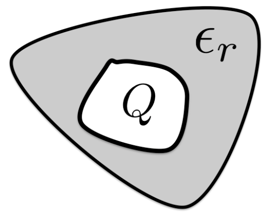
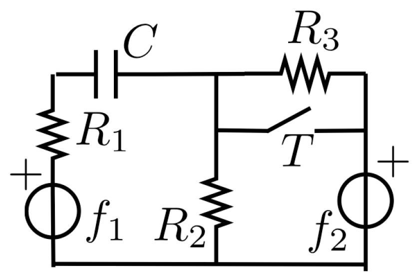
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 18 Gennaio 2017

Esercizio 1 (8 punti)
Un conduttore di forma geometrica irregolare, carico con carica Q=-1nC, è completamente circondato da una sostanza dielettrica omogenea ed isotropa, di costante dielettrica relativa ε_r=5, anche questa di forma irregolare. Calcolare il valore della carica complessiva di polarizzazione Q_P^{ext} che si distribuisce sulla superficie esterna del dielettrico.



Esercizio 2 (8 punti)
Il circuito in figura è inizialmente a regime con l'interruttore T aperto. Calcolare il lavoro L_1 compiuto dal generatore f_1 dall'istante in cui si chiude l'interruttore fino al raggiungimento della nuova condizione di equilibrio. (f_1=9V, f_2=16V, R_1=100Ω, R_2=50Ω, R_3=150Ω, $C = 10\mu$F)



Esercizio 3 (8 punti)
Un disco circolare omogeneo di raggio a è caricato uniformemente con una carica totale Q. Si calcoli il valore dell'intensità del campo magnetico H sul suo asse a distanza h (con $h \gg a$) dal centro, quando il disco ruota attorno all'asse n giri al minuto. (a=2cm, $Q = 3\mu$C, $h = 1$m e $n = 1200$).

Esercizio 4 (8 punti)
Lo spazio compreso tra le armature di un condensatore a facce piane e parallele (superficie S e separazione fra le armature h) è riempito di un liquido non perfettamente isolante, omogeneo ed isotropo di costante dielettrica $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-11}$F/m e resistività $\rho = 10^7$ Ωm. Ai capi del condensatore è applicata una d.d.p. $\Delta V(t) = V_0 \sin \omega t$ con $\omega = 250$rad/s. Calcolare il rapporto tra i valori massimi della corrente di spostamento e della corrente di conduzione.
Suggerimento: nel calcolo della corrente di conduzione considerare il liquido come un conduttore di resitività ρ e di dimensioni uguali a quelle del condensatore, mentre nel calcolo della corrente di spostamento considerarlo come un dielettrico di costante dielettrica ε.

Domanda
Dimostrare le espressioni del campo elettrico su asse e su piano mediano di un dipolo elettrico di momento di dipolo $p = q\delta$ a distanza $r \gg \delta$. Disegnarne anche approssimativamente le linee di campo in tutto lo spazio.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

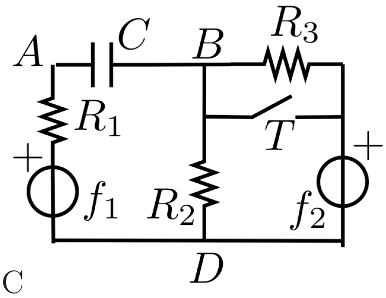
Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 18 Gennaio 2017

Esercizio 1

$$\sigma_P^{ext} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1\right) \vec{E} \cdot \hat{n} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1\right) \frac{\vec{D} \cdot \hat{n}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \vec{D} \cdot \hat{n}$$

$$Q_P^{ext} = \int_{Sup.Ext.} \sigma_P^{ext} dS = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \int_{Sup.Ext.} \vec{D} \cdot \hat{n} dS = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} Q = -8 \cdot 10^{-10} \mathrm{C}$$

Esercizio 2



La carica che attraversa il generatore f_1 durante il transitorio corrisponde alla variazione di carica ΔQ sulla armatura A del condensatore, essendo condensatore e generatore sullo stesso ramo

$$\textbf{T aperto}: \ \Delta V = V_A - V_B = f_1 - f_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad Q_i = C\Delta V = 5\ 10^{-5}\mathrm{C}$$

$$\textbf{T chiuso}: \ \Delta V = f_1 - f_2 \quad Q_f = C\Delta V = -7\ 10^{-5}\mathrm{C}$$

$$L_1 = f_1\ \Delta Q = (Q_f - Q_i) f_1 = -1.08\ 10^{-3}\mathrm{Joule}$$

Esercizio 3

Sul disco si ha una densità di carica $\sigma = Q/\pi a^2$ e sulla corona circolare di raggi r e $r + dr$ la carica è $dQ = 2\pi r \sigma dr$. Quando il disco ruota con periodo $T = 60/n$ s e velocità angolare $\omega = 2\pi/T$, la corrente che circola in una spira di raggio r è

$$dI = \frac{dQ}{T} = \sigma r \omega dr.$$

Tale corrente genera a distanza h sull'asse un campo H

$$dH = \frac{r^2 dI}{2\left(h^2 + r^2\right)^{3/2}} \simeq \frac{r^2 dI}{2h^3} \text{ per } h \gg r \geq a$$

come in una spira circolare di raggio r percorsa dalla corrente dI.

$$H = \frac{\sigma\omega}{2} \int_0^a \frac{r^3 dr}{h^3} = \frac{\sigma\omega}{8} \frac{a^4}{h^3} = \frac{Q a^2 \omega}{8\pi h^3} = 6\ 10^{-9}\mathrm{A/m}$$

Esercizio 4

Sia $i_c(t)$ la corrente di conduzione ed $i_s(t)$ quella di spostamento.

$$R = \rho h/S \quad i_c(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0 S}{\rho h} \sin\omega t = i_{0,c} \sin\omega t$$

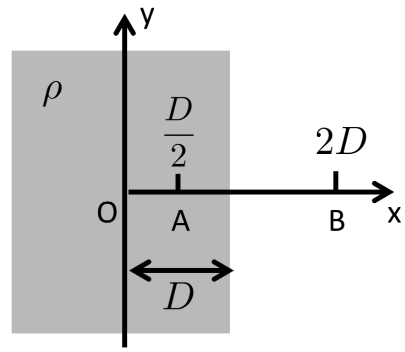
$$E = \frac{V(t)}{h}, \quad J_s = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{h} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\varepsilon V_0}{h} \omega \cos\omega t, \quad i_s(t) = J_s S = \frac{\varepsilon V_0 \omega S}{h} \cos\omega t = i_{0,s} \cos\omega t.$$

$$\frac{i_{0,s}}{i_{0,c}} = \rho \varepsilon \omega = 0.1.$$

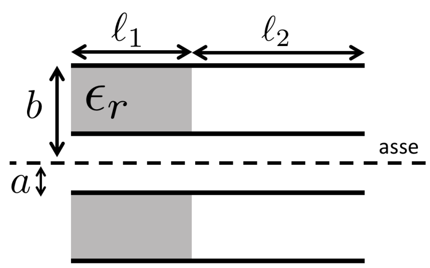
Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 20 Febbraio 2017

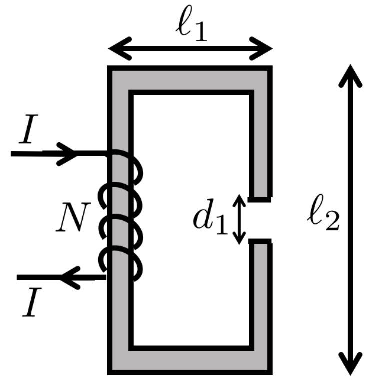
Esercizio 1 (8 punti)
Nello spazio compreso fra due piani paralleli, posti a distanza $2D$ l’uno dall’altro è distribuita in modo uniforme una carica elettrica positiva con densità di volume ρ (strato spesso indefinito ed uniformemente carico); all’esterno c’è il vuoto. Ricavare la differenza di potenziale $\Delta V = V(A) - V(B)$ tra il punto A $(D/2, 0)$ ed il punto B (2D,0) nel sistema di riferimento indicato in figura.



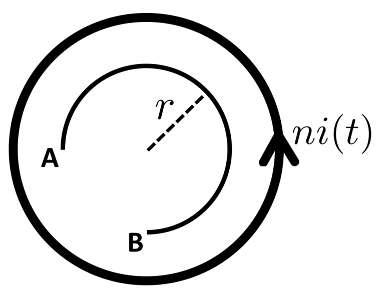
Esercizio 2 (8 punti)
Un condensatore cilindrico è riempito da una estremità e per un tratto ℓ_1 con un dielettrico isotropo ed omogeneo di costante dielettrica relativa ε_r. L’altra parte del condensatore, lunga ℓ_2, è nel vuoto. Sulle armature è stata posta la carica Q. Calcolare la capacità C del condensatore e la frazione di carica che si trova nella parte di armature nel vuoto e la frazione relativa alla parte con dielettrico. Considerare $a, b \ll \ell_1, \ell_2$ e trascurare gli effetti di bordo.



Esercizio 3 (8 punti)
L’elettromagnete indicato in figura (ℓ_1=1m, ℓ_2=0.5m e sezione costante S=100cm^2) è fatto di ferro dolce ed è alimentato da un avvolgimento di $N = 100$ spire percorse da corrente costante I=10A. Calcolare il lavoro che bisogna compiere sul magnete per ridurre a metà lo spessore del traferro (valore iniziale d_1=10cm). Per il ferro dolce prendere $\mu_r = 1500$. Trascurare il flusso disperso e considerare B_0 uniforme nel traferro.



Esercizio 4 (8 punti)
Un solenoide nel vuoto, lungo e compatto, di sezione circolare e densità dell’avvolgimento n spire/m, è percorso da una corrente $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$ quasi stazionaria. All’interno c’è un filo conduttore che descrive tre quarti di circonferenza di raggio r e coassiale al solenoide. Calcolare l’espressione della differenza di potenziale $\Delta V(t) = V_A - V_B$ presente fra le estremità del filo.

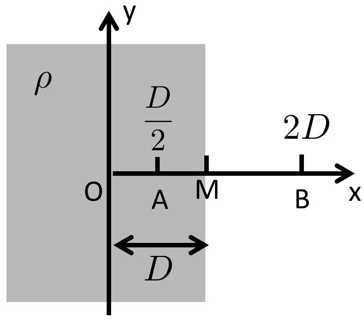


Domanda
Ricavare le condizioni di raccordo fra i campi $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{D}}$ all’interfaccia fra due mezzi dielettrici diversi.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 20 Febbraio 2017

Esercizio 1



$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\ell = \int_A^M \vec{E} \cdot d\ell + \int_M^B \vec{E}_0 \cdot d\ell$$
$$x < D: \quad E(x) = \rho x/\varepsilon_0 \qquad x > D: \quad E(x) = \rho D/\varepsilon_0$$
$$\Delta V = \int_{D/2}^{D} \frac{\rho}{\varepsilon_0} x dx + \int_D^{2D} \frac{\rho D}{\varepsilon_0} dx = \cdots = \frac{11}{8} \frac{\rho D^2}{\varepsilon_0}$$

Esercizio 2

Il sistema è formato da due condensatori cilindrici in parallelo

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r 2\pi \ell_1}{\ln(b/a)}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 2\pi \ell_2}{\ln(b/a)} \quad \rightarrow \quad C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} (\epsilon_r \ell_1 + \ell_2)$$

Se ΔV è la differenza di potenziale fra le armature quando la carica è Q, cioè $Q = (C_1 + C_2)\,\Delta V$:

$$Q_1 = C_1 \Delta V = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q \quad \rightarrow \quad \frac{Q_1}{Q} = \frac{\epsilon_r \ell_1}{\epsilon_r \ell_1 + \ell_2}$$
$$Q_2 = C_2 \Delta V = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q \quad \rightarrow \quad \frac{Q_2}{Q} = \frac{\ell_2}{\epsilon_r \ell_1 + \ell_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q}$$

Esercizio 3

Il lavoro L è pari alla variazione di energia magnetica $L = \Delta U_{magnetica} = U_{magnetica}^{iniziale} - U_{magnetica}^{finale}$

$$U_{magnetica} = \left(\frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} \tau\right)_{traferro} + \left(\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_r \mu_0} \tau\right)_{ferro}.$$

Per calcolare B e B_0 si usa la legge di Hopkinson (per uno spessore del traferro d)

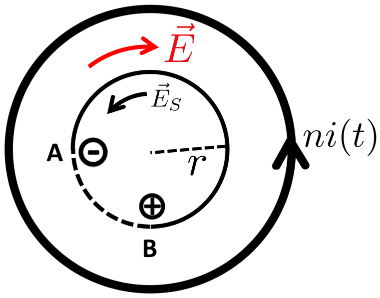
$$N\ I = \Re \Phi(B) = \Re\ S\ B \qquad B = B_0 = \frac{NI}{\Re\ S} \quad \text{con la riluttanza } \Re = \frac{2(\ell_1 + \ell_2 - d)}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{d}{\mu_0 S}.$$

$$U_{magnetica} = \frac{1}{2} \frac{B^2 S}{\mu_0} \left[d + \frac{2(\ell_1 + \ell_2 - d)}{\mu_r}\right] = \frac{\mu_0 S}{2} \frac{(N\ I)^2}{2(\ell_1 + \ell_2)/\mu_r + d(1 - 1/\mu_r)} = U_m(d)$$

Trascurando $1/\mu_r$ rispetto a 1, si ottiene

$$L = U_m(d_1) - U_m\left(\frac{d_1}{2}\right) = \frac{\mu_0 S (N\ I)^2}{2} \left[\frac{1}{2(\ell_1 + \ell_2)/\mu_r + d_1} - \frac{1}{2(\ell_1 + \ell_2)/\mu_r + d_1/2}\right] \approx -2\pi\ 10^{-2} \text{J}$$

Esercizio 4



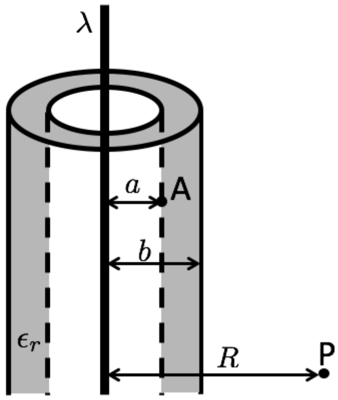
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \;\rightarrow\; \vec{E} = \mu_0 \frac{r}{2} n I_0 \omega \cos{(\omega t)} \hat{t}.$$

Quando la corrente $i(t)$ cresce (come rappresentato in figura), all'estremo **A** si accumula una carica negativa (ed una positiva si accumula in **B**); quindi lungo il conduttore è presente il campo $\vec{E_S} = -\vec{E}$ stazionario.

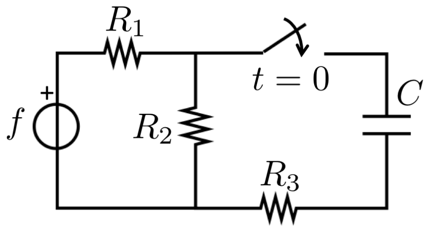
$$\Delta V(t) = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E_S} \cdot d\vec{\ell} = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \left[-\mu_0 \frac{r}{2} n I_0 \omega \cos{(\omega t)}\right] \left(\frac{3}{2}\pi r\right) = -\mu_0 \frac{3\pi r^2}{4} n I_0 \omega \cos{(\omega t)}$$

Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
Ingegneria Elettrotecnica

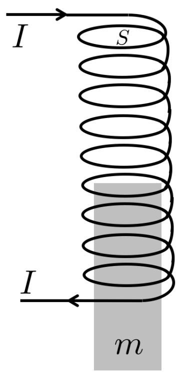
Prova scritta di Fisica 2 - 24 Marzo 2017



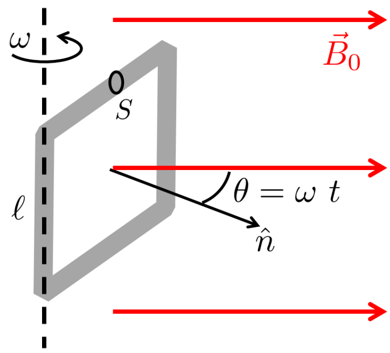
Esercizio 1 (8 punti)
Un lungo filo rettilineo è uniformemente carico con densità lineare di carica λ. Tale filo costituisce l'asse di un lungo guscio cilindrico di dielettrico scarico, omogeneo ed isotropo di costante dielettrica relativa ε_r=4, raggio interno a e raggio esterno b. Tutto il sistema è disposto nel vuoto. Calcolare la differenza di potenziale $V_P - V_A$ tra un punto P posto a distanza R dal filo carico ed un punto A posto sulla faccia interna del guscio cilindrico (cioè a distanza a dal filo carico).



Esercizio 2 (8 punti)
Nel circuito in figura, il condensatore è scarico inizialmente. All'istante $t = 0$ l'interruttore si chiude. Determinare la costante di tempo τ della carica del condensatore e l'energia U_C immagazzinata nel condensatore una volta carico ($R_1 = R_2 = 200\Omega,\ R_3 = 150\Omega,\ C = 2\mu\text{F},\ f = 100\text{V}$).



Esercizio 3 (8 punti)
Un cilindro di materiale magnetico con permeabilità relativa μ_r=3000, massa $m = 5$kg e sezione $S = 1\text{cm}^2$ è parzialmente inserito all'interno di un solenoide costituito da $n = 1000$spire/m e sezione praticamente uguale ad S. Il cilindro è libero di scorrere senza attrito lungo l'asse verticale del solenoide parallelo all'asse del cilindro (vedi figura). Calcolare la corrente che deve scorrere nel solenoide perchè la forza di risucchio compensi la forza peso mg impedendo al cilindro di cadere.



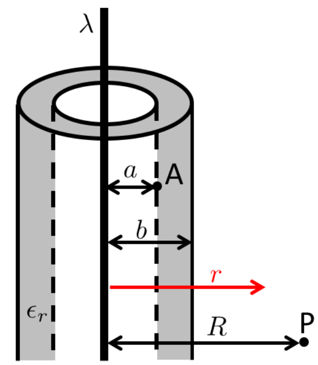
Esercizio 4 (8 punti)
Una spira quadrata di lato $\ell = 20$cm formata da un filo omogeneo di sezione costante $S = 1\text{mm}^2$ e resistività $\rho = 2\ 10^{-8}\Omega$m ruota con velocità angolare $\omega = 4$rad/s intorno ad un proprio lato. La spira è immersa in un campo $B_0 = 0.5$T uniforme e perpendicolare all'asse di rotazione della spira; l'angolo fra la normale alla spira $\hat{n}$ e $\vec{B}_0$ è $\theta(t) = \omega t$. Calcolare la resistenza R della spira e l'energia U_{giro} dissipata in un giro ovvero in un periodo $T = 2\pi/\omega$.

Domanda
Ricavare il potenziale, il campo elettrico sull'asse e sul piano trasverso di un dipolo elettrico a distanze molto maggiori della distanza fra le cariche. Esprimere i risultati in termini del momento di dipolo $\vec{p}$.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni della prova scritta di Fisica 2 - 24 Marzo 2017

Esercizio 1



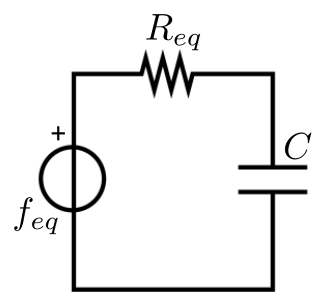
$$V_P - V_A = \int_P^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_R^b E_0(r) dr + \int_b^a E(r) dr$$

$$D = D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad \text{e} \quad D_n \text{ è continua}$$

$$a < r < b: \quad \varepsilon_0 \varepsilon_r E(r) = D(r) \qquad r > b: \quad \varepsilon_0 E_0(r) = D(r)$$

$$V_P - V_A = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{R}{b}\right) + \frac{1}{\varepsilon_r}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

Esercizio 2

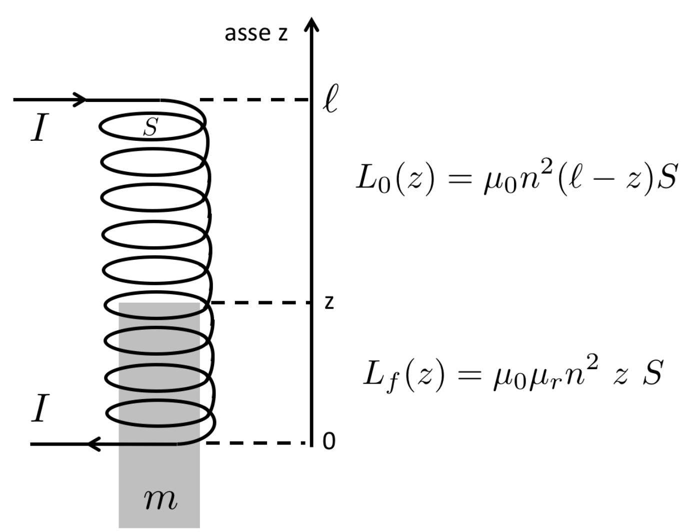


$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 + R_3 = 250\Omega \quad \text{e} \quad \tau = R_{eq} C = 500\mu\text{s}$$

$$f_{eq} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} f = f/2 = 50\text{V}$$

$$U_C = \frac{1}{2} C f_{eq}^2 = 25 \; 10^{-4}\text{J}$$

Esercizio 3



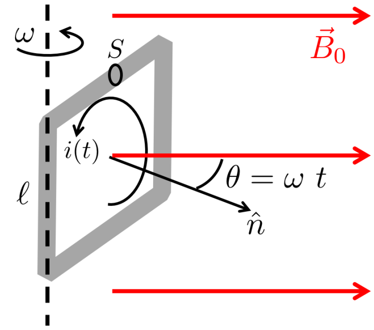
$$U_M = \frac{1}{2} L_f I^2 + \frac{1}{2} L_0 I^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 S \left[(\mu_r - 1) z + \ell\right] I^2$$

All'equilibrio la forza di risucchio F_z compensa la forza peso mg

$$F_z = \frac{dU_M}{dz} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 S (\mu_r - 1) I^2 = mg$$

$$I = \sqrt{\frac{2mg}{\mu_0 n^2 S (\mu_r - 1)}} \approx 16.5\text{A}$$

Esercizio 4



$$R = 4\rho\frac{\ell}{S} = 16\text{m}\Omega$$

$$\Phi\left(\vec{B}_0\right) = \vec{B}_0 \cdot \vec{n}\ell^2 = \ell^2 B_0 \cos\theta = \ell^2 B_0 \cos(\omega t)$$

$$i(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\ell^2 B_0 \omega}{R}\sin(\omega t)$$

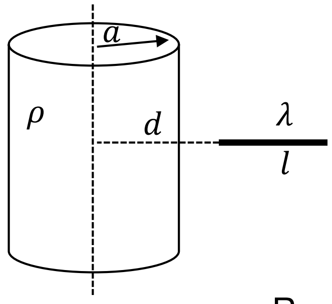
$$W(t) = Ri^2(t) = \frac{\ell^4 B_0^2 \omega^2}{R}\sin^2(\omega t) = \frac{\ell^3 B_0^2 \omega^2 S}{4\rho}\sin^2(\omega t)$$

$$U_{\text{giro}} = \int_0^T W(t)dt = \frac{\pi \ell^3 B_0^2 \omega S}{4\rho} = \frac{\pi}{10}\text{J} = 0.314\text{J}$$

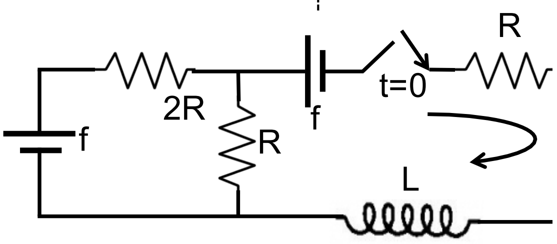
UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 12 Giugno 2017

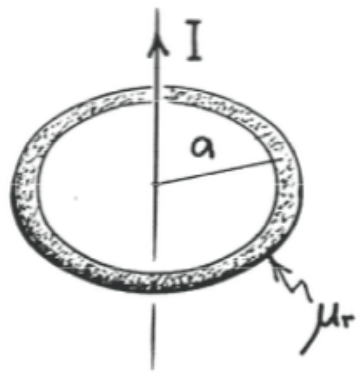
Esercizio 1 (8 punti)
Date due distribuzioni uniformi di carica, una cilindrica infinita di raggio a e densità ρ e una lineare di lunghezza l e densità λ a distanza $d > a$ dal cilindro come in figura, determinare la forza esercitata tra le due distribuzioni.



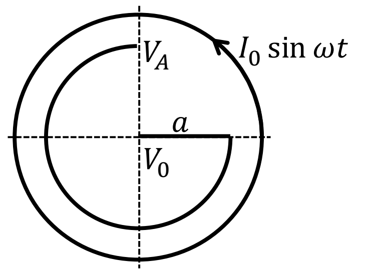
Esercizio 2 (8 punti)
Nel circuito in figura l'interruttore si chiude al tempo t=0. Si calcoli l'espressione della corrente I(t) nell'induttore, riferendosi al verso indicato, e assumendo il regime quasi stazionario



Esercizio 3 (8 punti)
Un lungo filo rettilineo percorso dalla corrente stazionaria *I=10A* è disposto sull'asse di un sottile anello materiale di permeabilità magnetica μ_r*=3* e raggio medio *a=10cm*. Si calcoli il modulo della corrente superficiale di magnetizzazione J_m^S e se ne indichi direzione e verso.



Esercizio 4 (8 punti)
Dato un solenoide infinitamente lungo con n spire per unità di lunghezza percorso da una corrente $I = I_0 \sin \omega t$, determinare la differenza di potenziale $V_0 - V_A$ tra i due punti del conduttore rappresentato in figura.

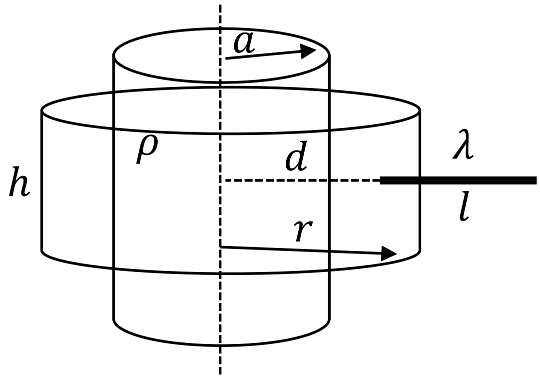


Domanda

Illustrare un esempio in cui la legge di Faraday-Neumann-Lenz è giustificata dalla forza di Lorentz.

Soluzioni

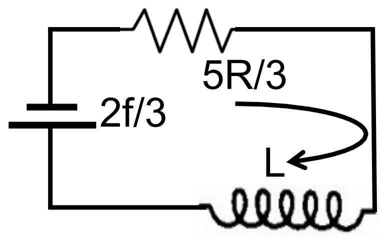
Esercizio 1)



$$E_r \cdot 2\pi r h = \frac{\rho \pi a^2 h}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E_r = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}$$

$$F_r = \int_d^{d+\ell} E_r \cdot \lambda dr = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} \int_d^{d+\ell} \frac{dr}{r} = \frac{\rho \lambda a^2}{2\varepsilon_0} \ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$$

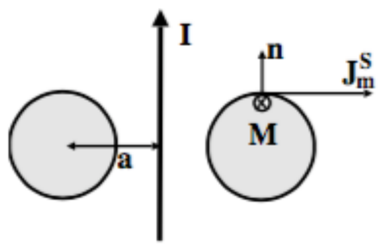
Esercizio 2)



per Thevenin

$$I(t) = I_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad \longrightarrow \quad I_\infty = -\frac{2}{5}\frac{f}{R}, \quad \tau = \frac{3L}{5R}$$

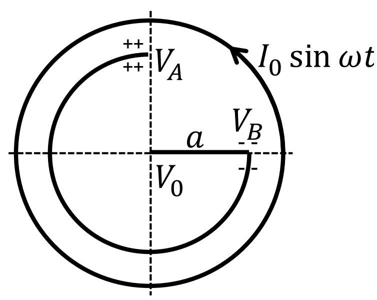
Esercizio 3)



$$\text{Ampere:} \quad 2\pi a H = I \quad \rightarrow \quad H = \frac{I}{2\pi a}$$

$$\vec{J_m^S} = \vec{M} \times \hat{n} \quad J_m^S = M = \chi_m H = (\mu_r - 1)\frac{I}{2\pi a} = 2\frac{10}{2\pi 10^{-1}} \simeq 30\text{A/m}$$

Esercizio 4)



Il campo elettromotore nel solenoide ha linee di forza circolari ed è diretto in verso orario (opposto alla corrente del solenoide). Tale campo lungo il conduttore a distanza a dal centro vale

$$2\pi a E = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi a^2 \mu_0 n \omega I_0 \cos \omega t \qquad \Longrightarrow \qquad |E| = \frac{a \mu_0 n \omega I_0 \cos \omega t}{2}$$

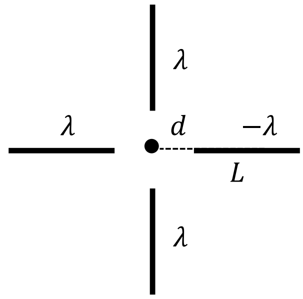
L'integrale del campo lungo il raggio è nullo per cui

$$V_0 - V_A = V_B - V_A = -f_i(B \rightarrow A) = -\frac{3}{2}\pi a |E| = -\frac{3\pi a^2 \mu_0 n \omega I_0 \cos \omega t}{4}$$

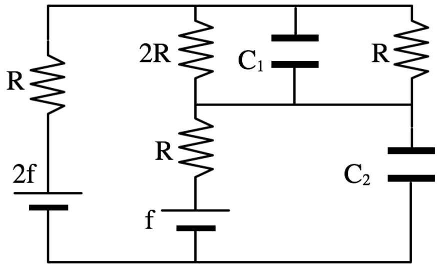
UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 14 luglio 2017

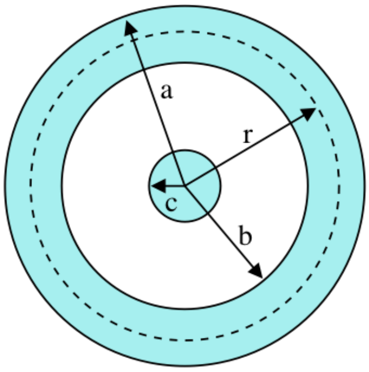
Esercizio 1 (8 punti)
Una carica è distribuita uniformemente su quattro segmenti di lunghezza L, disposti a distanza d dal centro O con densità lineare λ su tre segmenti $-\lambda$ e sul quarto. Si calcoli l'espressione del potenziale $V(O)$ assumendo $V(\infty) = 0$.



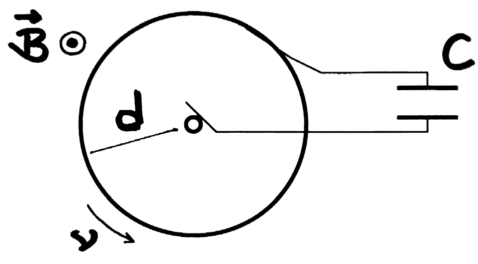
Esercizio 2 (8 punti)
Il circuito in figura è in regime stazionario. Calcolare il rapporto Q_1/Q_2 tra le cariche di C_1 e $C_2 = 2\ C_1$.



Esercizio 3 (8 punti)
Si consideri un cavo coassiale di raggi a, b e c. In ciascuno dei due conduttori scorre una corrente I distribuita in maniera uniforme, in versi opposti. Si determini l'espressione del modulo del campo magnetico $B(r)$ negli intervalli (1) $r < c$, (2) $c<r<$b, (3) $b<r<a$ e (4) $r > a$.



Esercizio 4 (8 punti)
Un disco conduttore di raggio d è posto in rotazione attorno al suo asse a una frequenza ν, mantenuta costante. Il disco è immerso in un campo B stazionario e uniforme, parallelo all' asse. Mediante contatti striscianti i due elettrodi di un condensatore di capacità C sono posti rispettivamente in contatto con l'asse e il bordo del disco. Calcolare la carica a regime del condensatore e indicarne il segno sulle due armature, assumendo i seguenti valori numerici:
$d=10cm, B=0.1T, \nu=100Hz, C=10^{-6}F.$



Domanda

Ricavare l'espressione della prima equazione di Maxwell nel vuoto e discuterla (dandone anche una rappresentazione grafica).

Soluzioni

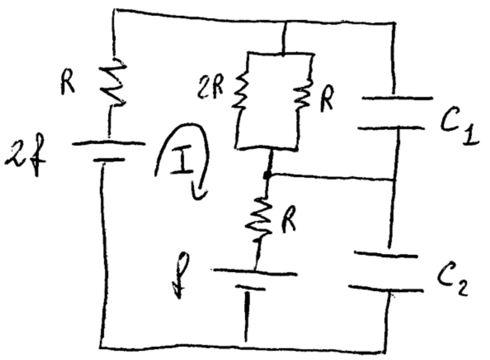
Esercizio 1

Ogni elemento infinitesimo di carica $dq = \lambda d\ell$ di filo posto a distanza ℓ dall'estremità genera nel punto O un potenziale:

$$dV_1 = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_0(\ell + d)} \quad \longrightarrow \quad V_1 = \int_0^L \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\ell}{(\ell+d)} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)$$

$$V(O) = (3-1)V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)$$

Esercizio 2



$$R_{tot} = R_{\parallel} + 2R = \frac{2}{3}R + 2R = \frac{8}{3}R$$

$$f_{tot} = 2f - f = f \qquad I = \frac{f_{tot}}{R_{tot}} = \frac{3f}{8R}$$

$$V_1 = I R_{\parallel} = \frac{f}{4} \qquad V_2 = IR + f = \frac{11}{8}f$$

$$Q_1 = C_1V_1 = \frac{C_1 f}{4} \qquad Q_2 = C_2V_2 = \frac{11}{4}C_1 f \qquad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{11}$$

Esercizio 3

Dal teorema di Ampere applicato ad una circonferenza ℓ di raggio r e corrente concatenata I_{conc}:

$$\oint_\ell \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{conc} \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}I_{conc}(r)$$

- $r < c$

$$I \text{ uniforme} \quad \Rightarrow \quad I = J\pi c^2,\ J = \frac{I}{\pi c^2},\ I_{conc}(r) = J\pi r^2 = I\frac{r^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi c^2}r$$

- $c < r < b$

$$I_{conc}(r) = I \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- $b < r < a$
  Nel conduttore esterno la corrente è uniforme e quindi $I = J^{ext}\pi\left(a^2 - b^2\right)$

$$I_{conc}(r) = I - J^{ext}\pi\left(r^2 - b^2\right) = I\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2} \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}$$

- $r > a$

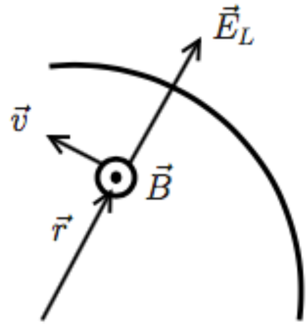
$$I_{conc}(r) = I - I = 0 \quad \Rightarrow \quad B(r) = 0$$

Esercizio 4

$$\vec{E}_L = \vec{v} \times \vec{B} = \omega B \vec{r} \qquad f_L = \int_{centro}^{bordo} \vec{E}_L \cdot d\vec{\ell} = \int_0^d \omega B r dr = \frac{1}{2}\omega B d^2$$

$$Q = C\Delta V = Cf = \frac{1}{2}\omega B d^2 C = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 10^2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} \simeq 3 \cdot 10^{-7} C = 0.3 \mu C$$

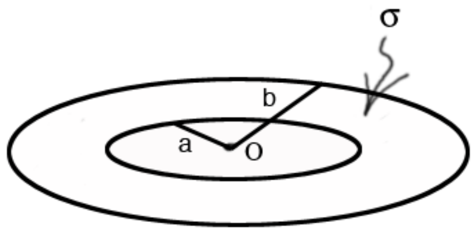
La carica è positiva in corrispondenza del bordo.



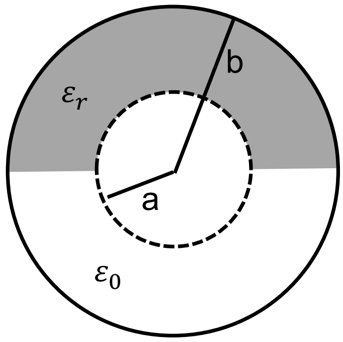
UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 - 15 settembre 2017

Esercizio 1 (8 punti)
Una carica statica nel vuoto è distribuita su una corona circolare di raggi a e b con densità superficiale σ=k/r, dove r è la distanza dal centro O, variabile tra a e b. Calcolare l'espressione del potenziale nel punto O supponendo V(∞)=0.

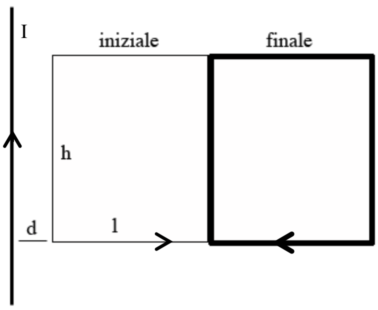


Esercizio 2 (8 punti)
Si consideri un condensatore sferico di raggi a e b (a<b) riempito per metà di dielettrico isotropo ed omogeneo con costante dielettrica relativa ε_r. Data una carica Q sulle sue armature, determinare la frazione di carica che si trova nella parte di armature nel vuoto e la frazione relativa alla parte con dielettrico. Determinate anche la capacità del condensatore.



Esercizio 3 (8 punti)
Un filo di rame indefinito, di raggio *a* è percorso da una corrente *I*. Calcolare il campo di induzione magnetica (modulo, direzione e verso) in tutto lo spazio considerando la permeabilità magnetica relativa del rame unitaria.

Esercizio 4 (8 punti)
La spira di lati h e l e resistenza R è immersa in un campo B di un lungo filo rettilineo nel vuoto percorso dalla corrente stazionaria I. La spira è spostata dalla posizione iniziale alla posizione finale, entrambe complanari al filo, mediante rotazione attorno al lato parallelo e più lontano rispetto al filo. Calcolare la carica Q che fluisce nella spira, col segno riferito al verso di percorrenza indicato, in seguito al cambiamento di posizione.

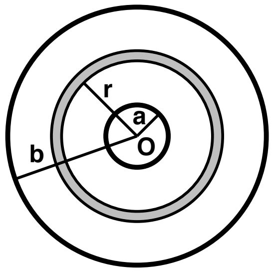


Domanda

Enunciare e dimostrare il teorema di Coulomb; ricavare inoltre la pressione elettrostatica.

Soluzioni

Esercizio 1



$$dV(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{k\ 2\pi r dr}{r^2} = \frac{k}{2\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

$$V(0) = \frac{k}{2\varepsilon_0}\int_a^b d(\ln r) = \frac{k}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Esercizio 2

Il campo elettrico ha simmetria radiale per cui si può scrivere

$$\int_S \vec{D}\cdot\hat{n}dS = D_0 2\pi r^2 + D_1 2\pi r^2 = Q \qquad D_0 = \varepsilon_0 E_0 \qquad D_1 = \varepsilon_0\varepsilon_r E_1$$

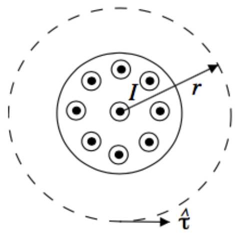
Nella zona di separazione tra i due mezzi si deve conservare la componente tangente di $\vec{E}$

$$E_0 = E_1 \qquad D_0 = \frac{D_1}{\varepsilon_r} \qquad D_0 = \frac{Q}{2\pi r^2(1+\varepsilon_r)} \qquad E = \frac{Q}{2\pi r^2\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)}\frac{b-a}{ab} \qquad C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)ab}{b-a}$$

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 E_0(a) \qquad Q_0 = \sigma_0 2\pi a^2 = \frac{Q}{(1+\varepsilon_r)} \qquad Q_1 = Q - Q_0 = \frac{Q\varepsilon_r}{(1+\varepsilon_r)}$$

Esercizio 3



Sia $\hat{z}$ orientato come la corrente I (uscente dal foglio). Il campo $\mathbf{B}$ dipende solo dalla distanza dall'asse r: per simmetria $\mathbf{B}(r) = B(r)\hat{\tau}$. Dal teorema di circuitazione di Ampere applicato ad una cammino circolare ℓ di raggio r e corrente concatenata I_{conc}, si ottiene

$$\oint_\ell \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{conc} \quad \text{cioè} \quad B(r) = \frac{\mu_0 I_{conc}}{2\pi r}.$$

Il modulo della densità di corrente J vale $I/\pi a^2$.

$$r < a \quad I_{conc} = I\frac{\pi r^2}{\pi a^2} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I\ r}{2\pi a^2}\hat{\tau}$$

$$r > a \quad I_{conc} = I \quad \text{e} \quad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\tau}$$

Esercizio 4

$$Q = \frac{\Phi_{in} - \Phi_{fin}}{R} \quad \text{con} \quad \Phi_{fin} = \int_{d+\ell}^{d+2\ell}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}hdr = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\ln\left(\frac{d+2\ell}{d+\ell}\right) \quad \text{e} \quad \Phi_{in} = -\frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\ln\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$$

$$Q = -\frac{\mu_0 Ih}{2\pi R}\left[\ln(d+2\ell) - \ln(d+\ell) + \ln(d+\ell) - \ln(d)\right] = -\frac{\mu_0 Ih}{2\pi R}\ln\left(\frac{d+2\ell}{d}\right)$$