = 2\ \mu\text{C}$$

2)

Applicando la 1ª formula di Laplace all'elemento sorgente Idl: $d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} Id\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$ da cui

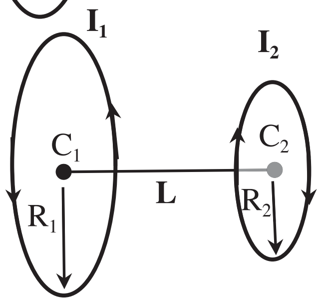
il modulo $dB = \frac{\mu_o Idl}{4\pi r^2}$



Il contributo efficace è però proiettato lungo l'asse z

$$dB_z = dB\cos\alpha = \frac{\mu_o Idl}{4\pi r^2}\frac{R}{r} \Rightarrow B = \oint dB_z = 2\pi R\frac{\mu_o IR}{4\pi r^3} = \frac{\mu_o I}{2}\frac{R^2}{\left[R^2 + L^2\right]^{3/2}}$$

Le due spire sono percorse da correnti circolanti in senso inverso producendo lungo l'asse contributi magnetici inversi che si annullano in C_1



$$B(C_1) = B^{(1)} + B^{(2)} = \frac{\mu_o I_1}{2R_1} - \frac{\mu_o I_2 R_2^2}{2\left[R_2^2 + L^2\right]^{3/2}} = 0 \quad \text{da cui}$$

$$\left[R_2^2 + L^2\right]^{3/2} = \frac{I_2}{I_1}R_2^2 R_1 \quad \text{ed infine} \quad L = \sqrt{\left(\frac{I_2}{I_1}R_2^2 R_1\right)^{2/3} - R_2^2}$$

Nel punto C_2 invece vale $B(C_2) = \frac{\mu_o}{2}\left(\frac{I_1 R_1^2}{\left[R_1^2 + L^2\right]^{3/2}} - \frac{I_2}{R_2}\right)$

3)

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},\ F = qvB(r),\ E(r) = \frac{F}{q} = vB(r)$$

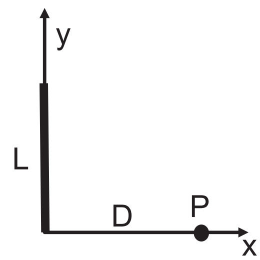
$$\Delta V = |V(B) - V(A)| = \left|\int_a^{a+L} E(r)dr\right| = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

4)

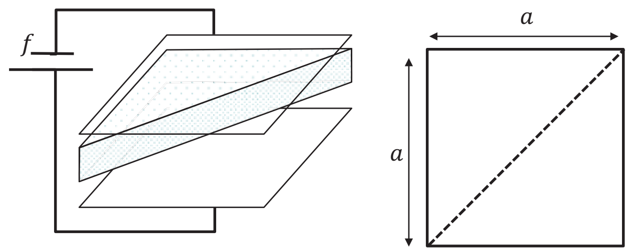
$$I_{spost} = SJ_{spost} = S\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{S\varepsilon_0}{d}\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{S\varepsilon_0}{d}b$$

UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2015 – 2016 – Ing. Aerospaziale
Esame di Fisica II (9 CFU)
Prova scritta del 17 Giugno 2016

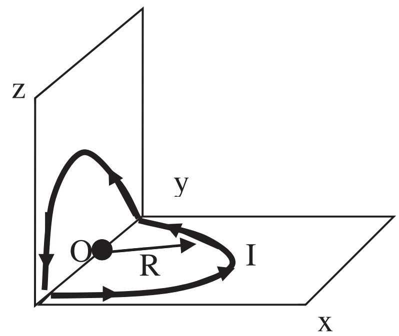
A1) Una carica Q è distribuita uniformemente su un filo rettilineo di lunghezza L disposto lungo l'asse y con un estremo nell'origine. Determinare la componente diretta lungo y (E_y) del campo elettrico in un punto P posto sull'asse x a distanza $D = L$ dall'origine.



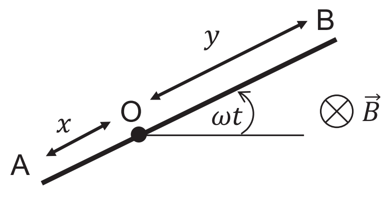
A2) Un condensatore piano di superficie quadrata di lato a e distanza tra le armature d, è collegato ad un generatore di differenza di potenziale f. Successivamente, senza scollegare il generatore, tra le due armature viene inserita una lastra conduttrice triangolare di lato a, di spessore $d/2$, neutra, isolata, e posta come in figura. Trascurando gli effetti di bordo, calcolare la variazione di energia potenziale del condensatore.



A3) Un circuito elettrico percorso dalla corrente continua I è formato da due tratti semicircolari di stesso raggio R, concentrici ma non complanari giacenti sui piani xy ed yz rispettivamente. Determinare il vettore induzione magnetica che viene generato nel centro O comune alle due semiconferenze fornendo il valore della intensità, direzione e verso.



A4) Una sottile barretta conduttrice ruota con velocità angolare costante ω intorno all'asse O posto a distanza x e y dai suoi due estremi. Essa è immersa in un campo di induzione magnetica stazionario ed uniforme $\vec{B}$ orientato come in figura. Si calcoli la differenza di potenziale $V_A - V_B$ tra i capi della barretta.

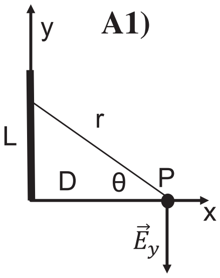


Rispondere ai seguenti quesiti:

B1) Discutere la forza elettromotrice e i generatori elettrici.

B2) Ricavare il vettore di Poynting e discuterne l'interpretazione fisica.

Soluzioni



A1)

$$\lambda = \frac{Q}{L} \qquad dE_y = \frac{\lambda dy \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad r = \frac{D}{\cos\theta} \qquad y = D\tan\theta \qquad dy = \frac{D}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$dE_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 D^2}\sin\theta\, d\theta \qquad E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 D^2}\int_0^{\pi/4}\sin\theta\, d\theta\ = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 D^2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

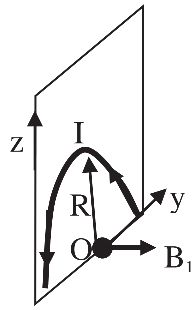
A2)

$C_{in} = \varepsilon_0 \frac{a^2}{d}$. Il sistema finale è equivalente a due condensatori in parallelo. Quello senza la lastra inserita ha superficie pari a $a^2/2$, distanza tra le armature d, e capacità $C_1 = \varepsilon_0 \frac{a^2}{2d}$

Il condensatore che contiene la lastra ha superficie pari a $a^2/2$ e distanza tra le armature pari a $d - d/2 = d/2 \Rightarrow C_2 = \varepsilon_0 \frac{a^2}{d} \Rightarrow C_f = C_1 + C_2 = \frac{3}{2}\varepsilon_0 \frac{a^2}{d}$

$$\Delta U = \frac{1}{2}f^2\left(C_f - C_{in}\right) = \frac{1}{4}f^2\varepsilon_0\frac{a^2}{d}$$

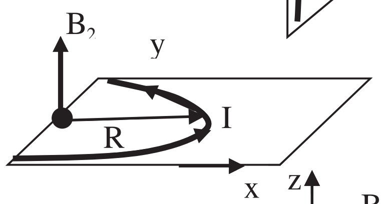
A3)



Il campo magnetico generato da una semispira nel centro O vale la metà di quello generato da una spira circolare completa. Direzione e verso sono calcolati con la regola della mano destra

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{2}\frac{\mu_o I}{2R}\hat{i}$$

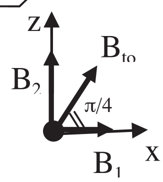
Analogamente per la semispira orizzontale



$$\vec{B}_2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_o I}{2R}\hat{k}$$

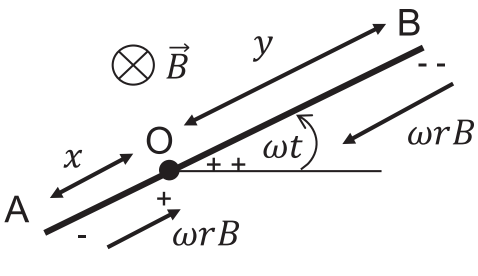
La combinazione dei due campi fornisce

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_o I}{2R}\left(\hat{i} + \hat{k}\right)$$ che giace nel piano *xz*



di modulo $B_{tot} = \frac{\sqrt{2}\mu_o I}{4R}$ con direzione inclinata di 45° sull'orizzontale

A4)

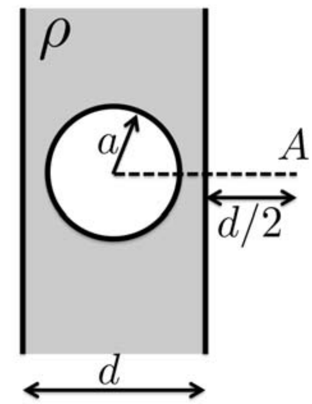


$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_s\, dl = \int_B^A \omega rB\, dr =$$

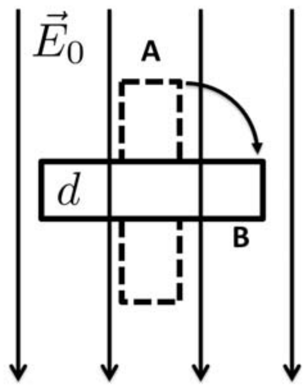
$$\int_B^O \omega rBdr + \int_O^A \omega rBdr = \frac{1}{2}\omega B(y^2 - x^2)$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 15 Luglio 2016

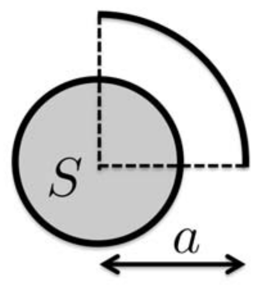


Esercizio 1 (8 punti)
Una carica è distribuita in modo uniforme, con densità di volume ρ, in un volume a forma di lastra di spessore d ed indefinita nelle altre due dimensioni. Nel centro della lastra esiste una cavità sferica vuota, di raggio $a < d/2$. Si ricavi l'espressione del campo elettrico $\vec{E}$ in un punto A a distanza $d/2$ dalla faccia più vicina della lastra, su una retta che passa per il centro della cavità sferica, normale alla lastra.



Esercizio 2 (8 punti)
Un disco sottile di dielettrico omogeneo e isotropo (costante dielettrica relativa ε_r, area S e spessore d) è immerso in un campo elettrostatico uniforme nel vuoto $\vec{E}_0$. Calcolare l'espressione del lavoro che bisogna compiere mediante forze esterne per portare il disco dalla posizione A (disco parallelo ad $\vec{E}_0$) alla posizione B (disco perpendicolare ad $\vec{E}_0$). Tale lavoro è positivo o negativo?

Esercizio 3 (8 punti)
Un filo rettilineo e di sezione circolare di raggio a è percorso da una corrente stazionaria I distribuita uniformemente. Il filo è nel vuoto ed è di lunghezza molto maggiore di a. Assumendo unitaria la permeabilità relativa del rame, si ricavi l'espressione dell'energia magnetica U_H per unità di lunghezza presente nella zona occupata dal filo.



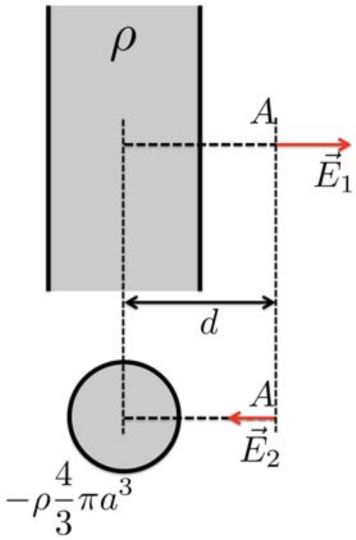
Esercizio 4 (8 punti)
Un solenoide nel vuoto, lungo e compatto, di sezione circolare S=100cm^2 e densità dell'avvolgimento di n=10spire/cm, è percorso da una corrente $I = I_0 \sin(2\pi\ f\ t)$ con I_0=2A e frequenza f=1.5kHz. All'esterno c'è un filo conduttore che descrive un quarto di circonferenza di raggio a e coassiale al solenoide . Calcolare la massima differenza di potenziale presente fra le estremità del filo.

Domanda
In una regione di spazio priva di cariche e correnti, nel vuoto, è presente un campo elettrico $\vec{E}(t)$ variabile nel tempo. Il campo $\vec{B}$ che si genera ha componenti $B_x = -ay$, $B_y = ax$ e $B_z = 0$. Scrivere l'equazione di Maxwell che lega $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ in questo caso; inoltre, sapendo che $\vec{E}(t = 0) = 0$, si determini l'andamento temporale del campo elettrico.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 15 Luglio 2016

Esercizio 1
Consideriamo il campo $\vec{E}_1$ generato da una lastra intera in A ed il campo $\vec{E}_2$ generato da una sfera carica con densità $-\rho$ in A. Il punto A dista d dal centro della lastra e della sfera.

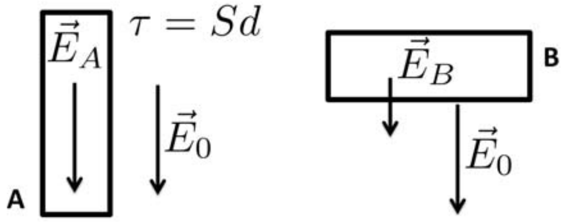


$$E_1 = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \quad \text{dal Teo. di Gauss,}$$

$$E_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi a^3\frac{1}{d^2} = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 d^2} \quad \text{dal Teo. di Gauss.}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \ \rightarrow \ E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{d}{2} - \frac{a^3}{3d^2}\right).$$

Esercizio 2
Il volume del disco è $\tau = Sd$. Il lavoro $L_{A\to B}$ sarà la differenza fra le energie in U_B e U_A.



$$L_{A\to B} = U_B - U_A = \left(\frac{1}{2}\varepsilon E_B^2 - \frac{1}{2}\varepsilon E_A^2\right)\tau =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{E_0^2}{\varepsilon_r^2} - \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E_0^2\right)Sd = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 Sd\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - \varepsilon_r\right) < 0.$$

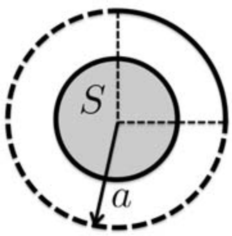
Esercizio 3
Sia C una circonferenza di raggio $r < a$, centro sull'asse del filo e S una superficie nomale all'asse del filo che abbia C come bordo, dal teorema di Ampere è

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\, dS \text{ con } J = \frac{I}{\pi a^2} \ \rightarrow \ 2\pi r B(r) = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\pi r^2 \ \rightarrow \ B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{a^2},\ H(r) = \frac{I\ r}{2\pi a^2}$$

Dalla denisità di energia magnetica u_H, si può ricavare U_H per un tratto di lunghezza ℓ del filo

$$U_H = \int_{\text{filo}} u_H d\tau = \int\left(\frac{1}{2}BH\right)2\pi r dr\ell \quad \longrightarrow \quad \frac{U_H}{\ell} = \frac{1}{2}\mu_0\frac{I^2}{(2\pi)^2}\frac{2\pi}{a^4}\int_0^a r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

Esercizio 4

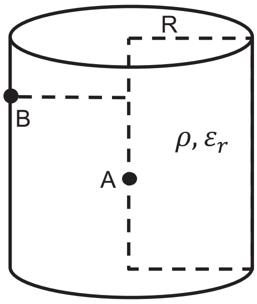


$$\left|\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell}\right| = E2\pi a = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = S\left|\frac{dB}{dt}\right| \ \rightarrow \ E = \frac{1}{2\pi a}\mu_0 n I_0 2\pi\ f\ S\left|\cos\left(2\pi\ f\ t\right)\right|$$

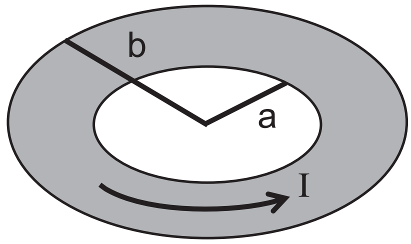
$$\Delta V_{max} = E_{max}\ a\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\mu_0 n I_0 2\pi\ f\ S \approx 59\text{mV}$$

UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2015 – 2016 – Ing. Elettrotecnica
Esame di Fisica II
Prova scritta del 16 Settembre 2016

1. Si supponga la Terra come una sfera conduttrice carica di raggio R_T. Noto il suo potenziale elettrostatico V_T rispetto ad un punto all'infinito, si calcoli la forza agente su una carica elettrica q posta in vicinanza della superficie terrestre.
(**PUNTI 8**)



2. Un lungo cilindro omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica ε_r e raggio R, possiede una densità di carica di volume ρ uniforme. Calcolare la differenza di potenziale $V_A - V_B$ tra i punti A e B indicati in figura.
(**PUNTI 8**)



3. Sulla spira circolare in figura, di raggio interno a e raggio esterno b scorre una corrente stazionaria I. Ricavare l'espressione del campo B (modulo, direzione e verso) al centro della spira. (**PUNTI 8**)

4. Una spira quadrata (di lato **a** e resistenza **R**), è immersa in un campo $B=B_0 \cos(2 \pi \nu t)$ diretto secondo l'asse z; la normale al piano della spira è diretta anche essa lungo z. Si calcoli l'ampiezza della corrente massima circolante nella spira, trascurando fenomeni di autoinduzione. (**PUNTI 8**)

Teoria
Ricavare corrente e tensione in funzione del tempo nel caso di un condensatore di un capacità C che si scarica su una resistenza R.

Soluzioni

1)

$\vec{F} = q\vec{E}$ $\qquad E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r}$ $\qquad V(r) = \dfrac{Q_{terra}}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{R_T}{r} V_T$

$F(r \approx R_T) = qE_r(r \approx R_T) = q\dfrac{V_T}{R_T}$

2)

Utilizzando il teorema di Gauss su una superficie cilindrica coassiale al cilindro dato, di raggio generico $r < R$ ed altezza a

$\Phi(\vec{D})_{cil} = Q_{cil}^{int}$ $\qquad \Phi(\vec{D})_{cil} = Da2\pi r$ $\qquad Q_{cil}^{int} = \rho a \pi r^2$ $\qquad D = \dfrac{\rho r}{2}$

$\mathrm{E} = \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$ $\qquad V_A - V_B = \displaystyle\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^R \frac{\rho r}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r} dr = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0 \varepsilon_r}$

3)

$dB_z = \dfrac{\mu_0 dI}{2r}$ $\qquad dI = \dfrac{I}{b-a} dr$

$B_z = \displaystyle\int_a^b \frac{\mu_0 I}{2r(b-a)} dr = \frac{\mu_0 I}{2(b-a)} \ln\frac{b}{a}$

4)

$\Phi_{spira} = B_0 a^2 \cos(2\pi\nu t)$ $\qquad f_{em} = -\dfrac{d\Phi}{dt} = B_0 a^2 2\pi\nu \sin(2\pi\nu t)$

$I_{max} = \dfrac{f_{em}^{max}}{R} = \dfrac{B_0 a^2 2\pi\nu}{R}$

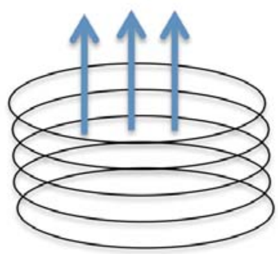
UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2015 – 2016 – Ing. Elettrotecnica
Esame di Fisica II
Prova scritta del 28 Settembre 2016

1. Una carica -2q sia uniformemente distribuita su una superficie sferica di raggio a. Al centro della sfera ci sia una carica positiva q. Calcolare il campo elettrico $\vec{E}$ ed il potenziale V ovunque, assumendo $V(\infty) = 0$; fare anche un grafico approssimativo della componente significativa del campo elettrico $\vec{E}$ e del potenziale V.
(**PUNTI 8**)

2. Sono dati due condensatori piani in vuoto con capacita' C_1 = 1 nF . In uno di essi e' inserita una lastra di dielettrico con costante dielettrica relativa ε_r = 3.5 che riempie completamente lo spazio fra le armature. I due condensatori vengono collegati in parallelo e connessi a una generatore con f.e.m. = 100 V e poi scollegati dal generatore. Calcolare la differenza di energia elettostatica del sistema se in questa configurazione si estrae lentamente il dielettrico.
(**PUNTI 8**)

3. Un cavo coassiale e' costituito da due superfici cilindriche coassiali di raggio R1 e R2. Una corrente I fluisce in un verso nel conduttore interno e in verso opposto nel conduttore esterno. Calcolare l'induttanza per unita' di lunghezza e l'energia magnetica immagazzinata nel cavo per unita' di lunghezza. (**PUNTI 8**)

4. Una bobina costituita da N = 100spire, di sezione S = 100 cm^2 e resistenza totale R= 5 Ω e' posta in una zona di spazio dove vi e' un campo B uniforme, perpendicolare alla sezione della bobina. Il campo B varia nel tempo aumentando linearmente da zero al valore B_0 = 0.8 T in un tempo Δt=10s. Calcolare la f.e.m. indotta nella bobina durante l'intervallo Δt e il lavoro totale speso nel tempo Δt. (**PUNTI 8**)

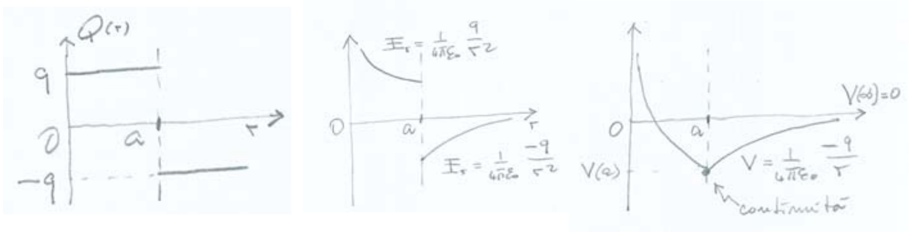


Teoria
Enunciare e dimostrare le condizioni di raccordo per il campo E e il campo D all'interfaccia fra due dielettrici.

Soluzioni

1)

In simmetria sferica $\vec{E} = \hat{r}\ \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\frac{Q(r)}{r^2}$



Per $\quad 0 \le r \le a$

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^{\infty} E_r dr = \int_r^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}dr + \int_a^{\infty}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{a}\right)$$

2)

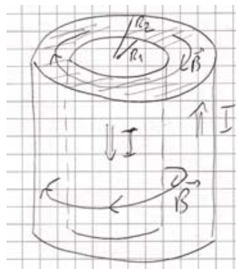
La carica totale è costante e vale Q_0=C_i ΔV con ΔV= f.e.m., la capacità iniziale C_i =C_1 (1+ε_r) e la capacità finale C_i =2 C_1.

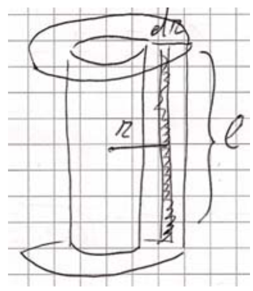
$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{Q_0^2}{2C_f} - \frac{Q_0^2}{2C_i} = \frac{Q_0^2}{2C_1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\epsilon_r}\right) = \frac{Q_0^2}{2C_1}\frac{\epsilon_r - 1}{2(1+\epsilon_r)} = \frac{C_1 \Delta V^2}{4}(\epsilon_r^2 - 1) \simeq 3\times 10^{-5} J$$

3)

Il campo B è nullo ovunque eccetto che nella regione compresa fra R_1 ed R_2 dove vale

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad R_1 \le r \le r_2$$





$$\Phi(B) = \int_{sezione} \vec{B}\cdot\hat{n}dS = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ell dr = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\Phi(B)}{I\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$\frac{U_L}{\ell} = \frac{1}{2\mu_0 \ell}\int_{cilindro} B^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0\ell}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 2\pi\ell r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

4)

$$\Phi = NSB = \frac{NSB_0}{\Delta t}t \qquad f.e.m. = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{NSB_0}{\Delta t} = -8\cdot 10^{-2}V \quad q = \int_0^{\Delta t}\frac{f.e.m.}{R}dt = -\frac{NSB_0}{R} = -0.16C$$

$$Lavoro = q f.e.m. = \frac{N^2S^2B_0^2}{R\Delta t} = 1.28\cdot 10^{-2} J$$