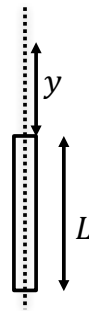




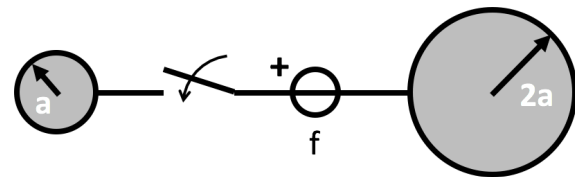
Esercizio 1 (8 punti)

Una carica è distribuita con densità lineare uniforme λ su un filo di lunghezza L . Determinare il campo elettrico ed il potenziale ad una distanza y dal filo come in figura.



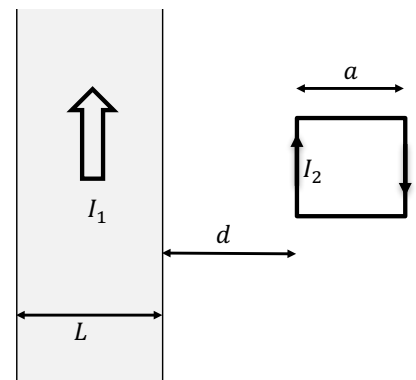
Esercizio 2 (8 punti)

Due sfere conduttrici di raggi a , e $2a$, poste a distanza tra loro molto superiore ad a , inizialmente scariche, sono collegate tramite un sottile filo conduttore (di capacità trascurabile), lungo il quale sono inseriti un generatore di forza elettromotrice f e un interruttore inizialmente aperto. Calcolare il lavoro che compie il generatore per raggiungere la nuova situazione stazionaria dopo la chiusura dell'interruttore.



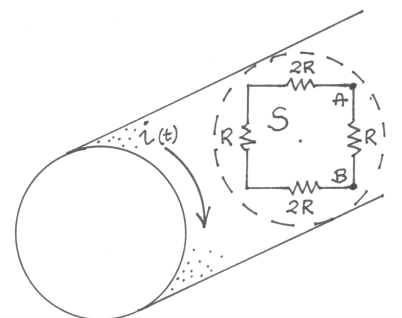
Esercizio 3 (8 punti)

Un nastro conduttore di larghezza L e lunghezza infinita è percorso da una corrente I_1 ed è posto ad una distanza d da una spira quadrata di lato a percorsa da una corrente I_2 . Determinare la forza che il nastro esercita sulla spira, specificando se è attrattiva o repulsiva.



Esercizio 4 (8 punti)

La corrente di un solenoide in aria, di densità d'avvolgimento n , è portata da 0 a un valore stazionario I nell'intervallo di tempo $0 < t < T$ con legge $i(t) = kt$ con $k = I/T$. Nella zona a campo uniforme all'interno del solenoide, centralmente e perpendicolarmente all'asse, è posta una spira quadrata d'area S , i cui lati hanno le resistenze indicate in figura. Si calcoli la differenza di potenziale $V_A - V_B$, nell'intervallo di tempo $0 < t < T$, assumendo $n = 10^3/m$, $I = 5A$, $T = 0,1s$, $S = 100cm^2$, e supponendo trascurabile l'autoinduzione.



Domanda

Ricavare la II equazione di Maxwell (rotore del campo elettrico) dalla legge di Faraday-Lenz e commentarla.

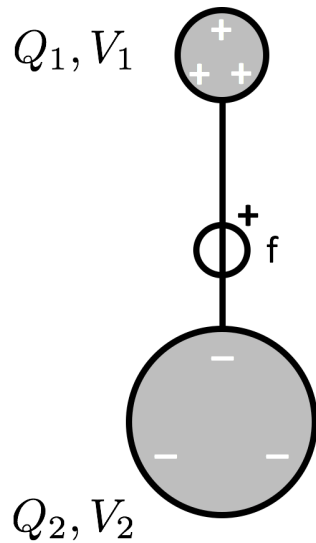
Soluzioni

Esercizio 1

$$E(y) = \int_y^{y+L} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{l^2} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{L+y} - \frac{1}{y} \right) = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 y(L+y)}$$

$$V(y) = \int_y^{y+L} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{l} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{y+L}{y}$$

Esercizio 2



Prima della chiusura $Q_1 = Q_2 = 0$

Dopo la chiusura

$$V_1 - V_2 = f \quad V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \quad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 2a}$$

$$Q_2 = -Q_1 \quad \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{1}{2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} = f$$

$$L = Q_1 f = \frac{2}{3} 4\pi\epsilon_0 a f^2$$

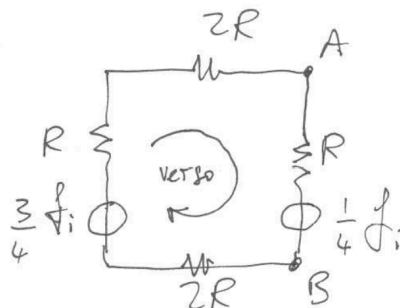
Esercizio 3

$$dB_{nastro} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \frac{dx}{L} \quad B_{nastro}(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi L} \int_0^L \frac{dx}{L+r-x} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi L} \log \frac{L+r}{r}$$

$$F = -I_2 a B_{nastro}(d) + I_2 a B_{nastro}(d+a) = -\frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi L} \log \frac{(L+d)(d+a)}{d(L+d+a)}$$

La forza è attrattiva.

Esercizio 4



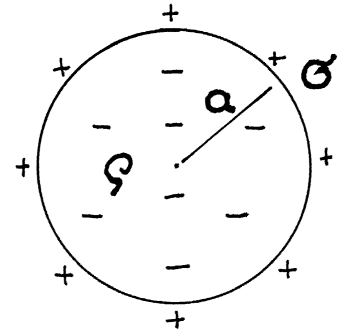
$$(V_A - V_B) + \frac{1}{4} f_i = R I_{ind}$$

$$V_A - V_B = R \left(-\frac{d\Phi/dt}{6R} \right) - \frac{1}{4} \left(-\frac{d\Phi}{dt} \right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \frac{d}{dt} [\mu_0 n i(t) S] = \frac{1}{12} \frac{\mu_0 n I S}{T} \simeq \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{10^{-1}} \simeq 50 \mu V$$



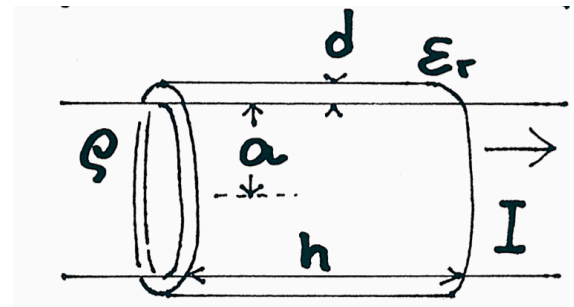
Esercizio 1 (8 punti)

Nel vuoto, su una superficie sferica di raggio a , è uniformemente distribuita una carica elettrica con densità σ . Altra carica elettrica è uniformemente distribuita in tutto il volume interno alla superficie sferica, con densità $\rho = -3\sigma/a$. Si calcoli l'espressione del potenziale elettrostatico $V(r)$ in tutto lo spazio, ponendo $V(\infty) = 0$.



Esercizio 2 (8 punti)

Un filo rettilineo, a sezione circolare di raggio a e resistività uniforme ρ , è percorso da corrente I . Su un tratto lungo h il filo è rivestito di una guaina dielettrica di costante ϵ_r e spessore d piccolo rispetto ad a e h . Si calcoli l'espressione del momento di dipolo elettrico $\vec{p}$ acquistato dal dielettrico, verificandone le dimensioni.

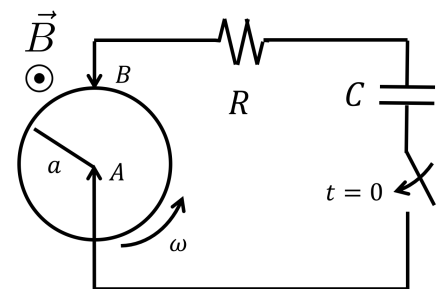


Esercizio 3 (8 punti)

Un solenoide lungo e compatto, di sezione circolare, lungo $\ell = 30\text{cm}$, è costituito da un avvolgimento con $N = 1000$ spire. Sapendo che la sua induttanza $L = 3 \cdot 10^{-3} \text{ H}$, si determini il raggio R della sua sezione circolare.

Esercizio 4 (8 punti)

Un disco di alluminio di raggio a ruota a velocità angolare ω uniforme. Il disco è immerso in un campo $\vec{B}$ uniforme e collegato ad una resistenza R ed una capacità C da un interruttore che si chiude ad un istante $t = 0$. Calcolare la corrente $I(t)$ che scorre nel circuito dopo la chiusura, l'energia U_R dissipata nella resistenza, U_C quella immagazzinata nella capacità ed U_{Disco} spesa dal motore che fa girare il disco. Trascurare la resistenza del disco e tutti gli attriti; il condensatore è scarico quando si chiude l'interruttore.



Domanda

Ricavare l'equazione di continuità ed usarla per dimostrare la legge dei nodi in un circuito elettrico.

Soluzioni

Esercizio 1

Simmetria sferica + Teorema di Gauss $\longrightarrow E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2}$

$$r < a : \quad Q(r) = -\frac{3\sigma}{a} \frac{4}{3}\pi r^3 = -\sigma 4\pi r^2 \frac{r}{a} \quad \longrightarrow \quad E_r = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{r}{a}$$

$$r > a : \quad Q(r) = 0 \quad \longrightarrow \quad E_r = 0$$

$$V(r) = V(\infty) + \int_r^\infty E_r dr'$$

$$r \geq a : \quad V(r) = V(\infty) = 0$$

$$r \leq a : \quad V(r) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 a} \int_r^a r' dr' + V(a) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0 a} (a^2 - r^2)$$

Esercizio 2

Nel conduttore il campo elettrico

$$E = \rho J = \rho \frac{I}{\pi a^2}$$

è tangente alla superficie del dielettrico. Dalla continuità di E_t ed essendo τ il volume del dielettrico

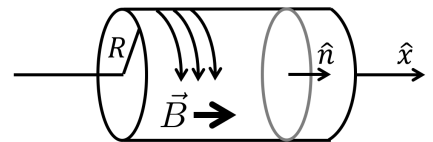
$$p = P\tau = \epsilon_0 \chi E \cdot 2\pi a h d = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \rho \frac{I}{\pi a^2} 2\pi a h d = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \rho I \frac{2hd}{a}.$$

Esercizio 3

$$L = \frac{\phi(\vec{B})}{I} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I N}{\ell} \hat{x}$$

$$\phi(\vec{B}) = N \phi_{1\text{ spira}}(\vec{B}) = N \int_{\text{spira}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \frac{\mu_0 N I}{\ell} N \pi R^2$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell} \quad R = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{L \ell}{\pi \mu_0}} = 1.5 \text{ cm}$$



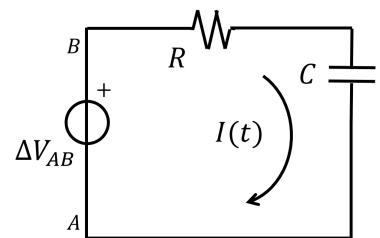
Esercizio 4

$$\Delta V_{AB} = \int_{\text{centro}}^{\text{bordo}} \omega r B dr = \int_0^a \omega r B dr = \frac{\omega B a^2}{2}$$

$$I(t) = \frac{\omega B a^2}{2R} e^{-t/\tau} \text{ con } \tau = RC.$$

$$U_R = \int_0^\infty R I^2 dt = \frac{\Delta V_{AB}^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = C \frac{\omega^2 B^2 a^4}{8} = U_C$$

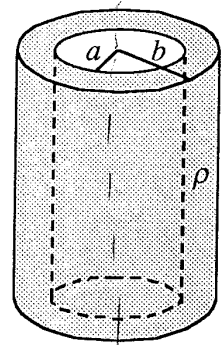
$$U_{\text{disco}} = U_R + U_C = 2U_R$$





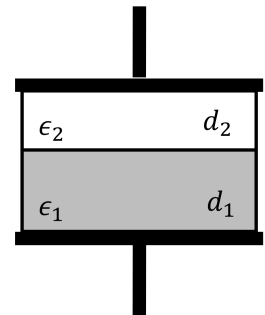
Esercizio 1 (8 punti)

All'interno di un cilindro indefinito di raggio interno a e raggio esterno b è distribuita una carica elettrica con densità di volume ρ uniforme. Calcolare l'andamento del campo elettrico in funzione della distanza r dall'asse di simmetria della distribuzione.



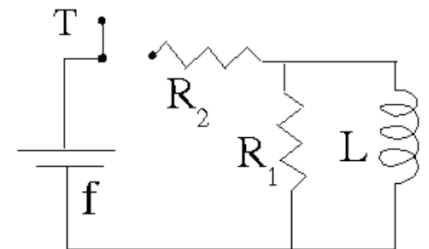
Esercizio 2 (8 punti)

Un condensatore piano con armature di area S è riempito da due lastre di dielettrico, una di spessore d_1 e di costante dielettrica ϵ_1 , l'altra di spessore d_2 e costante dielettrica ϵ_2 . Ai capi del condensatore è applicata una d.d.p. V_0 . Calcolare i valori E_1 e E_2 del campo elettrico nei due dielettrici e la densità di carica totale di polarizzazione σ_p^{TOT} sulla superficie di separazione dei due dielettrici



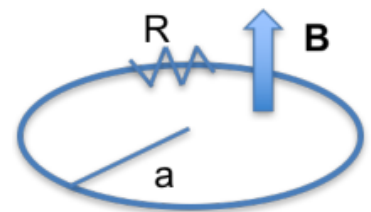
Esercizio 3 (8 punti)

Nel circuito in figura il tasto T viene chiuso a $t=0$. Ricavare l'espressione dell'energia U_R dissipata in R_1 dall'apertura del tasto fino a quando il sistema raggiunge nuovamente una situazione stazionaria.



Esercizio 4 (8 punti)

Una spira conduttrice circolare di raggio a e resistenza complessiva R è immersa in un campo $\mathbf{B}$ uniforme, diretto perpendicolarmente al piano della spira. Il modulo di $\mathbf{B}$ varia nel tempo come $B=B_0\sin(\omega t)$. Ricavare il valore della potenza media dissipata nella spira.



Domanda

Descrivere il moto di una carica q puntiforme di massa m e velocità $\vec{v}_0$ in un campo $\vec{B}$ costante nel tempo ed uniforme nello spazio.

Soluzioni

Esercizio 1

Dalla simmetria $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. Dal teorema di Gauss, scegliendo una superficie cilindrica di altezza h e raggio r , $2\pi r h E(r) = Q_{int}/\epsilon_0$.

$$r < a \quad Q_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad E(r) = 0$$

$$a < r < b \quad Q_{int} = \int_V \rho d\tau = \rho \int_a^r 2\pi r' h dr' = \rho \pi (r^2 - a^2) h \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\rho (r^2 - a^2)}{2\epsilon_0 r}$$

$$b < r \quad Q_{int} = \int_V \rho d\tau = \rho \int_a^b 2\pi r' h dr' = \rho \pi (b^2 - a^2) h \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\rho (b^2 - a^2)}{2\epsilon_0 r}$$

Esercizio 2

Condizioni di raccordo $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$

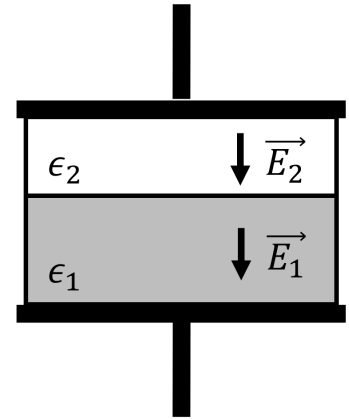
$$V_0 = d_1 E_1 + d_2 E_2 \quad \sigma_e = D_1 = D_2 = D \quad D = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_2 = \sigma_e$$

$$E_1 = \frac{\epsilon_2}{d_1 \epsilon_2 + d_2 \epsilon_1} V_0 = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \quad E_2 = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}$$

$$D = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}{d_1 \epsilon_{r2} + d_2 \epsilon_{r1}} V_0$$

$$\sigma_p^1 = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} D \quad \sigma_p^2 = \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} D$$

$$\sigma_p^{TOT} = \sigma_p^1 - \sigma_p^2 = \epsilon_0 \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{d_1 \epsilon_{r2} + d_2 \epsilon_{r1}} V_0$$



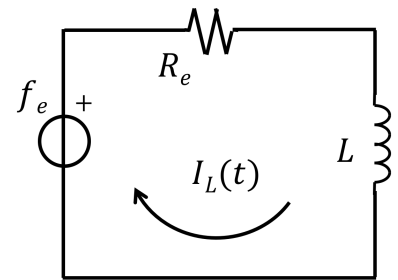
Esercizio 3

Considerando il circuito equivalente in figura

$$f_e = \frac{f}{R_1 + R_2} R_1 \quad R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_L = \frac{f_e}{R_e} (1 - e^{-t/\tau}) \text{ con } \tau = L/R_e$$

$$\begin{aligned} U_R &= \int_0^\infty R_1 I_{R_1}^2 dt = \int_0^\infty \frac{\Delta V_{R_1}^2}{R_1} dt = \int_0^\infty \frac{\Delta V_L^2}{R_1} dt = \\ &= \frac{1}{R_1} \int_0^\infty \left(-L \frac{dI_L}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{R_1} \int_0^\infty f_e^2 e^{-2t/\tau} dt = \frac{f_e^2 L}{2 R_1 R_e} \end{aligned}$$



Esercizio 4

$$f_{em} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} [\pi a^2 B_0 \sin \omega t] = -\pi a^2 B_0 \omega \cos \omega t$$

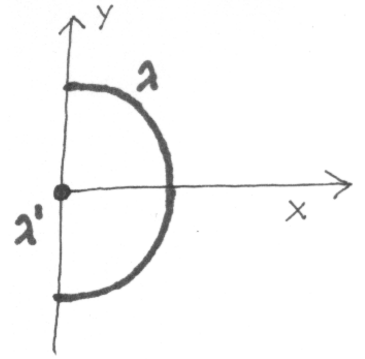
$$W(t) = R I^2 = R \left(\frac{f_{em}}{R} \right)^2 = \frac{\pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{R} \cos^2 \omega t$$

$$\langle W(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T W(t) dt = \frac{1}{T} \frac{\pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{R \omega} \int_0^T \cos^2 \omega t d(\omega t) = \frac{\pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{2R}$$



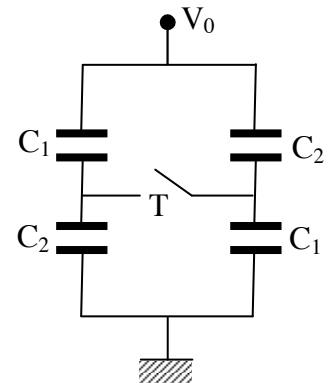
Esercizio 1 (8 punti)

Una carica è distribuita su due fili come mostrato in figura: 1) su un filo semicircolare posto sul piano (x,y) , con densità lineare λ uniforme; 2) su un filo rettilineo di lunghezza infinita perpendicolare allo stesso piano, con densità lineare λ' uniforme. Determinare l'espressione della forza $\vec{F}$ agente sul filo semicircolare.



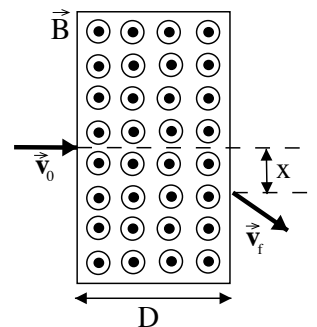
Esercizio 2 (8 punti)

Il sistema di condensatori in figura, con l'interruttore T aperto, viene caricato con una differenza di potenziale V_0 . Ad un certo istante, mantenendo fisso V_0 , viene chiuso l'interruttore. Determinare la carica totale che passa nell'interruttore fino al raggiungimento della nuova situazione di equilibrio.



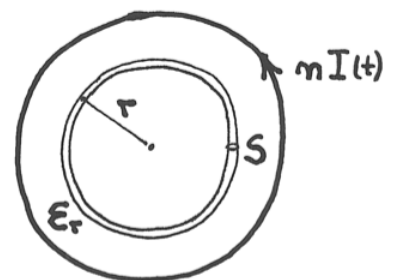
Esercizio 3 (8 punti)

Una particella di carica q viaggia a velocità v_0 . Durante il suo moto, attraversa una regione di larghezza D in cui è presente un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ noto e perpendicolare alla direzione della particella. Data la distanza x dalla traiettoria iniziale con la quale la particella esce dalla regione in cui è presente $\vec{B}$, determinare la massa m della particella e la sua velocità finale v_f . Determinare inoltre il valore limite della massa m_{lim} per cui la particella non riesce ad emergere a destra della regione suddetta.



Esercizio 4 (8 punti)

All'interno di un solenoide a sezione circolare, alimentato dalla densità di corrente quasi stazionaria $nI(t)=nI_0 \sin(\omega t)$, è inserito un anello coassiale di dielettrico omogeneo di costante ϵ_r , raggio r e sezione di area $S \ll \pi r^2$. Si calcoli l'espressione del vettore di polarizzazione $\vec{P}$ nel dielettrico. Calcolare inoltre la corrente di polarizzazione $i_p(t)$ presente nell'anello.

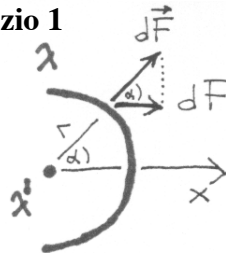


Domanda

Ricavare il potenziale di un dipolo elettrico a grande distanza, considerando nullo il potenziale all'infinito.

Soluzioni

Esercizio 1

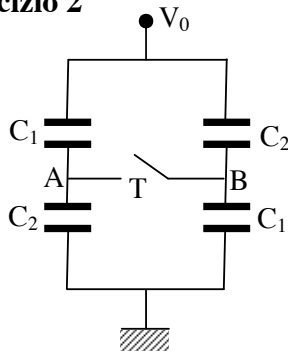


$$dF_x = dq E \cos \alpha = \lambda dl \cdot \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha =$$

$$= \lambda r \cdot d\alpha \cdot \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha = \frac{\lambda \lambda'}{2\pi\epsilon_0} \cos \alpha d\alpha$$

$$F_x = \frac{\lambda \lambda'}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda \lambda'}{\pi\epsilon_0}$$

Esercizio 2

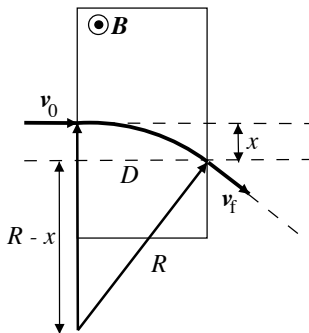


Nella situazione iniziale i due conduttori centrali di sinistra e di destra sono scarichi. I condensatori C_1 e C_2 sia di sinistra che di destra sono in serie con la stessa carica $q = V_0 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

Dopo che l'interruttore T è stato chiuso, tra A e B c'è lo stesso potenziale e quindi i due condensatori C_1 e C_2 in alto sono in parallelo così come i due in basso. Nel ramo A-B c'è un potenziale $V_0/2$. Ai capi dei due condensatori C_1 c'è una carica $q_1 = C_1 \frac{V_0}{2}$, ai capi di C_2 c'è una carica $q_2 = C_2 \frac{V_0}{2}$.

Il ramo conduttore centrale è ancora neutro, ma a destra c'è una carica $q_1 - q_2$ mentre a sinistra c'è una carica $q_2 - q_1$. Questo significa che la carica $q_2 - q_1$ è passata da destra a sinistra attraversando l'interruttore T. Tale carica vale $q_2 - q_1 = (C_2 - C_1) \frac{V_0}{2}$

Esercizio 3



$$(R - x)^2 + D^2 = R^2 \Rightarrow R = \frac{x^2 + D^2}{2x}$$

$$qvB = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow m = \frac{RqB}{v} \quad v_f = v_0$$

m_{lim} si ha quando $R = D$

Esercizio 4

$$\text{Faraday: } E 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \pi r^2 \rightarrow E = -\frac{d}{dt} (\mu_0 n I_0 \sin(\omega t)) \frac{r}{2} = -\mu_0 n I_0 \omega \frac{r}{2} \cos \omega t$$

Sia $\hat{t}$ versore tangente alla circonferenza di raggio r con verso antiorario,

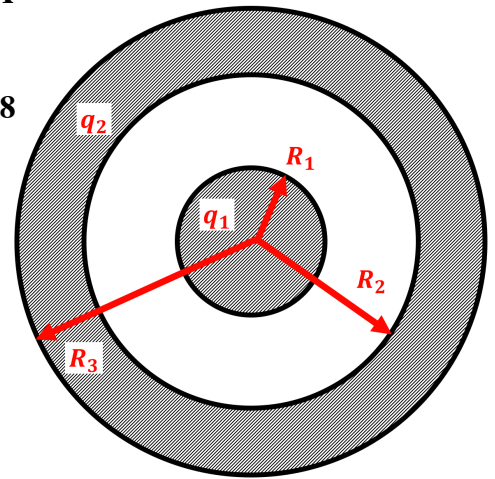
$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) n I_0 \omega \frac{r}{2} \cos \omega t \hat{t}.$$

$$i_p(t) = \frac{\partial P}{\partial t} S = \frac{d}{dt} (\epsilon_0 \chi E) S = \mu_0 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) n I_0 \omega^2 \frac{r}{2} S \sin(\omega t)$$



Esercizio 1 (8 punti)

Si abbiano due conduttori a forma di sfera (carica q_1) e di buccia sferica (carica q_2) concentriche, di dimensioni come in figura. Si calcoli il potenziale della sfera supponendo il sistema nel vuoto e assumendo nullo il potenziale all'infinito.

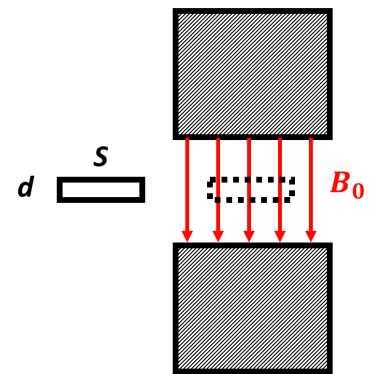


Esercizio 2 (8 punti)

Un condensatore di capacità C si scarica su una resistenza R . Dopo un tempo T , il condensatore perde $2/3$ della sua energia. Calcolare il valore della resistenza. ($C=4\mu\text{F}$ e $T=10\text{s}$)

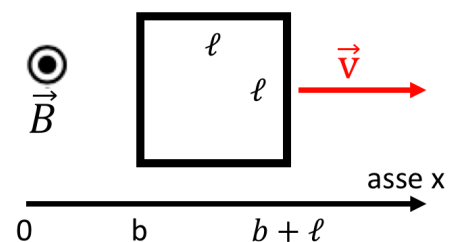
Esercizio 3 (8 punti)

Una lastra piana e sottile di area S e spessore d di materiale paramagnetico di suscettività χ_m è inizialmente al di fuori di una regione sede di campo magnetico uniforme, il cui valore B_0 è mantenuto costante. Calcolare la variazione ΔU dell'energia del campo magnetico per effetto dell'introduzione completa della lastra nel campo (posizione tratteggiata). ($S=100\text{cm}^2$, $d=0.2\text{cm}$, $B_0=1\text{T}$, $\chi_m=3.14 \cdot 10^{-4}$)



Esercizio 4 (8 punti)

Una spira rigida di lato $\ell=20\text{cm}$ e resistenza $R=0.1\Omega$ si muove di moto traslatorio come in figura con velocità costante $v=2\text{m/s}$. La spira è immersa in un campo $\vec{B}$ di modulo variabile con x secondo la legge $B = B_0 + a x$ con $a=0.5 \text{ T/m}$. Trascurando l'autoinduzione, calcolare il flusso $\Phi(\vec{B})$ attraverso la spira, la corrente i che vi scorre e la forza F_{ext} che è necessario applicare alla spira stessa per mantenerla in moto uniforme.



Domanda

Un condensatore piano le cui armature sono distanti d , ha una densità superficiale di carica libera σ . Il condensatore è riempito totalmente di un dielettrico isotropo, lineare, **non omogeneo** la cui $\chi_e = a z$ dove a è una costante e z è riferito ad un asse ortogonale alle armature con origine sull'armatura positiva e diretto verso quella negativa. Si esprima in funzione delle grandezze date $\vec{E}, \vec{P}, \rho_p(z)$ (la densità di volume di carica di polarizzazione in punto del dielettrico a distanza z) e $\sigma_p(0)$ e $\sigma_p(d)$, ovvero la densità superficiale di carica di polarizzazione in $z=0$ e $z=d$.

Soluzioni

Esercizio 1

$$V_{sfera} = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} + \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[q_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (q_1 + q_2) \frac{1}{R_2} \right]$$

Esercizio 2

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \text{ con } \tau = RC \text{ e } Q_0 \text{ la carica iniziale. } i(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/\tau}$$

L'energia persa dal condensatore in T è

$$U_T = \int_0^T i^2(t) R dt = -\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \left(e^{-\frac{2T}{\tau}} - 1 \right) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{2T}{\tau}} \right) \text{ che deve essere pari ai } 2/3 \text{ di quella iniziale}$$

$$U_0 \left(1 - e^{-\frac{2T}{\tau}} \right) = U_0 \cdot 2/3. \text{ Quindi } e^{-\frac{2T}{\tau}} = 1/3 \text{ e } \tau = RC = \frac{2T}{\ln 3}$$

$$R = \frac{2T}{C \ln 3} = 4.6 M\Omega \approx 5 M\Omega$$

Esercizio 3

La variazione di energia del campo nello spazio occupato dalla lastra è

$$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0(1 + \chi_m)} S d - \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} S d = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} S d \left(\frac{1}{1 + \chi_m} - 1 \right) = -\frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} S d = -2.5 \text{ mJ}$$

Esercizio 4

$$\Phi(\vec{B}) = \int_b^{b+\ell} (B_0 + ax) \ell dx = B_0 \ell^2 + \frac{1}{2} a \ell^2 (\ell + 2b)$$

$$|f_i| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} a \ell^2 2 \frac{db}{dt} = a \ell^2 v \quad i = \frac{f_i}{R} = \frac{a \ell^2 v}{R} = 0.4 A$$

La spira subisce una forza che la rallenta (nel verso negativo dell'asse x)

$$F_{mag} = i \ell B(b + \ell) - i \ell B(b) = i \ell^2 a = 8 \cdot 10^{-3} N$$

$$F_{ext} = -F_{mag} \text{ diretta nel verso positivo dell'asse x}$$

Domanda teoria

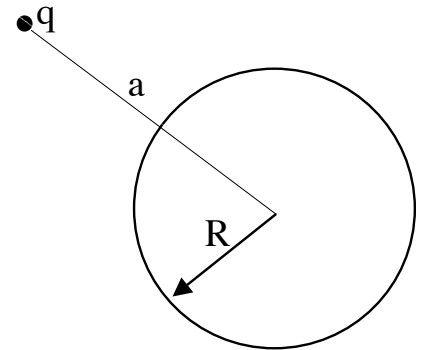
$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0(1 + \chi_e)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0(1 + \chi_e)} \hat{z} \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \frac{\sigma \chi_e}{1 + \chi_e} \hat{z} = \frac{\sigma a z}{1 + a z} \hat{z}$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = \dots = -\frac{\sigma a}{(1 + a z)^2} \quad \sigma_p(0) = 0 \quad \sigma_p(d) = \frac{\sigma a d}{1 + a d}$$



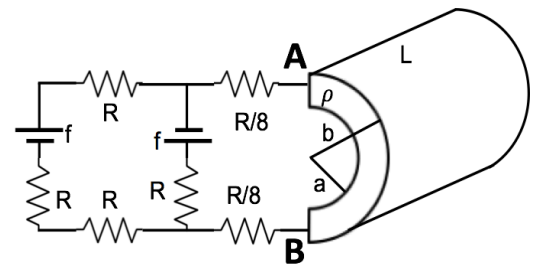
Esercizio 1 (8 punti)

Una carica puntiforme $q < 0$ di massa nota m si trova ferma ad una distanza a dal centro di una sfera cava di raggio $R = a/2$ caricata con densità di carica $\sigma > 0$. Sulla sfera è praticato un piccolo foro, di dimensioni trascurabili, attraverso il quale passa la carica puntiforme q . Determinare la carica totale della sfera, l'energia potenziale iniziale della carica q e quella quando la carica entra nella sfera cava (assumere il potenziale nullo all'infinito). Calcolare inoltre la velocità quando la carica q si trova ad una distanza $R/2$ dal centro della sfera.



Esercizio 2 (8 punti)

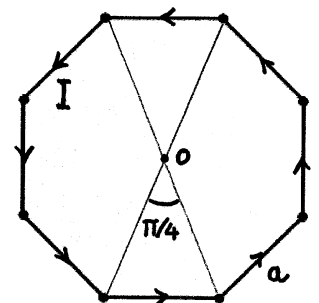
Sia dato il circuito in figura, con il semicilindro di resistività ρ nota e raggio interno a ed esterno b . Riscrivere il circuito come un circuito ad una maglia, sostituendo il circuito a sinistra di A-B con il suo equivalente di Thevenin (f_{eq} e R_{eq}) ed il semicilindro con la resistenza R_s .



- 1) Calcolare solo la R_{eq} .
- 2) Determinare la resistenza R_s del semicilindro tra A e B in funzione di L .
- 3) Determinare la lunghezza L in modo da massimizzare la potenza dissipata nel semicilindro.

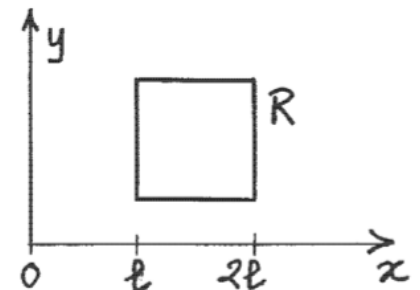
Esercizio 3 (8 punti)

Determinare il campo di induzione magnetica al centro di un ottagono regolare di lato a percorso da una corrente stazionaria I . (Suggerimento: calcolare prima il campo generato in O da un lato del circuito)



Esercizio 4 (8 punti)

Una spira quadrata di lato l e resistenza R , posta nel vuoto sul piano xy , come indicato in figura, è sottoposta all'azione di un campo magnetico non uniforme e lentamente variabile nel tempo la cui normale alla spira è espressa da $B_z = B_z(x, t) = kx \cos(\omega t)$. Si calcoli l'espressione della corrente $I(t)$ indotta nella spira, trascurando l'autoinduzione.



Domanda

Enunciare e ricavare l'equazione di continuità.

Soluzioni

Esercizio 1

$$Q = 4\pi R^2 \sigma = \pi a^2 \sigma \quad U_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{a} = \frac{a\sigma q}{4\epsilon_0} \quad U_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R} = \frac{a\sigma q}{2\epsilon_0}$$

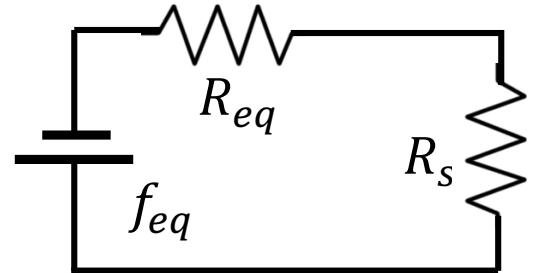
NB: il potenziale dentro la sfera cava è costante

$$\frac{1}{2}mv^2 = U_f - U_i = \frac{a\sigma q}{4\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{a\sigma q}{2m\epsilon_0}}$$

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Thevenin, il circuito è equivalente a

quello in figura con $R_{eq} = \frac{3}{4}R + \frac{R}{8} + \frac{R}{8} = R$



Il semicilindro può essere visto come tanti gusci di lunghezza πr e sezione Ldr in parallelo:

$$\frac{1}{R_s} = \int_a^b \frac{Ldr}{\rho\pi r} = \frac{L \ln \frac{b}{a}}{\rho\pi} \quad \rightarrow \quad R_s = \frac{\rho\pi}{L \ln \frac{b}{a}}$$

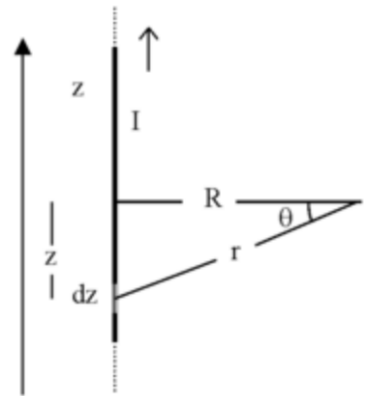
Il massimo trasferimento di potenza si ha quando $R_s = R_{eq} = R \rightarrow L = \frac{\rho\pi}{R \ln \frac{b}{a}}$

Esercizio 3

Il campo di induzione magnetica prodotto da un tratto di filo a distanza $R = \frac{a}{2} \cot \frac{\pi}{8}$ vale

$$dB_r = \frac{\mu_o I \cos \theta dz}{4\pi r^2} = \frac{\mu_o I}{4\pi R} \cos \theta d\theta \quad B_r = \frac{\mu_o I}{4\pi R} \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_o I}{2\pi R} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{\mu_o I \sin^2 \frac{\pi}{8}}{\pi a \cos \frac{\pi}{8}} \quad \rightarrow \quad B_{tot} = 8B_r = 8 \frac{\mu_o I \sin^2 \frac{\pi}{8}}{\pi a \cos \frac{\pi}{8}}$$



Esercizio 4

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{spira} \vec{B} \cdot d\vec{S} = k \cos(\omega t) \int_{\ell}^{2\ell} x dx = k \cos(\omega t) \ell \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\ell}^{2\ell} = \frac{3}{2} k \ell^3 \cos(\omega t)$$

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{3k\ell^3\omega}{2R} \sin(\omega t)$$