

DIARIO DELLE LEZIONI

- 24.09** - Introduzione al corso. Richiami di insiemistica. Notazioni. Inclusione. Operazioni insiemistiche: unione e intersezione. Principali proprietà delle operazioni insiemistiche. Complementare di un insieme e principali proprietà. Esempi.
- 25.09** - Leggi di De Morgan. Coppia ordinata e prodotto cartesiano di due insiemi. Insiemi numerici: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} . \mathbb{Q} è un campo totalmente ordinato. Esempi.
- 26.09** - Proprietà di densità e proprietà di Archimede in \mathbb{Q} . L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni razionali. \mathbb{R} è un campo totalmente ordinato archimedeo. Proprietà di densità in \mathbb{R} . Intervalli. Definizione di valore assoluto. Proprietà del valore assoluto. Esempi.
- 27.09** - Maggiorante, minorante, massimo elemento e minimo elemento. Insiemi limitati superiormente, limitati inferiormente, limitati e illimitati. Estremo superiore e estremo inferiore. Disuguaglianza triangolare del valore assoluto. Esempi.
- 30.09** - Ogni insieme finito ha minimo e massimo. Proprietà di completezza di \mathbb{R} .* La proprietà di completezza non è vera in \mathbb{Q} . \mathbb{N} non è limitato superiormente in \mathbb{R} . Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore. Esempi.
- 01.10** - Teorema di esistenza della radice n -sima.* Proprietà delle potenze. Disuguaglianze con valore assoluto e radici. Determinazione di inf, sup, min e max di insiemi. Esempi.
- 02.10** - Teorema di esistenza del logaritmo in base $a > 0$ con $a \neq 1$.* Proprietà dei logaritmi. Esempi.
- 03.10** - Funzioni tra insiemi arbitrari. Dominio, immagine, grafico e dominio naturale di funzioni. Funzioni reali di una variabile reale. Funzioni razionali. Funzione identità. Funzione restrizione. Successioni. Esempi.
- 04.10** - Funzioni monotone. Funzione parte intera. Gradino di Heaviside. Funzione segno. Funzioni pari e dispari. Esempi.
- 07.10** - Funzioni elementari. Funzioni potenza: grafici e principali proprietà. Funzioni reali limitate superiormente, limitate inferiormente e limitate. Estremo superiore e estremo inferiore di funzioni. Esempi.
- 08.10** - Funzioni esponenziali e funzioni logaritmiche. Massimo globale e minimo globale di funzioni. Esercizi su inf, sup, min e max di funzioni. Esempi.
- 09.10** - Funzioni periodiche. Funzioni trigonometriche: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$. Funzioni iniettive, suriettive e biettive. Insiemi numerabili. \mathbb{N} e \mathbb{Z} sono insiemi numerabili. \mathbb{Q} è un insieme numerabile e \mathbb{R} non è un insieme numerabile.* Esempi.
- 10.10** - Funzioni composte. La composizione di funzioni non è commutativa. Funzione invertibile. Funzione inversa. Esempi.
- 11.10** - Le funzioni strettamente monotone sono invertibili. Funzioni inverse: arcoseno, arcocoseno e arcotangente. Esempi.
- 14.10** - Distanza euclidea in \mathbb{R} . Intorni sferici. Proprietà degli intorni. Retta ampliata. Intorni di $+\infty$ e $-\infty$. Punti d'accumulazione. Esempi.
- 15.10** - Teorema di Bolzano-Weierstrass.* Definizione di limite di funzione. Unicità del limite. Le funzioni con limite finito sono localmente limitate. Esempi.
- 16.10** - Le successioni con limite finito sono limitate. Permanenza del segno. Non esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$. Punti d'accumulazione destro e sinistro. Limite destro e limite sinistro. Esempi.
- 17.10** - Algebra dei limiti finiti. Limite della successione $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se $|a| < 1$ e $a \geq 1$. Disuguaglianza di Bernoulli. Esempi.
- 18.10** - Teorema del confronto. Aritmetica parziale dei limiti in \mathbb{R}^* . Forme indeterminate. Non esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$. Esempi.
- 21.10** - Teorema di esistenza del limite destro per funzioni monotone. La disuguaglianza notevole $2^x > x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Non esiste il limite della successione $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se $a < -1$. Esempi.
- 22.10** - Teorema di esistenza del limite sinistro per funzioni monotone. Limiti di funzioni potenza, di funzioni esponenziali e di funzioni logaritmiche. Limiti di polinomi e di funzioni razionali. Esempi.
- 23.10** - Limite della funzione composta. Cambiamento di variabile nei limiti. Limiti di funzioni trigonometriche e delle funzioni inverse di funzioni trigonometriche. Esempi.
- 24.10** - Funzioni infinitesime. Il simbolo di Landau $o(1)$. Limiti notevoli di funzioni trigonometriche e loro espressione in termini di $o(1)$. Esempi.
- 25.10** - Funzioni divergenti o infinite. Il limite notevole $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4^x} = 0$. Infiniti e infinitesimi: confronto fra esponenziali, potenze e logaritmi. Infiniti (infinitesimi) di ordine superiore, inferiore e dello stesso ordine. Esempi.
- 28.10** - La successione $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n \geq 1}$ è strettamente crescente e limitata. Definizione del numero e di Nepero. Logaritmo naturale. Limiti notevoli che seguono dalla definizione di e . Definizione del fattoriale $n!$. Esempi.
- 29.10** - Gerarchie di infiniti per successioni. Approssimazioni elementari del valore di $n!$. Formula di Stirling.* Esempi.
- 30.10** - Definizione di serie numerica. Successione delle somme parziali. Serie convergenti, divergenti e irregolari. Condizione necessaria per la convergenza. Serie di Méngoli. Linearità. Aritmetica parziale in \mathbb{R}^* per le serie. Esempi.
- 31.10** - Serie geometrica. Coda e errore delle serie. Serie a termini positivi. Serie armonica. Esempi.

04.11 - Criterio del confronto per serie a termini positivi. Serie aritmetica generalizzata. Esempi.

05.11 - Criterio del confronto asintotico. Criterio del rapporto. Esempi.

06.11 - Criterio della radice. Serie numeriche a termini di segno variabile: convergenza assoluta. Parte positiva e parte negativa dei numeri reali. Le serie assolutamente convergenti sono convergenti e $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Esempi.

07.11 - Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz con stima dell'errore.* Teorema ponte.* Non esistenza di limiti. Funzioni continue. Continuità delle funzioni elementari. Esempi.

08.11 - Continuità da destra e da sinistra. Algebra delle funzioni continue. Le funzioni razionali sono continue. Permanenza del segno. Composizione di funzioni continue. Esempi.

11.11 - Punti di discontinuità: eliminabile, prima specie e seconda specie. Discontinuità delle funzioni monotone in intervalli. Ulteriori limiti notevoli che seguono dalla definizione del numero e . Esempi.

12.11 - Teorema degli zeri.* Teorema dei valori intermedi. Funzioni continue e invertibili.* Continuità della funzione inversa. Il simbolo di Landau $o(\cdot)$ "o piccolo". Esempi.

13.11 - Migliore approssimazione lineare. Retta tangente non verticale. Funzioni derivabili. Derivata di e^x . Derivabilità e continuità. Funzioni di classe C^1 . Esempi.

14.11 - Retta tangente verticale. Derivata destra e sinistra. Punto angoloso e cuspidale. Algebra delle derivate. Esempi.

15.11 - Derivata di funzioni composte o regola della catena. Derivata della funzione inversa. Derivata di x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$), a^x ($a > 0$), $\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$. Esempi.

18.11 - Minimo locale e massimo locale. Teorema di Fermat. Punti critici. Teorema di Weierstrass.* Ricerca del minimo assoluto e del massimo assoluto per funzioni continue in intervalli chiusi e limitati. Esempi. Proposta rilevazione on-line delle Opinioni Studenti (OPIS).

19.11 - Teorema di Rolle. Teorema di Lagrange. Criterio di monotonia tramite il segno della derivata. Studio del segno della derivata nella ricerca dei punti di estremo. Esempi.

20.11 - Funzioni con derivata nulla in un intervallo. Conseguenza del teorema di Lagrange per la derivabilità in un punto. Esempi su funzioni derivabili.

21.11 - Le funzioni iperboliche $\sinh x$ e $\cosh x$, le funzioni inverse di $\sinh x$ e $\cosh x$ e le loro derivate. Esempi.

22.11 - Derivata di $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$. Esempi su limiti e funzioni derivabili.

25.11 - Derivate successive. Esempi. Correzione esercitazione 23 novembre.

26.11 - Funzioni di classe C^n , $n \geq 1$, e di classe C^∞ . Polinomio di Taylor. Esempi.

27.11 - Polinomi di Maclaurin delle funzioni e^x e $\log(1+x)$. Enunciato del teorema di Peano: formula di Taylor con valutazione del resto secondo Peano. Sviluppo di Maclaurin di e^x e $\log(1+x)$. Teorema di de L'Hôpital.* Esempi.

28.11 - Dimostrazione del teorema di Peano. Utilizzo dello sviluppo di Taylor nel calcolo dei limiti. Sviluppo di Maclaurin di $\sin x$. Una disuguaglianza notevole: $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Esempi.

29.11 - Sviluppo di Maclaurin di $\cos x$. Utilizzo dello sviluppo di Taylor per determinare l'ordine di infinitesimo. Formula del binomio di Newton.* Esempi.

02.12 - Formula del resto di Lagrange.* Applicazioni del resto di Lagrange: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$, e irrazionalità di e . Sviluppo di Maclaurin di $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Sviluppi di Maclaurin di $\frac{1}{1+x}$ e $\sqrt{1+x}$. Esempi.

03.12 - Funzioni convesse (concave) e strettamente convesse (concave). Monotonia del rapporto incrementale per funzioni convesse e concave.* Derivabilità da destra, da sinistra e continuità delle funzioni convesse e concave. Un punto critico di una funzione convessa (concava) è punto di minimo (massimo) assoluto. La disuguaglianza $e^x \geq 1+x \forall x \in \mathbb{R}$. Esempi.

04.12 - Criterio di convessità per funzioni derivabili.* Criterio di convessità per funzioni due volte derivabili. Definizione di punto di flesso. Condizione necessaria per punti di flesso. La disuguaglianza $\log(1+x) \leq x \forall x > -1$. Esempi.

05.12 - Studio di funzioni. Asintoti verticali, orizzontali e obliqui. Esempi.

06.12 - Definizione di integrale di Riemann. Suddivisione di un intervallo chiuso e limitato. Suddivisione più fine. Somme inferiori e superiori. Funzioni integrabili e integrale. La funzione di Dirichlet non è integrabile. Esempi.

09.12 - Criterio di integrabilità. Le funzioni continue sono integrabili.* Le funzioni monotone sono integrabili. Proprietà dell'integrale. Significato geometrico dell'integrale. Sviluppo di Maclaurin delle funzioni $\sinh x$ e $\cosh x$.

10.12 - Le funzioni limitate con un numero finito di discontinuità sono integrabili.* Teorema della media. Valore medio. Integrale definito indipendentemente dall'ordine degli estremi. Funzioni integrali. Le funzioni integrali sono continue. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo integrale. Definizione di primitiva. Esempi.

11.12 - Dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale. Unicità delle primitive a meno di una costante. Formula fondamentale del calcolo integrale. Primitive di funzioni elementari. Derivate di funzioni integrali. Esempi.

12.12 - Integrale indefinito. Funzioni con primitive non esprimibili in termini di funzioni elementari. Integrazione per parti. Integrazione di funzioni razionali $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x)$ polinomio di secondo grado. Esempi.

16.12 - Equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine. Soluzione e problema di Cauchy. Equazioni omogenee. Integrale generale. Metodo di variazione della costante. Metodo *ad hoc* per polinomi, esponenziali, $\sin x$ e $\cos x$. Esempi.

17.12 - Equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Soluzione e problema di Cauchy. Teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy.* Equazioni omogenee. Soluzioni linearmente indipendenti. Integrale generale dell'equazione completa. Equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti. Equazione caratteristica. Integrazione per sostituzione. Esempi.

18.12 - Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: metodo *ad hoc* per polinomi, esponenziali, $\sin x$ e $\cos x$. Esercizi su equazioni differenziali e funzioni integrali.

*SENZA DIMOSTRAZIONE