

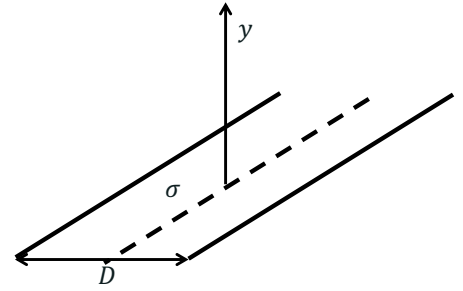


SAPIENZA, UNIVERSITA' DI ROMA
Ingegneria Elettrotecnica

Prova scritta di Fisica 2 – 18 gennaio 2019

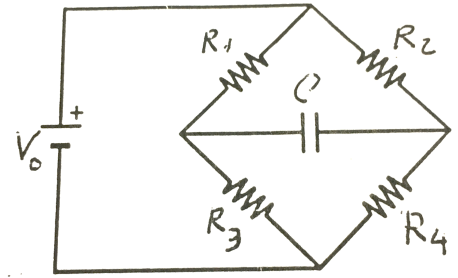
Esercizio 1 (8 punti)

Ricavare il campo elettrico ad una distanza y dal centro di un nastro di larghezza D e lunghezza infinita caricato con densità superficiale di carica σ .



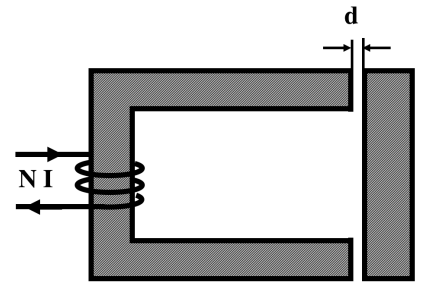
Esercizio 2 (8 punti)

Il circuito in figura si trova in regime stazionario. Determinare la ddp iniziale ai capi del condensatore e il tempo necessario affinché il condensatore si scarichi fino a $1/10$ della sua tensione iniziale se la batteria viene scollegata. ($R_1 = R_3 = 2R$, $R_2 = 4R$, $R_4 = R$)



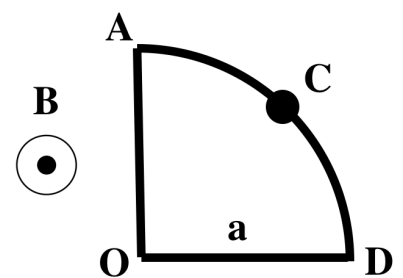
Esercizio 3 (8 punti)

Il nucleo ferromagnetico in figura di sezione $S=8\text{cm}^2$ e lunghezza totale $L=30\text{cm}$ del ferro ha due tratti in aria (traferri) di lunghezza $d=0.2\text{mm}$ ($d \ll L$) ciascuno; la permeabilità relativa del materiale è $\mu_r=500$. La corrente $I=1\text{A}$ scorre nell'avvolgimento di $N=10^3$ spire. Si calcoli l'energia magnetica U immagazzinata nel sistema.



Esercizio 4 (8 punti)

In una regione dello spazio sia presente un campo $\mathbf{B}$ uniforme, come in figura. In detta regione, ortogonalmente alle linee di $\mathbf{B}$, è inserito un circuito filiforme piano di resistività e sezione uniforme (vedi figura). Sia C il punto a metà dell'arco di circonferenza AD di raggio a e sia $\mathbf{B}=\mathbf{k} \ t$ per $t>0$ con $\mathbf{k}$ costante. Determinare valore e segno della differenza di potenziale V_A-V_C .



Domanda

Ricavare la capacità di un condensatore cilindrico.

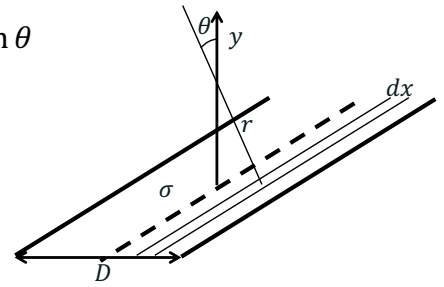
Soluzioni

Esercizio 1

$$d\lambda = \sigma dx \quad dE = \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cos\theta = \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0 r} \cos\theta \quad x = y \tan\theta$$

$$dx = \frac{y}{\cos^2\theta} d\theta \quad r = \frac{y}{\cos\theta} \rightarrow dE = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} d\theta$$

$$E = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \theta_{max} \quad \tan\theta_{max} = \frac{D}{2y}$$



Esercizio 2

A regime le correnti I_{13} e I_{24} che scorrono ai capi di R_1 e R_3 e di R_2 e R_4 sono pari a

$$I_{13} = \frac{V_0}{R_1 + R_3} \quad I_{24} = \frac{V_0}{R_2 + R_4} \rightarrow V_{R_3} = R_3 I_{13} \quad V_{R_4} = R_4 I_{24} \rightarrow$$

$$V_C = V_{R_3} - V_{R_4} = V_0 \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right) = V_0 \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} V_0$$

Con la batteria scollegata il condensatore si scarica su $(R_1 + R_2) = 6R$ in parallelo con $(R_3 + R_4) = 3R$, per cui la costante di tempo è $\tau = 2RC$

$$V_{C,0} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{V_{C,0}}{10} \rightarrow t = \tau \ln 10 = 2RC \ln 10$$

Esercizio 3

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI \rightarrow \frac{B}{\mu_0 \mu_R} L + \frac{B}{\mu_0} 2d = NI \rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{\frac{L}{\mu_R} + 2d}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_R} L S + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} 2d S = \frac{\mu_0 S (NI)^2}{2 \left(\frac{L}{\mu_R} + 2d \right)} = 0.5J$$

Esercizio 4

Scelto l'orientamento in figura per il circuito

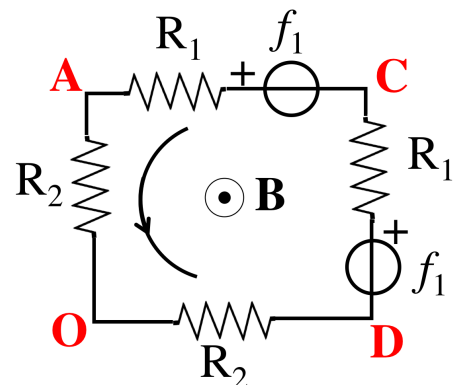
$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\pi a^2}{4} k t \right) = -\frac{\pi a^2 k}{4} \rightarrow I = -\frac{\pi a^2 k}{4R}$$

con R la resistenza totale del circuito

Il campo elettromotore indotto è tangente alla circonferenza dove sono i generatori di f.e.m. indotta (vedi figura)

$$f_1 = \frac{f_i}{2}; \quad \frac{R_1}{R} = \frac{AC}{ACDOA} = \frac{2\pi a/8}{(2\pi a/4) + 2a} = \frac{\pi}{2\pi + 8}$$

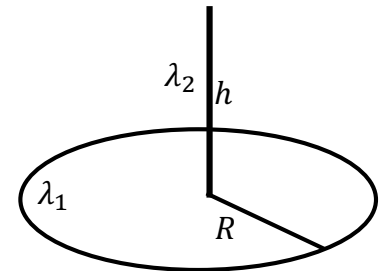
$$V_A - V_C = -R_1 I + f_1 = \frac{\pi a^2 k R_1}{4 R} - \frac{\pi a^2 k}{8} = -\frac{\pi a^2 k}{2\pi + 8}$$





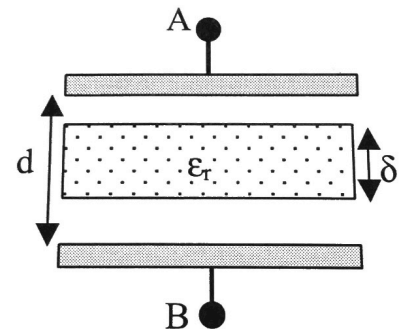
Esercizio 1 (8 punti)

A partire dal centro di una spira circolare di raggio R , con densità di carica lineare λ_1 è posto un filo di lunghezza h come in figura con densità di carica lineare λ_2 . Ricavare il campo sull'asse della spira e l'espressione della forza che si esercita tra le due distribuzioni di carica.



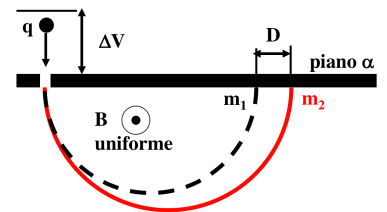
Esercizio 2 (8 punti)

Un condensatore piano isolato è costituito da due piastre di sezione S distanti d . Le due piastre si trovano inizialmente ad una differenza di potenziale V_0 , che diminuisce del 20% quando viene inserita una lastra omogenea di costante dielettrica relativa ϵ_r e di spessore $\delta = d/4$. Determinare ϵ_r , la carica libera Q_{lib} sulle piastre e quella di polarizzazione Q_{pol} sulla superficie del dielettrico.



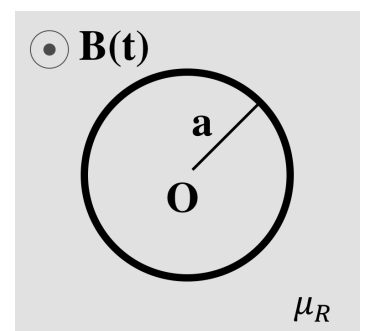
Esercizio 3 (8 punti)

In uno spettrometro di massa, ioni di uguali cariche q e diverse masse sono accelerati con una differenza di potenziale ΔV e quindi deflessi da un campo magnetico $\vec{B}$ ortogonale alla loro velocità e uniforme. Si calcoli la velocità con cui lo ione entra nella regione a B uniforme. Si calcoli inoltre la separazione D delle due traiettorie semicircolari sul piano α per due ioni di carica q e masse diverse m_1 e m_2 .



Esercizio 4 (8 punti)

Una spira conduttrice circolare di raggio a , resistenza R ed induttanza L si trova in un materiale magnetico isolante di permeabilità magnetica relativa μ_r . All'istante $t = 0$ si instaura un campo $\vec{B}$ uniforme, ortogonale al piano della spira e crescente nel tempo con legge $B(t) = kt$. Calcolare la corrente indotta sulla spira e dare l'espressione del campo totale al centro della spira $B_o(t)$.



Domanda

Enunciare e dimostrare l'equazione di continuità ed usarla per dimostrare la legge dei nodi.

Soluzioni

Esercizio 1

$$E_{z,spira} = \frac{\lambda_1 R z}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad dF_z = E_{z,spira} \lambda_2 dz \quad F_z = \int_0^z E_{z,spira} \lambda_2 dz =$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\epsilon_0} \int_0^h \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{4\epsilon_0} \int_{R^2}^{R^2+h^2} \frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right)$$

Esercizio 2

$$E_0 = \frac{V_0}{d} \quad (\text{non cambia con l'inserimento della lastra}) \quad E_1 = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

$$0.8V_0 = \frac{3}{4}dE_0 + \frac{1}{4}d\frac{E_0}{\epsilon_r} = V_0 \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4\epsilon_r} \right) \rightarrow \epsilon_r = 5$$

La carica libera non cambia con l'inserimento del dielettrico: $Q_{lib} = V_0 \frac{\epsilon_0 S}{d}$

$$P = \sigma_{pol} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E_1 = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\frac{E_0}{\epsilon_r} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} = (\epsilon_r - 1)\frac{Q_{lib}}{S\epsilon_r}$$

$$Q_{pol} = \sigma_{pol}S = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} Q_{lib}$$

Esercizio 3

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V \rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} \quad \frac{mv^2}{R} = qvB \rightarrow$$

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m\Delta V}{q}} \quad D = 2R_2 - 2R_1 = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2\Delta V}{q}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$$

Esercizio 4

A causa dell'induzione magnetica il campo al centro della spira è $B_o(t) = B(t) - B_I(t)$ con $B(t) = kt$ e $B_I(t)$ il campo in O dovuto alla corrente indotta $i(t)$ che circola nella spira; $B_I(t)$ si oppone a $B(t)$.

$$B_o(t) = B(t) - B_I(t) = kt - \frac{\mu_0 \mu_R i(t)}{2a}$$

essendo $B_I(t)$ il campo B al centro di una spira circolare in cui scorre $i(t)$.

La f.e.m. indotta nella spira vale

$$|f| = \frac{d}{dt} \Phi_s(\vec{B}) = \frac{d}{dt} [B(t)\pi a^2] = k \pi a^2 \text{ costante}$$

Per $t > 0$, la spira è un circuito fRL con generatore f.e.m. costante:

$$|f| - L \frac{di}{dt} = R i(t) \rightarrow i(t) = \frac{k \pi a^2}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right] \rightarrow$$

$$B_o(t) = k t - \frac{\mu_0 \mu_R}{2a} \frac{k \pi a^2}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right]$$

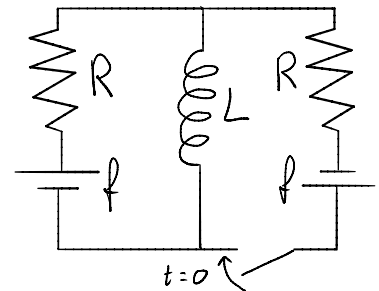


Esercizio 1 (8 punti)

Due lastre conduttrici A e B parallele, poste a distanza d , sono cariche rispettivamente con densità superficiali di carica σ_A e σ_B , entrambe positive. Tra le armature, e parallelamente ad esse, è posta una lastra di materiale dielettrico di costante dielettrica relativa ϵ_r e di spessore s . Determinare la ddp $V_A - V_B$ tra le lastre.

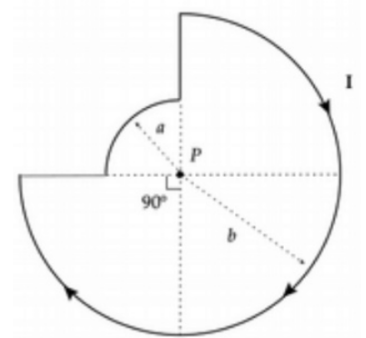
Esercizio 2 (8 punti)

Al tempo $t = 0$ l'interruttore del circuito viene chiuso. Ricavare l'andamento temporale dell'intensità di corrente che scorre nell'induttanza.



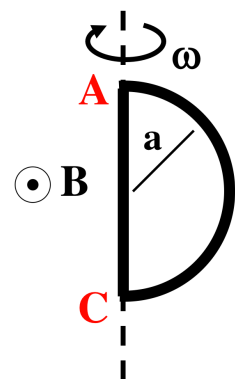
Esercizio 3 (8 punti)

Con riferimento al circuito in figura, determinare il vettore campo magnetico in direzione verso ed intensità nel punto P sapendo che $R = a = b/2$.



Esercizio 4 (8 punti)

Un circuito chiuso a forma di semicerchio di raggio a è costituito da un filo conduttore omogeneo a sezione costante S e resistività ρ . Il circuito ruota con velocità angolare ω costante intorno all'asse tratteggiato in figura ed è immerso in un campo $\vec{B}$, uniforme e costante nel tempo, ortogonale all'asse di rotazione. Si calcoli l'espressione del valore massimo della d.d.p. $V_A - V_C$.



Domanda

Considerare la carica di un condensatore in un circuito f-R-C (1 maglia) e ricavare la corrente e la d.d.p. ai capi del condensatore.

Soluzioni

Esercizio 1

$$E_0 = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{\varepsilon_0} \quad E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \quad V_A - V_B = E_0(d - s) + Es = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_r(d - s) + s}{\varepsilon_r}$$

Esercizio 2

$$I_L(0) = \frac{f}{R} \quad \text{Applicando Thevenin si ha:} \quad R_{eq} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2} \quad f_{eq} = 0$$

$$\rightarrow \text{Induttanza in scarica su } R/2: \quad I_L(t) = I(0)e^{-\frac{Rt}{2L}}$$

Esercizio 3

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \left(\frac{3}{4b} + \frac{1}{4a} \right) = \frac{\mu_0 I}{2} \left(\frac{3}{8R} + \frac{1}{4R} \right) = \frac{5}{16} \frac{\mu_0 I}{R}$$

Il campo è perpendicolare al piano del circuito ed entrante nel foglio.

Esercizio 4

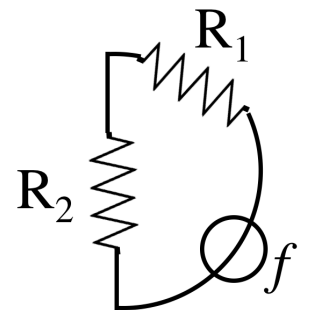
La f.e.m. indotta è

$$f = \frac{1}{2} \pi a^2 B \omega \cos(\omega t + \phi)$$

ed il campo elettromotore indotto è nullo sul diametro AC.

$$R_1 = \frac{\rho \pi a}{S}, \quad R_2 = \frac{\rho 2a}{S} \rightarrow V_A - V_C = f \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\pi a^2 B \omega}{2 + \pi} \cos(\omega t + \phi)$$

$$[V_A - V_C]_{MAX} = \frac{\pi a^2 B \omega}{2 + \pi}$$





SAPIENZA, UNIVERSITA' DI ROMA
Ingegneria Elettrotecnica

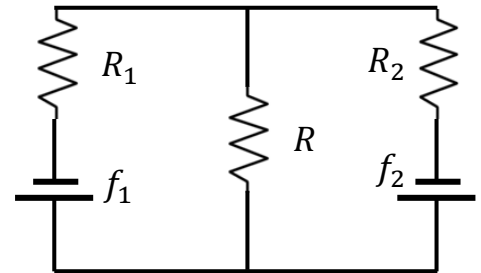
Prova scritta di Fisica 2 – 14 giugno 2019

Esercizio 1 (8 punti)

Al centro di una corona circolare di raggio interno a e raggio esterno b , con una densità di carica $\sigma = k/r$ con k costante nota e r distanza dall'asse, è presente una carica q con massa m . Determinare la velocità della carica quando questa raggiunge l'infinito.

Esercizio 2 (8 punti)

Nel circuito in figura sono note le forze elettromotrici f_1 e f_2 e le resistenze R_1 e R_2 . Determinare il valore della resistenza R corrispondente al massimo valore della potenza dissipata sulla stessa.

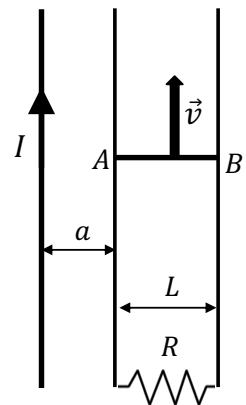


Esercizio 3 (8 punti)

Due lunghi fili metallici paralleli, nel vuoto, sono percorsi da correnti continue di uguale intensità I e di uguale verso; determinare l'espressione di I sapendo che se si triplicasse la distanza tra i fili, il lavoro fatto da una forza esterna sul sistema per ogni metro di lunghezza dei fili sarebbe pari a L/ℓ .

Esercizio 4 (8 punti)

Nel circuito in figura di resistenza R , la barretta conduttrice AB di lunghezza L si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}$, mantenendosi perpendicolare ad un filo rettilineo percorso dalla corrente stazionaria I e mantenendo il contatto elettrico con il resto del circuito. Sia a la distanza fra un estremo della barretta dal filo. Ricavare l'espressione della potenza dissipata nel circuito.



Domanda

Dimostrare le condizioni di continuità del campo elettrico alla superficie di separazione tra due mezzi dielettrici.

Soluzioni

Esercizio 1

La corona circolare può essere vista come la somma di tante spire elementari, ciascuna delle quali genera un potenziale al centro pari a

$$dV_0 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{kdr}{2\epsilon_0 r} \rightarrow V_0 = \int_a^b dV_0 = \frac{k}{2\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

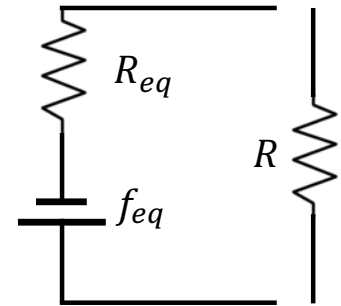
$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = qV_0 \quad v_\infty = \sqrt{\frac{qk}{m\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}}$$

Esercizio 2

Per Thevenin si ha

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Per il teorema del massimo trasferimento di potenza si ha che
 $R = R_{eq}$



Esercizio 3

La forza attrattiva che il tratto ℓ di un filo subisce, se r è la distanza fra i fili, vale

$$F = -I \ell B = -I \ell \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Il lavoro per unità di lunghezza L/ℓ per spostare un filo dalla distanza d a $3d$, si scrive

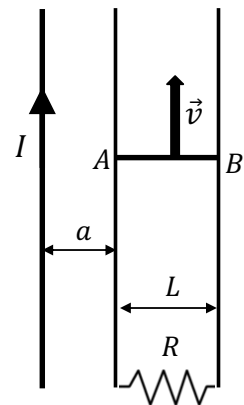
$$\frac{L}{\ell} = \int \frac{\vec{F}_e}{\ell} \cdot d\vec{r} = - \int_d^{3d} \frac{F}{\ell} dr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \int_d^{3d} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln(3) \rightarrow I = \sqrt{\frac{2\pi L}{\mu_0 \ell \ln(3)}}$$

Esercizio 4

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad F = qvB(r), \quad E(r) = \frac{F}{q} = vB(r)$$

$$\Delta V = |V(B) - V(A)| = \left| \int_a^{a+L} E(r) dr \right| = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \left(\frac{a+L}{a} \right)$$

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} = \frac{1}{R} \left[\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \left(\frac{a+L}{a} \right) \right]^2$$



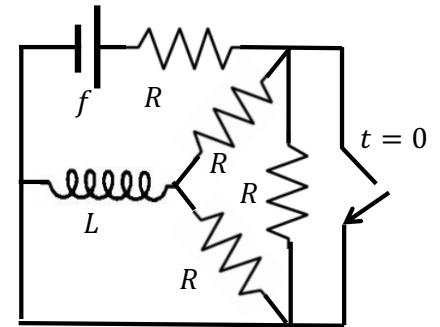


Esercizio 1 (8 punti)

Un dielettrico sferico di raggio R_1 è carico uniformemente con carica totale Q_1 . Concentricamente a tale dielettrico è posto un guscio sferico conduttore di raggio interno R_1 ed esterno R_2 . Sul conduttore è presente una seconda carica Q_2 . Calcolare il potenziale al centro del dielettrico imponendo che sia nullo il valore del potenziale all'infinito.

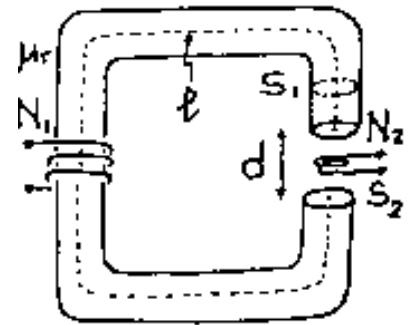
Esercizio 2 (8 punti)

Il circuito in figura è a regime quando al tempo $t = 0$ si chiude l'interruttore. Calcolare l'espressione della corrente $I(t)$ che passa nell'induttore per $t \geq 0$.



Esercizio 3 (8 punti)

Una bobina di N_1 spire eccita un nucleo di materiale con permeabilità magnetica relativa μ_r di lunghezza l e sezione di area S_1 . Il nucleo è interrotto per un tratto d , dove è inserita una seconda spira con N_2 spire e area $S_2 < S_1$. Calcolare il coefficiente di mutua induzione tra le due spire.



Esercizio 4 (8 punti)

Due spire circolari e concentriche sono poste in un piano orizzontale. La spira esterna di raggio a è attraversata da una corrente I mantenuta costante. La spira interna di raggio $b \ll a$ e resistenza R , al tempo $t = 0$ inizia a cadere da ferma senza cambiare orientazione. Supponendo che la caduta sia dovuta soltanto all'azione della forza di gravità e trascurando altri tipi di forze tra le due spire, calcolare la carica fluída nella spira piccola dopo un tempo di caduta Δt trascurando l'autoinduzione.

Domanda

Enunciare e dimostrare il teorema di circuitazione di Ampere. Fornirne anche un esempio di applicazione.

Soluzioni

Esercizio 1

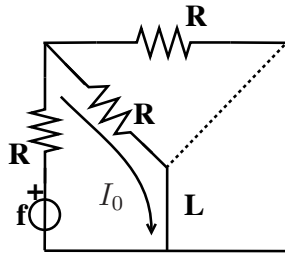
$$V(0) = - \int_{\infty}^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{\infty} E dr = \int_0^{R_1} E_1 dr + \int_{R_2}^{\infty} E_2 dr$$

$$E_1 = \frac{\rho_1 \frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} = \frac{Q_1 r}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R_1^3}, \quad E_2 = \frac{(Q_1 + Q_2)}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad V(0) = \frac{Q_1}{8\pi \epsilon_0 \epsilon_r R_1} + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi \epsilon_0 R_2}$$

Esercizio 2

Per $t < 0$:

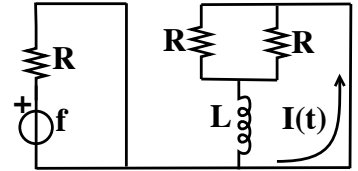
$$I_0 = \frac{1}{2} \frac{f}{R + R/2} = \frac{f}{3R}$$



Per $t > 0$:

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right);$$

$$\tau = 2 \frac{L}{R}$$



Esercizio 3

$$M = \frac{\phi_{12}}{I_1} = \frac{N_2 S_2 B_1}{I_1} = \frac{N_2 S_2}{I_1} \frac{\phi_{11}}{S_1} = \frac{N_2 S_2}{I_1} \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R} S_1}$$

$$\mathcal{R} = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S_1} + \frac{d}{\mu_0 S_1} \rightarrow M = \frac{\mu_0 \mu_r S_2 N_2 N_1}{l_1 + \mu_r d}$$

Esercizio 4

$$Q = \frac{\phi_i - \phi_f}{R} = \frac{\pi b^2 (B_i - B_f)}{R} = \frac{\pi b^2}{R} \left(\frac{\mu_0 I}{2a} - \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$|z| = \frac{1}{2} g \Delta t^2 \rightarrow Q = \frac{\pi b^2}{R} \left(\frac{\mu_0 I}{2a} - \frac{\mu_0 I a^2}{2 \left(a^2 + \frac{1}{4} g^2 \Delta t^4 \right)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

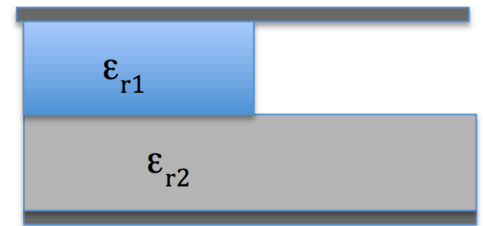


Esercizio 1 (8 punti)

Due superfici sferiche concentriche di raggio $r_1 = 2\text{cm}$ e $r_2 = 3\text{cm}$ sono cariche con la stessa densità di carica superficiale σ . Determinare il valore di σ se il potenziale al centro delle due superfici vale $V=10\text{V}$.

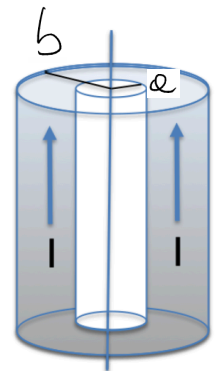
Esercizio 2 (8 punti)

Un condensatore a facce piane e parallele con armature di area S poste a distanza d , viene caricato e staccato dal generatore. Vengono inseriti nel condensatore due dielettrici mostrati in figura, entrambi di spessore $d/2$. Determinare ϵ_{r2} se la differenza di potenziale ai capi del condensatore si dimezza in seguito all'inserimento dei dielettrici ($\epsilon_{r1}=3$).



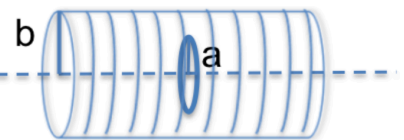
Esercizio 3 (8 punti)

In un lungo tubo rettilineo conduttore, di raggio interno a e raggio esterno b , passa una corrente stazionaria I uniformemente distribuita sulla sezione del tubo. Ricavare, in funzione della distanza r dall'asse del tubo, il vettore induzione magnetica $\mathbf{B}$, in modulo direzione e verso.



Esercizio 4 (8 punti)

Una spira circolare di raggio a e resistenza R è posta coassialmente al centro di un lungo solenoide di lunghezza L e composto di N avvolgimenti con una sezione circolare di raggio b . Se la corrente nel solenoide diminuisce secondo la legge $I = I_0 \exp(-t/\tau)$, si determini la corrente indotta i_{spira} in funzione del tempo e l'energia dissipata U_d nella spira dopo un tempo pari a 3τ . Si trascuri l'autoinduttanza.



Domanda

Ricavare l'espressione del vettore induzione magnetica (in modulo, direzione e verso) generato al centro di una spira quadrata di lato d e percorsa da una corrente I . (specificare il verso di rotazione della corrente).

Soluzioni

Esercizio 1

$$\vec{E} = E(z) \hat{z}$$

$$z > z_2 \quad E^{EXT}(z) = \frac{\sigma z_1^2}{\epsilon_0 z^2} + \frac{\sigma z_2^2}{\epsilon_0 z^2}$$

$$z_1 \leq z \leq z_2 \quad E(z) = \frac{\sigma z_1^2}{\epsilon_0 z^2}$$

$$z < z_1 \quad E^{INT}(z) = 0$$

$$\begin{aligned} V(0) &= - \int_{\infty}^0 E dz = \int_{z_1}^{z_2} E^{INT} dz + \int_{z_2}^{\infty} E^{EXT} dz \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} (z_1 + z_2) \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V(0)}{z_1 + z_2} \approx 1,8 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

Esercizio 2

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} C_1 \quad \text{---} \quad C_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \epsilon_{r1} \quad \text{---} \quad \epsilon_r = 1 \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \epsilon_{r2} \quad \text{---} \quad C_3 \end{array} \quad Q = C^{IM} V^{IM} = C^{FIM} V^{FIM} \\ & \quad \quad \quad = \text{cost} \\ & \quad \quad \quad C^{FIM} = \frac{C^{PAR} C_3}{C^{PAR} + C_3} \quad C^{PAR} = C_1 + C_2 \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S/2}{d/2} \quad C_3 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}{d/2}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 S/2}{d/2} \quad C^{IM} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

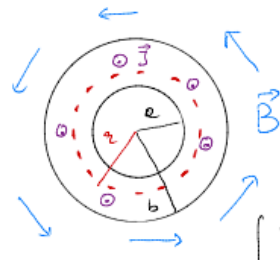
$$\text{SE } V^{FIM} = \frac{V^{IM}}{2} \quad \text{DATO CHE } Q = \text{cost}$$

$$C^{FIM} = 2 C^{IM} \frac{\left(\epsilon_0 \frac{S}{d} + \epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{S}{d} \right) \epsilon_{r2}^2}{1 + \epsilon_{r1} + 2 \epsilon_{r2}} = \frac{2 \epsilon_0 S}{d}$$

DA CUI

$$\epsilon_{r2} = \frac{2 + 2 \epsilon_{r1}}{2 \epsilon_{r1} - 2} = 2$$

Esercizio 3



$$J = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$$

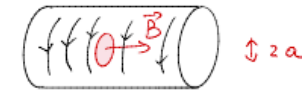
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{conc}}$$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int B d\ell = 2\pi r B$$

$$I^{\text{conc}} = \begin{cases} 0 & r < a \\ J\pi(r^2 - a^2) & a \leq r \leq b \\ I & r > b \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2 - a^2)} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) & a \leq r \leq b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > b \end{cases}$$

Esercizio 4



$$B = \mu_0 n I(t)$$

$$n = N/L$$

$$\varphi_{\text{SPIRA}} = \mu_0 \frac{N}{L} I \pi a^2 \quad I = I_0 e^{-t/\tau}$$

$$\oint_{e.m.} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\varphi_{\text{SPIRA}}}{dt}$$

$$i_{\text{SPIRA}} = - \frac{1}{R} \frac{d\varphi_{\text{SPIRA}}}{dt} = + \frac{\mu_0 N \pi a^2 I_0}{R L \tau} e^{-t/\tau}$$

$$W_d = R i_{\text{SPIRA}}^2$$

$$U_d = \int_0^{3\tau} W_d dt = \int_0^{3\tau} R \left(\frac{\mu_0 N \pi a^2 I_0}{R L \tau} \right)^2 e^{-2t/\tau} dt$$

$$= \left(\frac{\mu_0 N \pi a^2 I_0}{L} \right)^2 \frac{1}{2 R \tau} (1 - e^{-6})$$



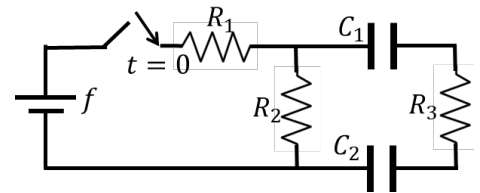
Esercizio 1 (8 punti)

Al centro di una corona circolare di raggio interno a e raggio esterno b e densità di carica $\sigma = kr$ è presente una carica puntiforme q , inizialmente ferma e vincolata a muoversi soltanto lungo l'asse della corona. Determinare la velocità della carica a distanza infinita dal disco.

Esercizio 2 (8 punti)

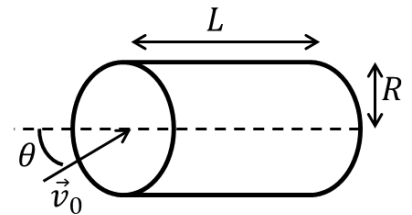
Dato il circuito in figura, all'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. Calcolare la potenza dissipata in R_3 fino al raggiungimento della nuova situazione di regime.

($R_1 = R_2 = R_3 = R$, $C_1 = C_2 = C$)



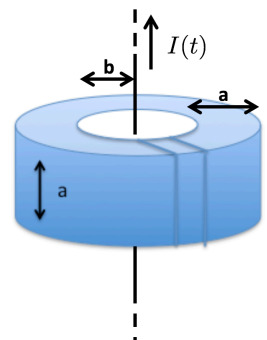
Esercizio 3 (8 punti)

Una particella di carica q e massa m entra al centro di un solenoide di lunghezza L e raggio R con n spire per unità di lunghezza percorso da una corrente uniforme I . La velocità v_0 forma un angolo θ con l'asse del solenoide come in figura. Calcolare il valore minimo della corrente I necessaria per evitare che la particella urti la superficie laterale del solenoide. Si trascurino gli effetti di bordo.



Esercizio 4 (8 punti)

Su un toro a sezione quadrata di lato a e raggio interno b sono avvolte N spire, di resistenza totale R . Il toro è concentrico ad un filo rettilineo molto lungo dove scorre una corrente $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Ricavare la corrente che circola nel toro.



Domanda

Ricavare l'espressione del campo magnetico sull'asse di una spira circolare.

Soluzioni

Esercizio 1

$$dq = \sigma 2\pi r dr \rightarrow V_0(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{\sigma 2\pi r}{r} dr = \frac{k}{2\epsilon_0} \int_a^b r dr = \frac{k(b^2 - a^2)}{4\epsilon_0}$$

$$V_0(\infty) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}mv_\infty^2 + qV_0(\infty) = qV_0(0) \rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{qkR^2}{2\epsilon_0 m}}$$

Esercizio 2

Thevenin:

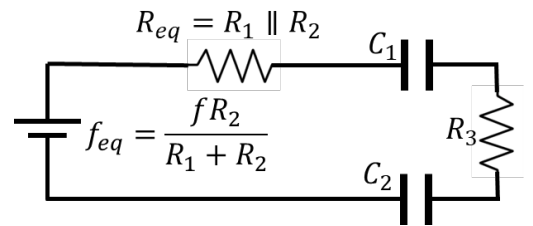
$$f_{eq} = IR_2 = \frac{fR_2}{R_1 + R_2} = \frac{f}{2} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R}{2}$$

Durante la carica, metà dell'energia è immagazzinata nei condensatori e metà dissipata sulle resistenze.

L'energia immagazzinata nei condensatori a regime vale

$$U = \frac{1}{2}C_{eq}V^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{f^2 R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{1}{16} C f^2$$

$$U_{R_3} = U \frac{R_3}{R_{eq} + R_3} = \frac{2}{3} U = \frac{1}{24} C f^2$$



Esercizio 3

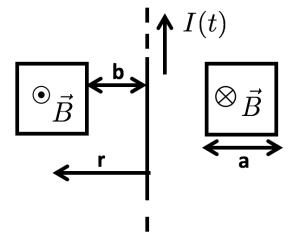
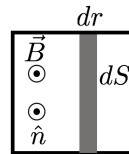
$$r = \frac{mv_r}{qB} = \frac{mv_0 \sin \theta}{qB} = \frac{mv_0 \sin \theta}{q\mu_0 n I} \leq \frac{R}{2} \rightarrow I \geq \frac{2mv_0 \sin \theta}{Rq\mu_0 n}$$

Esercizio 4

$$B(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$$

$$\Phi_{toro} = N\Phi_{spira} = N \int_{spira} \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

$$= N \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (adr) = \frac{\mu_0 N I(t) a}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{b} \right)$$



$$I_{toro}(t) = \frac{f_{em}^{toro}}{R} = -\frac{d\Phi}{dt} \frac{1}{R} = \frac{\mu_0 N a I_0 \omega \sin \omega t}{2\pi R} \ln \left(\frac{a+b}{b} \right)$$