

Analisi e Calcolo Numerico

(A.A. 2019-2020)

Equazioni non lineari

Sistemi di equazioni non lineari

Docente: Domenico Vitulano

Email: domenico.vitulano@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa 16,

Pal. RM2, I piano, Stanza n. 13

Tel. 06 4976 6633

Ricevimento: consultare la pagina web dedicata al corso

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Numerical Methods for Engineers: Numerical Methods for Engineers (English Edition) 7th Edition, Formato Kindle, 2015

Il **materiale didattico** è disponibile sui siti

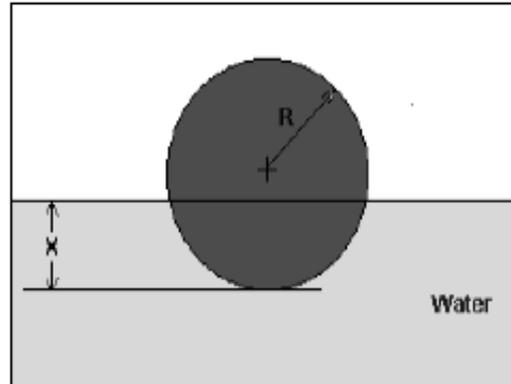
<https://www.sbai.uniroma1.it/users/vitulano-domenico>

<https://elearning.uniroma1.it/>

Equazioni non lineari

Problema 1

Si vuole determinare la parte sommersa di una boa sferica di raggio $R = 0.055m$ e densità $\rho_B = 0.6Kg/m^3$



Indicando con F_ρ la spinta idrostatica, con M_B la massa della boa sferica, g l'accelerazione di gravità e $\rho_w (= 1Kg/m^3)$ la densità dell'acqua, si ha

$$M_B g = F_\rho$$

e quindi

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_B g = \pi x^2 \left(R - \frac{x}{3} \right) \rho_w g$$

da cui

$$x^3 \rho_w - 3x^2 R \rho_w + 4R^3 \rho_B = 0.$$

Per calcolare il valore di x è necessario risolvere un' **equazione non lineare**

L'equazione da risolvere è la seguente:

$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \cdot 10^{-4} = 0.$$

Problema 2

La **crescita di una popolazione** può essere modellata, su un periodo di tempo piccolo, assumendo che la popolazione abbia un tasso di crescita proporzionale al numero di individui presenti in ciascun istante. Se $N(t)$ indica il numero di individui al tempo t e λ è il fattore di crescita della popolazione, allora $N(t)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t),$$

la cui soluzione è $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$, dove N_0 indica la popolazione all'istante di tempo iniziale, cioè $N_0 = N(t_0)$.

Questo modello è valido solo quando la popolazione è isolata e non c'è immigrazione dall'esterno. **Se si suppone che ci sia una immigrazione** a un tasso costante ν , il modello differenziale diventa

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + \nu$$

la cui soluzione è $N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{\nu}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1)$.

Supponendo che la popolazione iniziale sia di 1000'000 di individui, che la comunità cresca di 435'000 immigrati il primo anno e che 1'564'000 individui siano presenti alla fine del primo anno, determinare il tasso di crescita λ della popolazione.

E' necessario risolvere l'**equazione non lineare**

$$N|_{t=1 \text{ anno}} = N_0 e^\lambda + \frac{\nu}{\lambda} (e^\lambda - 1)$$

nell'incognita λ , con $N|_{t=1 \text{ anno}} = 1'564'000$, $N_0 = 1'000'000$,
 $\nu = 435'000$.

$$\Rightarrow f(\lambda) = e^\lambda + \frac{0.435}{\lambda} (e^\lambda - 1) - 1.564 = 0$$

Equazioni non lineari

Un' **equazione non lineare** è un'equazione del tipo

$$f(x) = 0$$

Le **soluzioni** ξ dell'equazione, cioè quei valori tali che

$$f(\xi) = 0,$$

vengono chiamati **radici** dell'equazione non lineare o **zeri** della funzione f .

Ci limiteremo al caso di **radici reali**.

Separazione delle radici

Prima di utilizzare un metodo numerico bisogna sapere:

- **quante** sono le radici (reali);
- **dove** si trovano approssimativamente;
- se ci sono delle **simmetrie**.

Per rispondere a queste domande si può ricorrere alla **tabulazione** o al **grafico** della funzione f .

Separazione grafica delle radici

Calcolo tasso di crescita (problema 2)

$$f(\lambda) = e^\lambda + \frac{0.435}{\lambda}(e^\lambda - 1) - 1.564 = 0$$

1) Studio (classico) della funzione

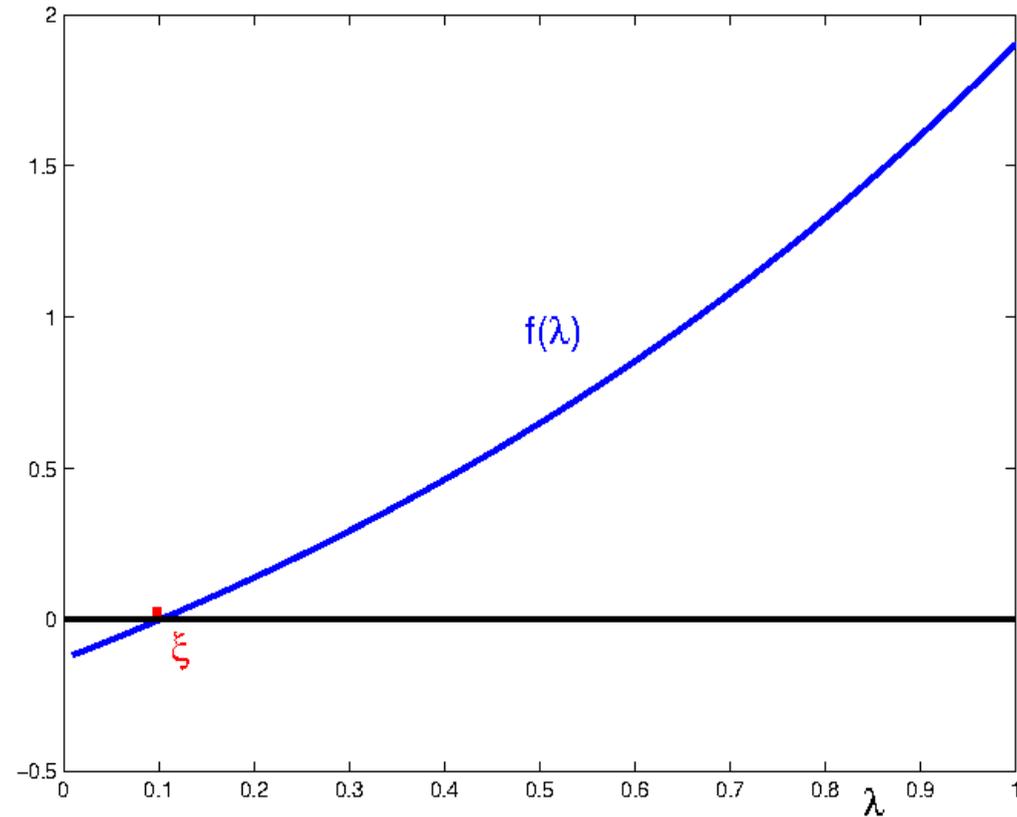
2) Separazione grafica: si traccia il **grafico della funzione** e si individuano gli intervalli in cui la funzione **interseca l'asse delle ascisse**.

$$f(\lambda) = e^\lambda + \frac{0.435}{\lambda}(e^\lambda - 1) - 1.564 = 0$$

In questo caso, la funzione f risulta definita e continua in $\mathbf{R} - \{0\}$. Inoltre, da uno studio preliminare di f nel semiasse positivo, si ha

- $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda) < 0$
- $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = +\infty$
- $f'(\lambda) = e^\lambda \left(1 + 0.435 \frac{\lambda-1}{\lambda^2}\right) + \frac{0.435}{\lambda^2} > 0$, cioè la funzione è **monotona crescente**

e quindi si può concludere che f ha un unico zero ξ nel semiasse positivo.



Osservando il grafico tracciato è possibile individuare un intorno di ξ ;
per esempio

Intervallo di separazione: $I = [a, b] = [0.05, 0.15]$

$$\Rightarrow f(a) = -0.0667, f(b) = 0.0672 \Rightarrow f(a)f(b) < 0$$

Problema 2: separazione delle radici - tabulazione

$$f(\lambda) = e^\lambda + \frac{0.435}{\lambda}(e^\lambda - 1) - 1.564 = 0$$

Si valuta la funzione in corrispondenza di valori equidistanti della variabile λ in un certo intervallo e si osserva il segno dei valori ottenuti:

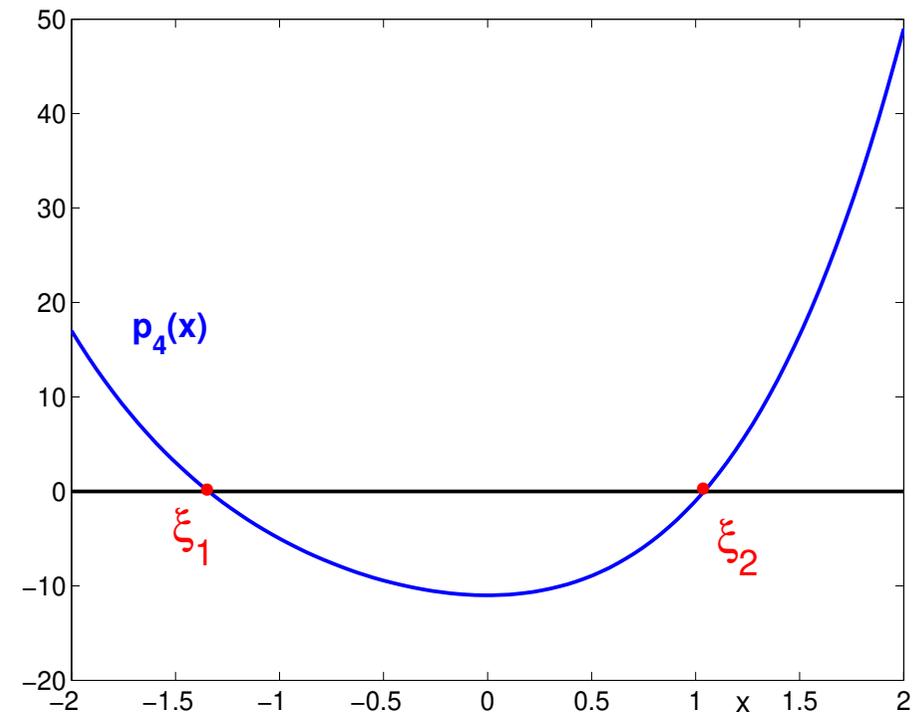
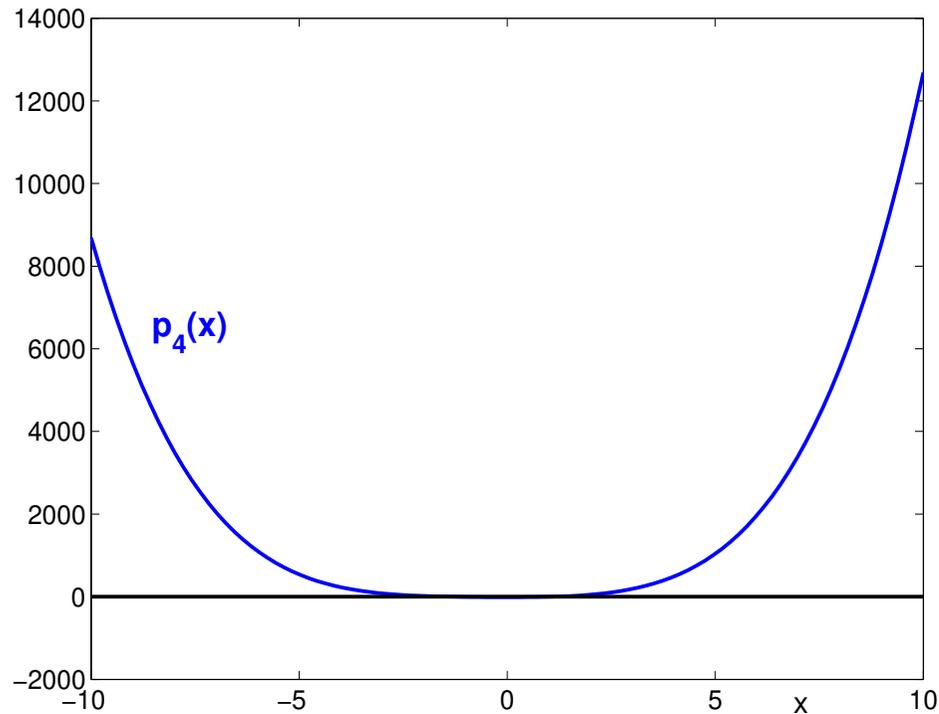
λ	$f(\lambda)$
0.10	-0.00133558829528
0.12	0.02567293855461
0.14	0.05319595959218
0.16	0.08124355150079
0.18	0.10982599066618
0.20	0.13895375715854

Intervallo di separazione: $I = [a, b] = [0.10, 0.12]$

$$\Rightarrow f(a) = -0.0013, f(b) = 0.0257 \Rightarrow f(a)f(b) < 0$$

Separazione delle radici: esempio 1

Equazioni polinomiali: $p_4(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 11 = 0$



Restringendo l'intervallo di osservazione si identificano meglio le due radici reali

Delle **4 radici** di $p_4(x)$ **due** sono **reali**, $\xi_1 \in [-1.5, -1]$ e $\xi_2 \in [0.75, 1.25]$, mentre **due** sono **complesse coniugate**.

Separazione delle radici: esempio 2

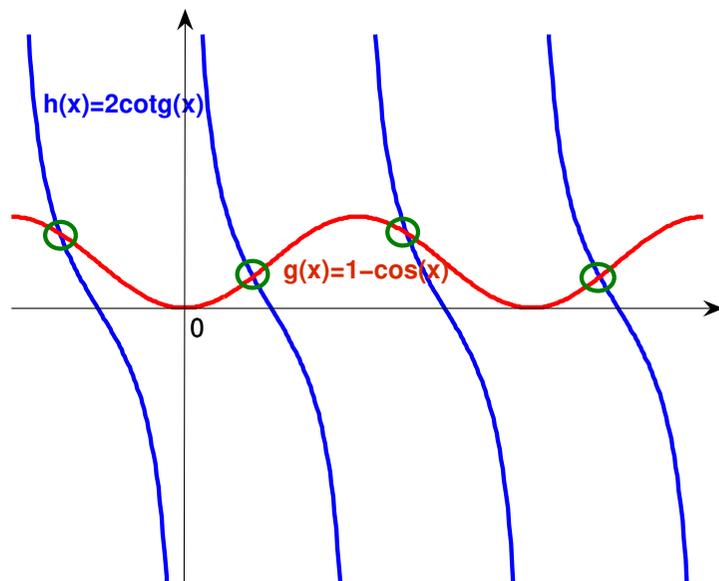
Equazione trascendente: $f(x) = \operatorname{tg}x(1 - \cos x) - 2 = 0$

L'equazione $f(x) = 0$ si può riscrivere come $1 - \cos x = 2\cot x$.

In questo modo è possibile risolvere il problema equivalente

$$h(x) = g(x)$$

corrispondente a determinare i punti di intersezione delle funzioni $h(x) = 2\cot x$ e $g(x) = 1 - \cos x$



Esistono **infinite soluzioni**
 $\xi_k \in (k\pi, (2k + 1)\frac{\pi}{2}), \quad k \in \mathbf{Z}$

Metodo di bisezione (o metodo dicotomico)

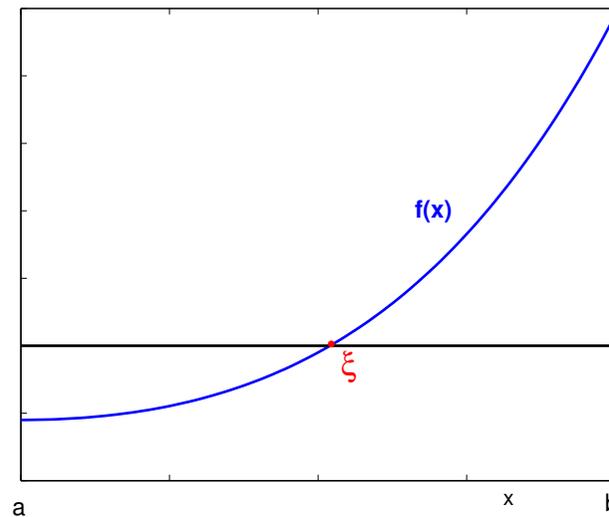
Il **metodo di bisezione** è un metodo molto **semplice**:

una volta individuato un intervallo di separazione in cui si trova **una sola** radice, permette di costruire una **successione** $\{x_k\}$ di **approssimazioni** di ξ .

Ipotesi di applicabilità :

- è stato **separato** un intervallo $I = [a, b]$ in cui c'è un'**unica radice** ξ ;
- la funzione f è **continua** in I : $f \in C^0[a, b]$;

- $f(a)f(b) < 0$.



Metodo di bisezione: algoritmo

Si genera una **successione** di approssimazioni $\{x_k\}$ con $x_k \in [a_{k-1}, b_{k-1}]$ e $\xi \in [a_{k-1}, b_{k-1}]$.

Algoritmo:

$$a_0 = a, \quad b_0 = b$$

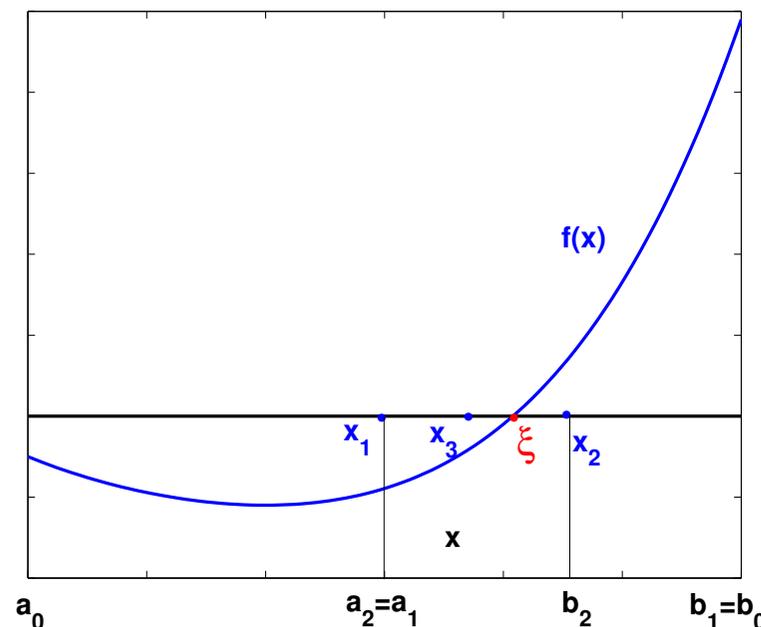
per $k = 1, 2, 3, \dots$

$$x_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2} \quad (\text{punto medio di } [a_{k-1}, b_{k-1}])$$

se $f(x_k) = 0$, allora stop

se $f(a_{k-1})f(x_k) < 0$, allora $[a_k, b_k] = [a_{k-1}, x_k]$

se $f(x_k)f(b_{k-1}) < 0$, allora $[a_k, b_k] = [x_k, b_{k-1}]$



Convergenza del metodo di bisezione

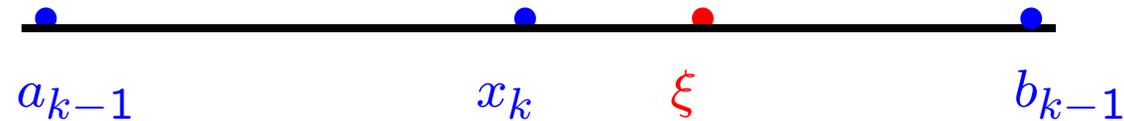
Errore di troncamento: $e_k = \xi - x_k$

è l'errore che si commette approssimando la radice ξ con il **k-esimo** elemento della successione costruita usando l'algoritmo descritto precedentemente.

Il procedimento iterativo converge alla radice ξ se la successione $\{x_k\}$ converge a ξ per $k \rightarrow +\infty$

Convergenza: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |e_k| = 0$

Per il **metodo di bisezione** si ha



Alla *k*-esima iterazione $\xi \in [x_k, b_{k-1}]$ oppure $\xi \in [a_{k-1}, x_k]$.

Ne segue che $|e_k| < \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$.

Inoltre, considerando che l'ampiezza dell'intervallo $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ è pari alla metà dell'ampiezza dell'intervallo $[a_{k-2}, b_{k-2}]$ costruito all'iterazione precedente, si ha

$$|e_k| < \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = \dots = \frac{b - a}{2^k}$$

e quindi

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |e_k| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b - a}{2^k} = 0$$

Ordine di convergenza

Sia $\{x_k\}$ una **successione di approssimazioni convergente** a ξ . La successione ha **ordine di convergenza** p e **fattore di convergenza** C , se esistono due reali $p \geq 1$ e $C > 0$ tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$$

Nota. La convergenza si dice **lineare** se $p = 1$,
quadratica se $p = 2$.

Metodo di bisezione: ordine di convergenza

Per $k \rightarrow \infty$ si ha $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} \simeq \frac{\frac{b-a}{2^{k+1}}}{\frac{b-a}{2^k}} = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$.

⇒ **Ordine di convergenza: 1 (lineare)**

Fattore di convergenza: $\frac{1}{2}$

La convergenza è **lenta**, in quanto ad ogni passo l'**errore** viene **dimezzato**, cioè ad ogni passo si guadagna una **cifra binaria**

⇒ poiché $2^{-4} < 10^{-1} < 2^{-3}$, per guadagnare una **cifra decimale** servono **3-4 iterazioni**.

Metodo di bisezione: criteri di arresto

Nella pratica, a causa degli **errori di arrotondamento** e degli **errori di troncamento** non si verifica **mai** che $f(x_k) = 0$. Quando si arrestano le iterazioni?

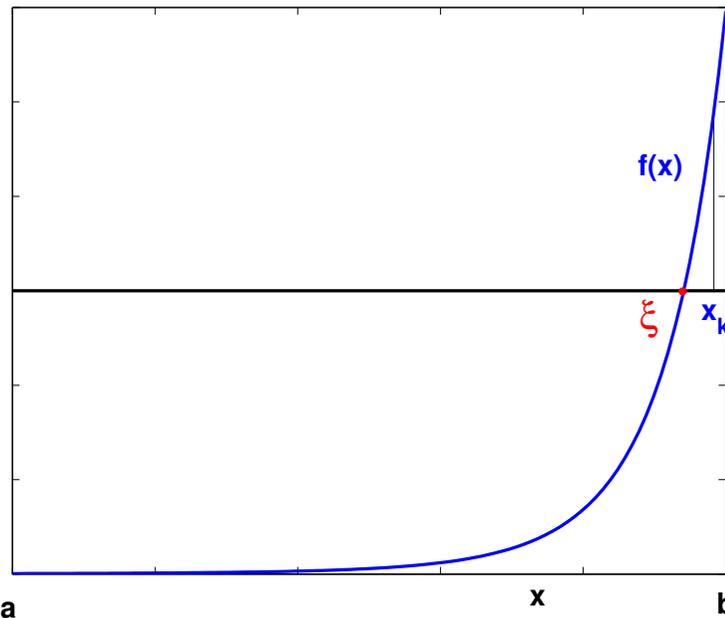
Criteri di arresto a posteriori

$$\left\{ \begin{array}{l} |e_k| \simeq |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \\ |f(x_k)| < \varepsilon \end{array} \right.$$

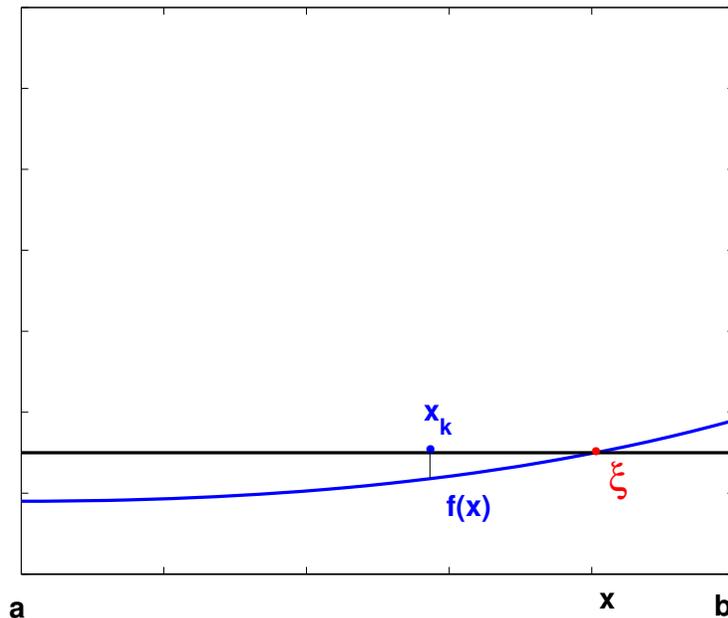
Criteri di arresto a posteriori: esempi

$$|e_k| \simeq |x_k - x_{k-1}| < \epsilon$$

$$\text{oppure } |f(x_k)| < \epsilon$$



$f(x_k)$ è "*grande*" anche se
 x_k è "*vicino*" a ξ



$f(x_k)$ è "*piccolo*" anche
se x_k è "*lontano*" da ξ

Criterio di arresto a priori:

Usando l'espressione dell'errore di troncamento, è possibile dare una **stima a priori** del numero di iterazioni K necessario per ottenere un **errore minore** di ε . Infatti, risulta

$$|e_k| < \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad K > \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log 2}$$

Oss.: Poichè K deve essere un numero intero positivo, può essere posto uguale all'intero più grande e più vicino alla quantità a secondo membro dell'ultima disequazione.

Soluzione Problema 3

Si vuole usare il metodo di bisezione per calcolare la radice dell'equazione

$$f(\lambda) = e^\lambda + \frac{0.435}{\lambda}(e^\lambda - 1) - 1.564 = 0 \quad \text{in} \quad I = [a, b] = [0.05, 0.15]$$

k	a_{k-1}	b_{k-1}	x_k	$ x_k - x_{k-1} $	$ f(x_k) $
1	0.0500000000000000	0.1500000000000000	0.1000000000000000	10.0000000000000000	10.0000000000000000
2	0.1000000000000000	0.1500000000000000	0.1250000000000000	0.0250000000000000	0.03250506973938
3	0.1000000000000000	0.1250000000000000	0.1125000000000000	0.0125000000000000	0.01548498364220
4	0.1000000000000000	0.1125000000000000	0.1062500000000000	0.0062500000000000	0.00704990930651
5	0.1000000000000000	0.1062500000000000	0.1031250000000000	0.0031250000000000	0.00285098217571
6	0.1000000000000000	0.1031250000000000	0.1015625000000000	0.0015625000000000	0.00075615469668
7	0.1000000000000000	0.1015625000000000	0.1007812500000000	0.0007812500000000	0.00029010206821
8	0.1007812500000000	0.1015625000000000	0.1011718750000000	0.0003906250000000	0.00023292996053
9	0.1007812500000000	0.1011718750000000	0.1009765625000000	0.0001953125000000	0.00002861013771
10	0.1009765625000000	0.1011718750000000	0.1010742187500000	0.0000976562500000	0.00010215388987
11	0.1009765625000000	0.1010742187500000	0.1010253906250000	0.0000488281250000	0.00003677037077

Dalla tabella è possibile osservare che se si sceglie $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$ e si usa come criterio di arresto $|f(x_k)| < \varepsilon$, il procedimento iterativo si interrompe quando $k = 9$ ($|f(x_k)| = 0.00002861013771$).

Scegliendo come criterio di arresto $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, il procedimento iterativo si arresta per $k = 11$ ($|x_k - x_{k-1}| = 0.00004882812500$).

E' possibile osservare che per $k = 11$ è soddisfatta anche la condizione $|f(x_k)| < \varepsilon$.

Usando, invece, il criterio di arresto a priori, si ha

$$K > \log_2(0.10) - \log_2(0.5 \cdot 10^{-4}) \approx 10.9658$$

cioè $K \geq 11$,

Esercizio 1

Esempio 3.2.1 (*Libro*) Stabilire quante (e quali) radici ammette l'equazione

$$f(x) = \log(x + 1) + \sqrt{x + 2} - 1 = 0.$$

Soluzione La funzione è definita e continua nell'intervallo $(-1, +\infty)$.
Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0.$$

Pertanto, lo zero (l'intervallo di zeri) esiste.

Poichè $f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} < 0$, la funzione è monotona nel suo dominio di definizione e quindi ha un unico zero in $(-1, +\infty)$.

Infine, si osserva che $\forall x \geq 0 \quad f(x) > 0$, quindi lo zero di f sicuramente appartiene all'intervallo $(-1, 0]$.

Poichè $f(-1/2) < 0$, si può scegliere $I = [a, b] = [-1/2, 0]$ come **intervallo di separazione**.

Applicando il **metodo di bisezione** si ha

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{-1/2}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$f(a_0) = -0.468$$

$$f(b_0) = +0.414 \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = a_0 \\ b_1 = x_1 \end{matrix}$$

$$f(x_1) = +0.035$$

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{-1/2 - 1/4}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$f(a_1) = -0.468$$

$$f(b_1) = +0.035 \Rightarrow \begin{matrix} a_2 = x_2 \\ b_2 = b_1 \end{matrix}$$

$$f(x_2) = -0.195$$

.....

k	x_k	f(x_k)	 ξ - x_k
1	-0.2500000	0.0351936	0.0203336
2	-0.3750000	-0.1952488	0.1046664
3	-0.3125000	-0.0756553	0.0421664
4	-0.2812500	-0.0192306	0.0109164
5	-0.2656250	0.0082212	0.0047086
6	-0.2734375	-0.0054435	0.0031039
7	-0.2695313	0.0014040	0.0008023
8	-0.2714844	-0.0020160	0.0011508
9	-0.2705078	-0.0003050	0.0001742

Dopo 9 iterazioni, l'approssimazione prodotta produce un errore dell'ordine di 10^{-3}

Il numero di iterazioni K necessarie affinché la soluzione prodotta sicuramente abbia una certa precisione ε può essere stimato prima di eseguire le iterazioni nel modo seguente:

$$K \geq \log_2(b - a) - \log_2(\varepsilon)$$

con $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$ da cui

$$K > \log_2(0.5) - \log_2(0.5 \cdot 10^{-3}) \approx 9.9658$$

cioè $K \geq 10$.

Il valore di K stimato assicura che l'errore tra due approssimazioni successive sia inferiore alla tolleranza fissata. Ovviamente, poichè K deriva da una stima superiore dell'errore di troncamento, può accadere che il metodo raggiunga la precisione richiesta con un numero di iterazioni **inferiore** al valore K stimato usando la **stima a priori**.

Esercizio 2

Si consideri

$$f(x; \lambda) = e^{-x} - 2x - \lambda,$$

con $\lambda \in \mathbf{R}$.

- Determinare per quali valori del parametro λ la funzione $f(x)$ ammette un unico zero nell'intervallo $[0, 1]$.
- Posto $\lambda = -1$, dare una stima del numero di iterazioni necessarie per avere un' approssimazione dello zero ξ con almeno tre decimali esatti usando il metodo di bisezione.

Soluzione

$f(x; \lambda) \in C^\infty(\mathbf{R})$. Inoltre, $f'(x; \lambda) < 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}$. Pertanto, se lo zero esiste, allora è unico.

Poichè $f(x; \lambda) = e^{-x} - 2x - \lambda$:

$$f(0)f(1) < 0 \quad \iff (1 - \lambda)(1/e - 2 - \lambda) < 0$$

segue che $f(x; \lambda)$ ammette uno zero per valori di $\lambda \in I = \left(\frac{1}{e} - 2, 1\right)$.

Si osserva che $-1 \in I$ e che le condizioni di applicabilità del metodo di bisezione sono verificate; dunque, applicando la condizione di arresto a priori si ha

$$K > \log_2(1 - 0) - \log_2(0.5 \cdot 10^{-3}) \approx 10.9658.$$

Pertanto, $K \geq 11$.

Metodi di linearizzazione

Si approssima la funzione $f(x)$ in un intorno I di ξ con la sua **tangente** o con la sua **secante**, calcolate tramite un opportuno **sviluppo in serie di Taylor**.

- **Metodo di Newton-Raphson o metodo delle tangenti**
- **Metodo delle secanti**

Metodo di Newton-Raphson

Approssimazione iniziale: x_0

Prima iterazione:

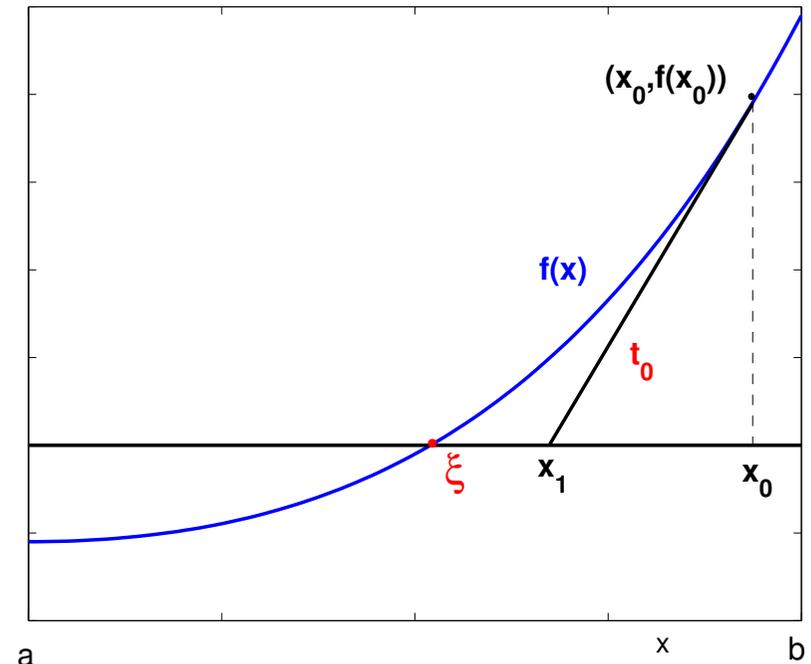
t_0 è la **retta tangente** a $f(x)$
nel punto $(x_0, f(x_0))$:

$$t_0 \rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Nuova approssimazione x_1 :

intersezione tra t_0 e $y = 0$

$$\Rightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Metodo di Newton-Raphson

Nuova approssimazione: x_1

Seconda iterazione:

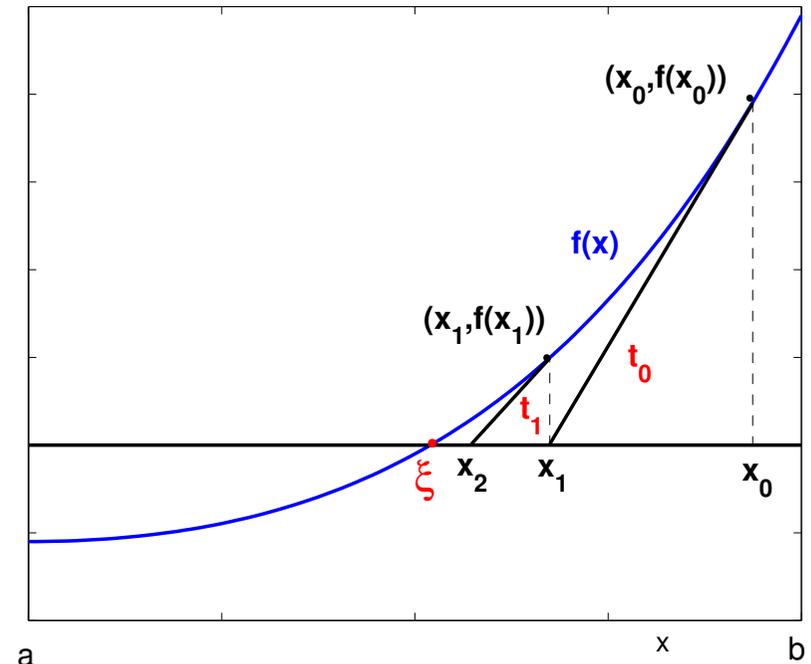
t_1 è la **retta tangente** a $f(x)$
nel punto $(x_1, f(x_1))$:

$$t_1 \rightarrow y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

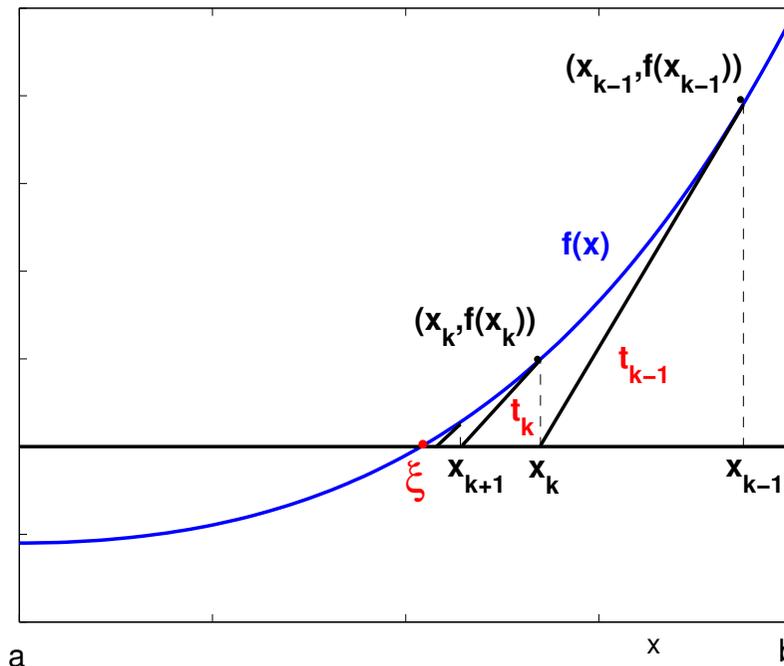
Nuova approssimazione x_2 :

intersezione tra t_1 e $y = 0$,

$$\Rightarrow f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0 \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$



Metodo di Newton-Raphson: algoritmo



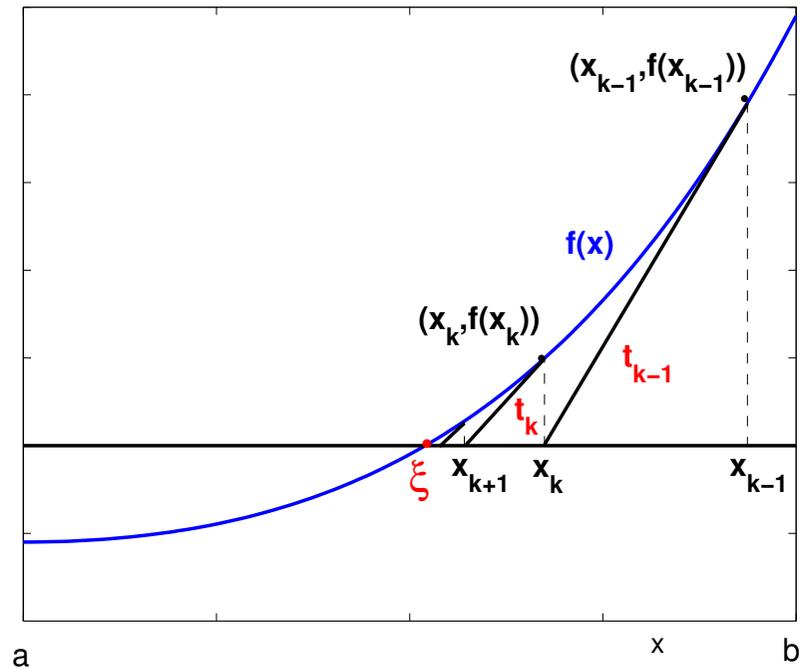
Ad ogni **iterazione** $k = 1, 2, \dots$ la **nuova approssimazione** x_k è data dall'**intersezione** tra la **retta** t_{k-1} , **tangente** a $f(x)$ nel punto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, e la retta $y = 0$:

$$t_{k-1} \rightarrow y = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x - x_{k-1})$$

e quindi $f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = 0$



Metodo di Newton-Raphson: algoritmo



Algoritmo:

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Metodo di Newton-Raphson: algoritmo

Il calcolo della radice di un numero a è equivalente a trovare gli zeri della seguente funzione

$$f(x) = x^2 - a$$

Se vogliamo calcolare la radice di a mediante il metodo di Newton-Raphson, dobbiamo usare il seguente algoritmo

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \frac{(x_{k-1}^2 - a)}{2x_{k-1}}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = \frac{1}{2} \left(x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}} \right), & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

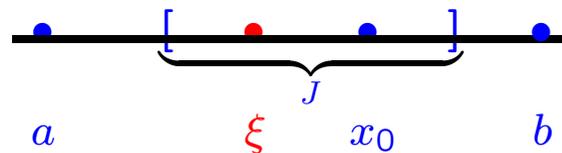
Nota: Algoritmo corrispondente al **Metodo Babilonese** o **Metodo di Erone** (formulato già intorno al 1700 a.C.).

Metodo di Newton-Raphson: convergenza

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ipotesi di applicabilità :

- è stato **separato** un intervallo $I = [a, b]$ in cui c'è un'**unica radice** ξ ;
 - f, f', f'' sono **continue** in I : $f \in C^2[a, b]$;
 - $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a, b]$
- \Rightarrow esiste un **intorno** $J \subseteq I$ di ξ tale che, se $x_0 \in J$, la **successione delle approssimazioni** $\{x_k\}$ **converge** a ξ .



Oss: il teorema garantisce solo l'esistenza di J

Metodo di Newton-Raphson: ordine di convergenza

Si vuole determinare l'ordine di convergenza del metodo di Newton-Raphson

Ordine di convergenza p: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$

L'errore di troncamento alla *k+1-esima* iterazione si può scrivere come segue

$$e_{k+1} = \xi - x_{k+1} = \left(\xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} \right) - \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right) = (\xi - x_k) - \left(\frac{f(\xi)}{f'(\xi)} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right)$$

Il valore di $f(x_k)$ si può stimare considerando i primi tre termini dello **sviluppo in serie di Taylor** attorno alla radice ξ , cioè

$$f(x_k) = f(\xi) + f'(\xi) \underbrace{(x_k - \xi)}_{-e_k} + \frac{1}{2} f''(\xi) (x_k - \xi)^2 + \dots$$

mentre, supponendo che x_k sia molto vicino a ξ , si può assumere che $f'(x_k) \simeq f'(\xi)$

Sostituendo i valori di $f(x_k)$ e $f'(x_k)$ così ottenuti nell'espressione di e_{k+1} si ha

$$|e_{k+1}| \simeq \left| e_k - \frac{f(\xi) - f(\xi) + f'(\xi)e_k - \frac{1}{2}f''(\xi)e_k^2}{f'(\xi)} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)e_k^2}{f'(\xi)} \right|$$

da cui risulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right| \Rightarrow \boxed{p \geq 2}$$

e quindi, se $f(x) \in C^3[a, b]$ la convergenza è almeno **quadratica**

Efficienza computazionale

Per valutare l'**efficienza** di un metodo iterativo bisogna tener conto sia dell'**ordine di convergenza** che del **costo computazionale**, cioè della quantità di calcoli richiesta ad ogni passo.

Efficienza computazionale: $E = p^{1/r}$

p : **ordine** di convergenza del metodo

r : numero di **valutazioni funzionali** (calcolo di funzioni o derivate) richieste ad ogni passo

Metodo di bisezione: $E = 1$

(ad ogni passo si richiede una sola valutazione funzionale, $f(x_k)$, e quindi $r = 1$)

Metodo di Newton: $E = 2^{1/2}$

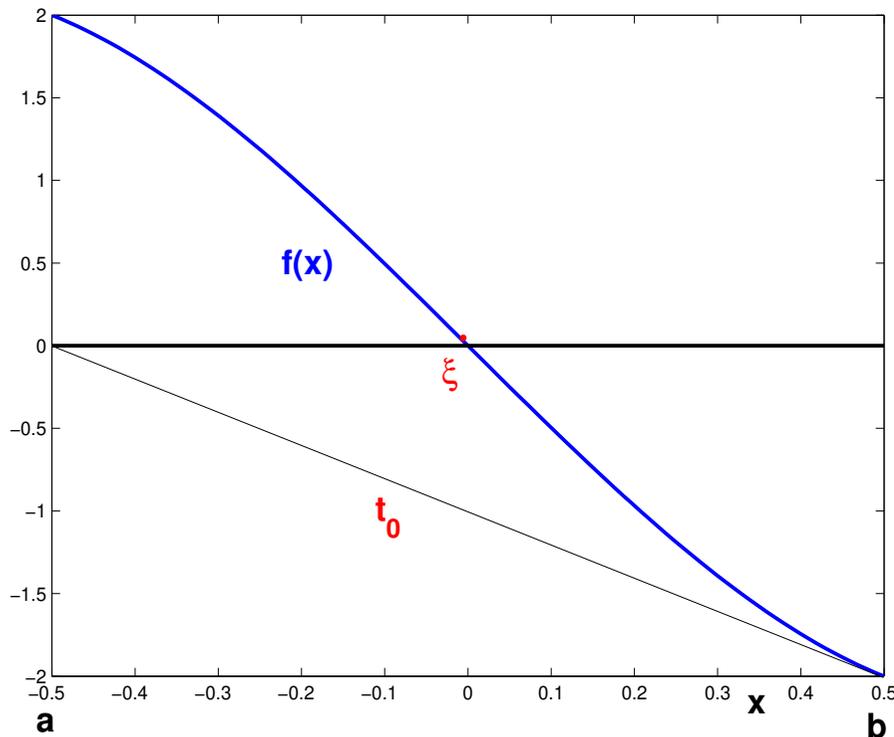
(ad ogni passo si richiedono due valutazioni funzionali, $f(x_k)$ e $f'(x_k)$, e quindi $r = 2$)

Metodo di Newton-Raphson: esempio

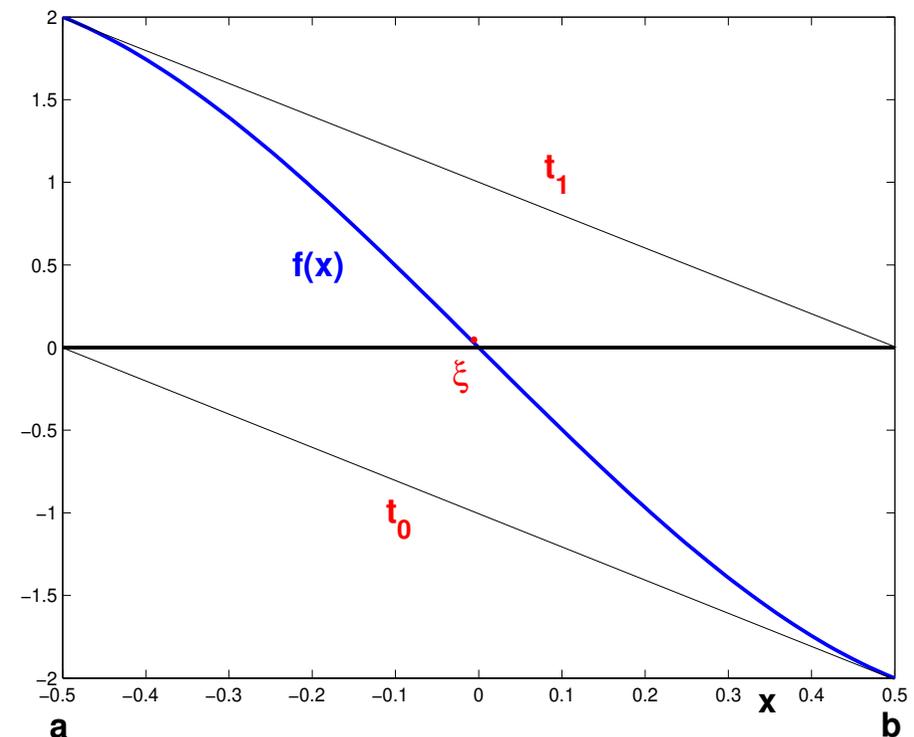
Approssimare la radice $\xi = 0$ dell'equazione

$$f(x) = 4x^3 - 5x = 0$$

con il **metodo di Newton-Raphson** nell'intervallo $I = [-0.5, 0.5]$ e scegliendo come approssimazione iniziale una volta $x_0 = 0.5$ e una volta $x_0 = 0.4$.



$$x_{2k} = 0.5$$



$$x_{2k+1} = -0.5$$

Si verifica facilmente che f verifica le condizioni di applicabilità del **metodo di Newton-Raphson**.

Infatti, $f \in C^2(I)$, $f'(x) = 12x^2 - 5 = 0 \iff x = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} \notin I$.

Scegliendo $x_0 = 0.5$ si ha una *situazione di stallo* e il metodo non converge. Infatti, l'algoritmo di Newton per f è il seguente

$$x_k = x_{k-1} - \frac{4x_{k-1}^3 - 5x_{k-1}}{12x_{k-1}^2 - 5}$$

e quindi

$$x_1 = x_0 - \frac{4x_0^3 - 5x_0}{12x_0^2 - 5} = 0.5 - \frac{-2}{-2} = -0.5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{4x_1^3 - 5x_1}{12x_1^2 - 5} = -0.5 - \frac{3}{-2} = 0.5 \quad ???$$

Al contrario, scegliendo $x_0 = 0.4$, il metodo converge

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $	$ f(x_k) $
1	-0.16623376623377	0.56623376623377	0.81279423831355
2	0.00787190837207	0.17410567460584	0.03935759066802
3	-0.00000078059303	0.00787268896510	0.00000390296513
4	0.00000000000000	0.00000078059303	0.00000000000000

Infatti, il teorema di convergenza del metodo di Newton-Raphson assicura la convergenza per ogni scelta dell'approssimazione iniziale in un opportuno intorno J del punto ξ . Scegliendo come approssimazioni iniziali punti che non appartengono all'intorno J , la convergenza non può essere garantita.

Oss: $f''(x) = 24x = 0 \iff x = 0 \in I$.

Estremo di Fourier

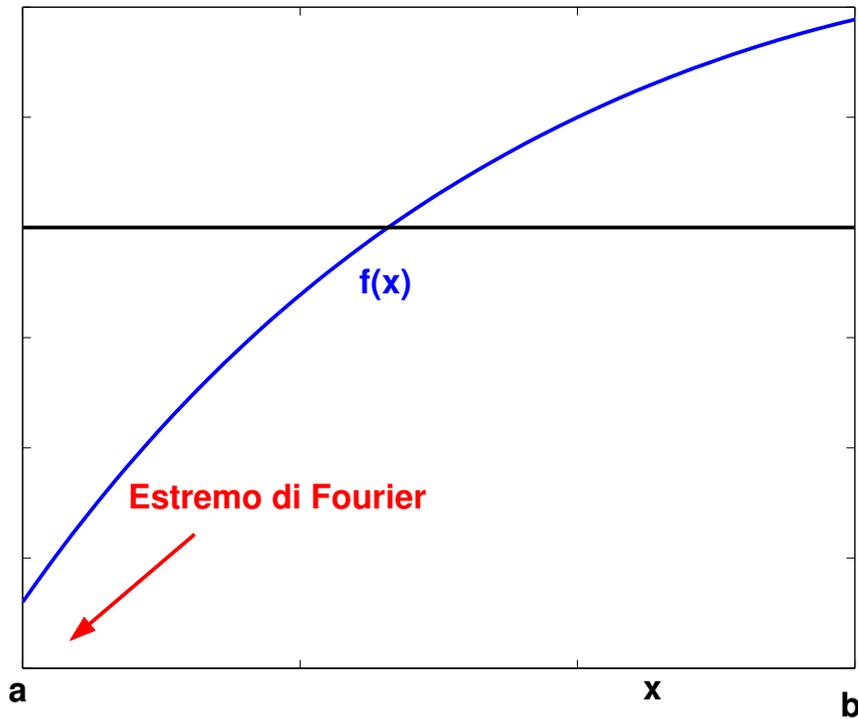
Se $f(x)$ ha **concavità fissa** in un intervallo I , è possibile stabilire un criterio di scelta dell'approssimazione iniziale che garantisce la **convergenza** del metodo.

Estremo di Fourier:

Data una funzione f **continua** e **convessa** in $I = [a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$, si dice **estremo di Fourier** di I l'estremo verso cui f rivolge la convessità .

Se **esiste** f'' , allora l'estremo di Fourier è a o b a seconda che $f(a)f''(a) > 0$ oppure $f(b)f''(b) > 0$.

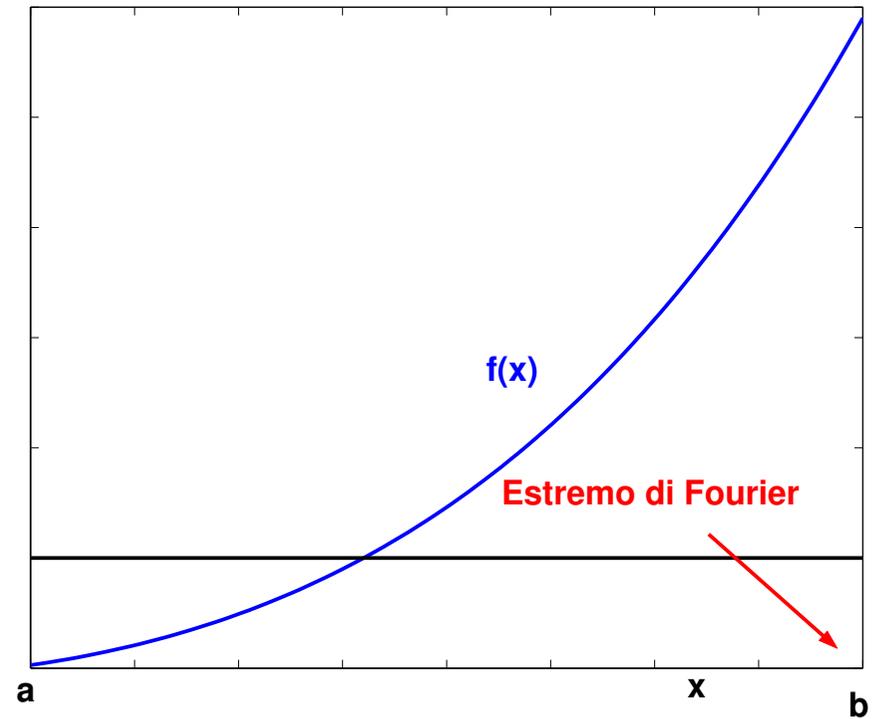
Estremo di Fourier: esempi



$$f''(x) < 0 \text{ per } x \in [a, b]$$

$$\begin{cases} f(a)f''(a) > 0 \\ f(b)f''(b) < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a$ è **estremo di Fourier**



$$f''(x) > 0 \text{ per } x \in [a, b]$$

$$\begin{cases} f(a)f''(a) < 0 \\ f(b)f''(b) > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow b$ è **estremo di Fourier**

Metodo di Newton-Raphson: convergenza

Ipotesi di applicabilità :

- $f(a)f(b) < 0$
- f, f', f'' sono **continue** in I : $f \in C^2[a, b]$;
- $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a, b]$;
- $f''(x) \neq 0$ per $x \in [a, b]$ e x_0 è l'**estremo di Fourier** di $[a, b]$.

⇒

- 1) esiste un'**unica radice** $\xi \in [a, b]$;
- 2) la **successione delle approssimazioni**

$$\left\{ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \right\} \quad k = 1, 2, \dots$$

è **monotona** e **converge** a ξ ;

- 3) se $f \in C^3[a, b]$, la convergenza è **quadratica**.

Nell'esempio precedente, relativo alla funzione $f(x) = 4x^3 - 5x$, non è soddisfatta l'ipotesi relativa alla derivata seconda. Al contrario, per la funzione $f(x) = x^3 - 10x^2 + 5$, considerando l'intervallo $I = [0.6, 0.8]$, si ha

$$f''(x) = 6x - 20 = 0 \iff x = \frac{10}{3} \notin I$$

Le ipotesi del teorema sono verificate e, poichè

$$f''(0.6) = \frac{18}{5} - 20 < 0 \quad f''(0.8) = \frac{24}{5} - 20 < 0,$$

mentre

$$f(0.6) > 0 \quad f(0.8) < 0,$$

l'estremo di Fourier è l'estremo $b = 0.8$, che quindi può essere scelto come approssimazione iniziale del metodo di Newton-Raphson, cioè $x_0 = 0.8$.

Esercizio: eseguire le iterazioni e verificare la convergenza monotona.

Problema 2: Soluzione con Metodo di NR

$$f(\lambda) = e^\lambda + \frac{0.435}{\lambda}(e^\lambda - 1) - 1.564 = 0 \quad \lambda \in I = [0.05, 0.15]$$

- Nell'intervallo I è stato separato un **unico zero**
- f, f', f'' sono **continue** in I
- $f'(\lambda) = e^\lambda - \frac{0.435}{\lambda^2}(e^\lambda - 1) + \frac{0.435}{\lambda}e^\lambda \neq 0$ per $\lambda \in I$

\Rightarrow Lo zero può essere approssimato con il **metodo delle tangenti**

Inoltre $f''(\lambda) = e^\lambda + \frac{0.87}{\lambda^3}(e^\lambda - 1) - \frac{0.87}{\lambda^2}e^\lambda + \frac{0.435}{\lambda}e^\lambda > 0$ in I

\Rightarrow esiste l'**estremo di Fourier** di I :

$$f(0.15)f''(0.15) > 0 \Rightarrow x_0 = 0.15$$

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $	$ f(x_k) $
0	0.1500000000000000	10.0000000000000000	0.06715354664030
1	0.10211384134812	0.04788615865188	0.00149497988981
2	0.10099851665312	0.00111532469500	0.00000078594305
3	0.10099792968591	0.00000058696721	0.000000000000022
4	0.10099792968575	0.000000000000016	0.000000000000000
5	0.10099792968575	0.000000000000000	0.000000000000000

Ripetere scegliendo $x_0 = 0.05$

Metodi di linearizzazione

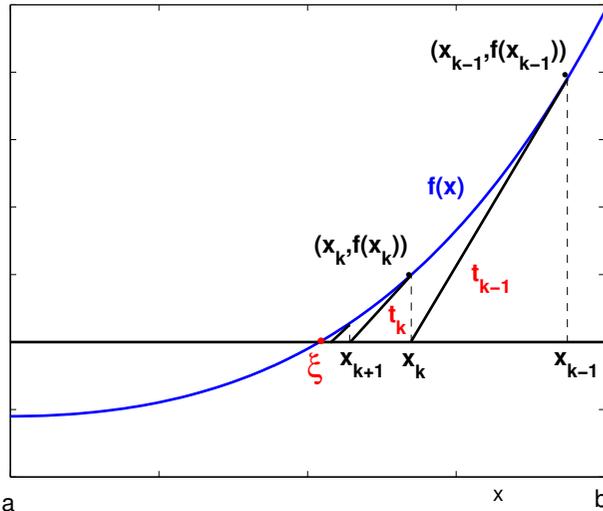
Il metodo di Newton-Raphson richiede la conoscenza della $f'(x)$ che non sempre è di facile valutazione.

Metodi alternativi sono, per esempio,

- il metodo della *tangente fissa*: ad ogni iterazione $f'(x_n)$ è approssimato con $f'(x_0)$
- il metodo delle *secanti con estremi variabili*: $f'(x_n)$ è approssimato con il rapporto incrementale
- il metodo delle *secanti con estremo fisso*: $f'(x_n)$ è approssimato con il rapporto incrementale in cui un punto rimane fisso ad ogni iterazione

Metodi di linearizzazione

Metodo di Newton-Raphson

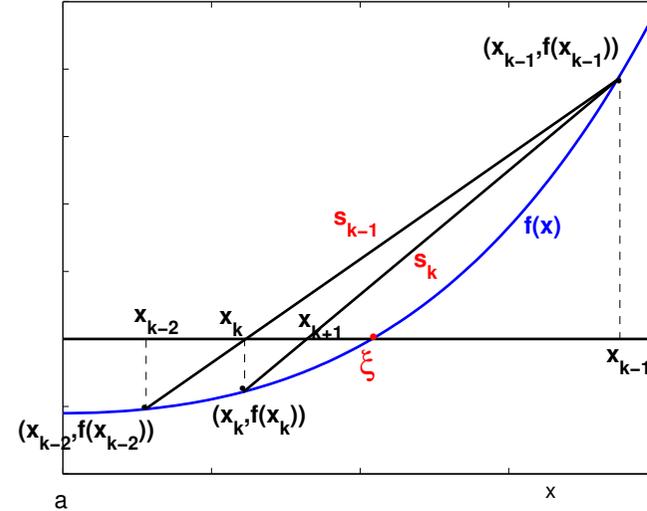


Ad ogni **iterazione** $k = 1, 2, \dots$ la **nuova approssimazione** x_k è data dall'**intersezione** tra la **retta** t_{k-1} , **tangente** a $f(x)$ nel punto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, e $y = 0$.

Algoritmo:

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Metodo delle secanti con estremi variabili



Ad ogni **iterazione** $k = 2, 3, \dots$ la **nuova approssimazione** x_k è data dalla **intersezione** tra la **retta** s_{k-1} , **secante** $f(x)$ nei punti $(x_{k-2}, f(x_{k-2}))$ e $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, e $y = 0$.

Algoritmo:

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ dati} \\ x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

Metodo delle secanti

$$\begin{cases} x_0, x_1 & \text{dati} \\ x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}, & k = 2, \dots \end{cases}$$

Vantaggi:

- si può usare quando **non si conosce** la derivata di $f(x)$ o quando $f(x)$ è **nota per punti**
- ad ogni passo richiede **una sola** valutazione funzionale

Svantaggi:

- servono **due approssimazioni iniziali** x_0 e x_1
- la scelta di x_0 e x_1 deve essere **"accurata"**

Convergenza del metodo delle secanti

Se

- è stato **separato** un intervallo $I = [a, b]$ **simmetrico** intorno alla **radice** ξ ,
- f, f', f'' sono **continue** in I : $f \in C^2[a, b]$,
- $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a, b]$,

\Rightarrow esiste un **intorno** $J \subseteq I$ di ξ tale che, se $x_0, x_1 \in J$, la **successione delle approssimazioni** $\{x_k\}$ **converge** a ξ con convergenza **superlineare**, cioè $1 < p < 2$.

Se $f''(x) \neq 0$ in I , l'**ordine di convergenza** è $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 $\Rightarrow E = p \simeq 1.62$

Convergenza del metodo delle secanti

Se $f''(x) \neq 0$ in I , allora $e_{k+1} \approx C_N^{\frac{p}{p+1}} e_k^p$

con $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e

C_N la costante asintotica del metodo di Newton ($C_N = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$).

Dim:

. . .

Esercizio

Data l'equazione non lineare

$$f(x) = x^3 + \alpha - \cos x = 0:$$

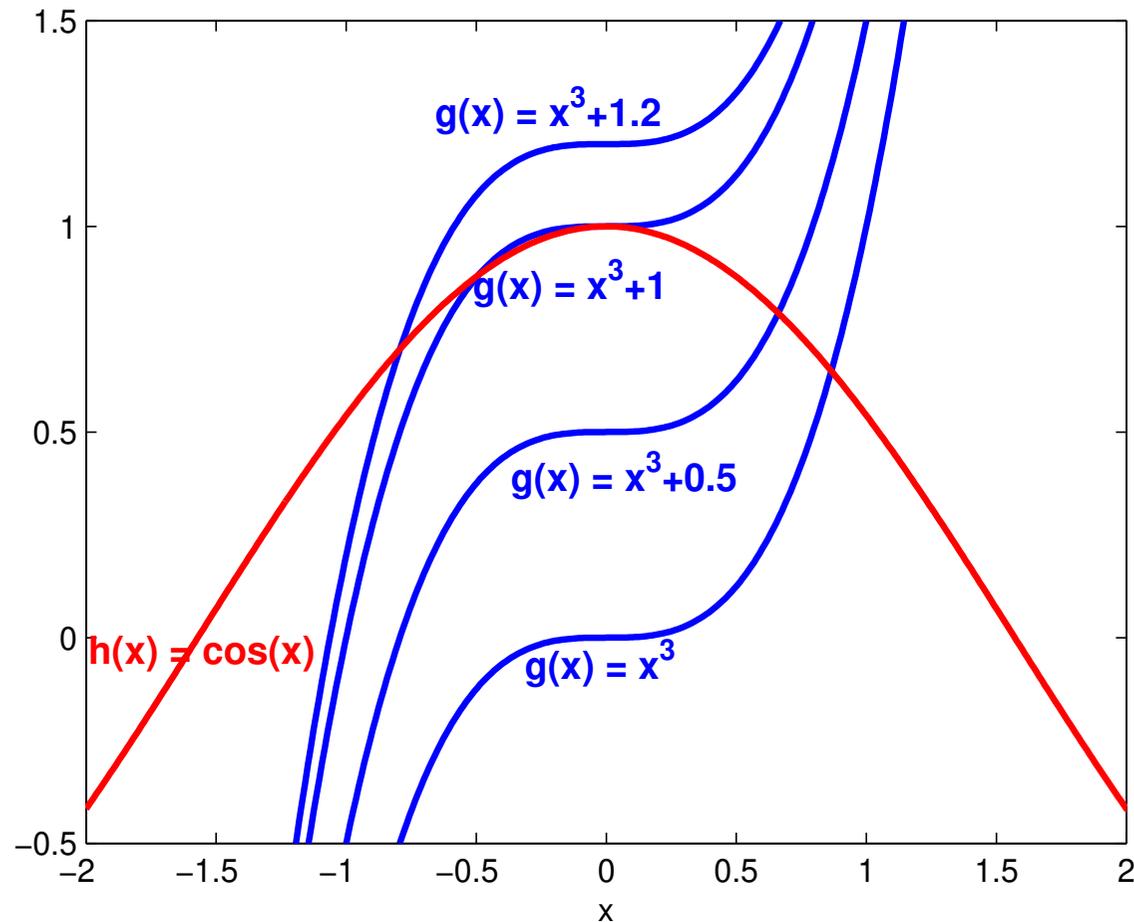
- 1) individuare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$, l'equazione non ammette radici positive
- 2) per $\alpha = \frac{1}{3}$ separare la radice più piccola $\tilde{\xi}$
- 3) fornire una stima a priori del numero di iterazioni necessarie per approssimare $\tilde{\xi}$ con un errore inferiore a $\epsilon = 10^{-6}$ tramite il **metodo di bisezione**;
- 4) quante iterazioni sono necessarie per approssimare con la stessa tolleranza ϵ la radice $\tilde{\xi}$ tramite il **metodo di Newton** e il **metodo delle secanti**?

Traccia della soluzione

1) Tracciando **qualitativamente** i grafici delle funzioni

$$y = g(x) = x^3 + \alpha \quad y = h(x) = \cos x,$$

si deduce che se $\alpha \geq 1$, la funzione $f(x)$ non ha zeri positivi.



2) L'intervallo $[0, 1]$ contiene l'**unica** radice positiva dell'equazione:

$$f(x) = x^3 + 1/3 - \cos x = 0$$

Infatti

$$f(0) = -2/3 < 0, f(1) = 4/3 - \cos(1) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(0)f(1) < 0$$

e inoltre

$$f'(x) = 3x^2 + \sin(x) > 0 \quad \text{per } x \in (0, 1]$$

3) Nell'intervallo $[0, 1]$ sono verificate le **ipotesi di applicabilità** del metodo di bisezioni.

Quindi il numero di iterazioni K per cui $|e_K| \leq \epsilon$ si ricava dalla relazione

$$|e_K| = |\xi - x_K| \leq \frac{b-a}{2^K} \leq \epsilon$$
$$\Rightarrow K > \frac{\log(b-a) - \log \epsilon}{\log 2}.$$

In questo caso $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 10^{-6}$

$$\Rightarrow K > \frac{\log(1) - \log 10^{-6}}{\log 2} \approx 19.9320 \Rightarrow K \geq 20.$$

4) Nel caso dei metodi di Newton e delle secanti si possono verificare le **ipotesi di applicabilità** nell'intervallo $[0, 1]$:

- nell'intervallo I è stato separato un **unico zero**
- f, f', f'' sono **continue** in I
- $f'(x) = 3x^2 + \sin(x) > 0$ per $x \in J \subset I$, $J = [\delta, 1]$ con $0 < \delta \ll 1$
- $f''(x) = 6x + \cos(x) > 0$ per $x \in I$

\Rightarrow l'estremo $b = 1$ è l'**estremo di Fourier** dell'intervallo J .

Il numero di iterazioni si può calcolare eseguendo le iterate.

In alternativa, l'approssimazione iniziale si può scegliere come la soluzione stimata eseguendo un'iterazione del metodo di bisezione, ovvero $x_0 = \frac{1}{2}$. (**OSS**: non è garantita la convergenza!)

k	x_k (bisez.)	$ x_k - x_{k-1} $	x_k (Newton)	$ x_k - x_{k-1} $	x_k (secanti)	$ x_k - x_{k-1} $
1	0.500000000		1.		0., 1.	
2	0.750000000	0.25e+0	0.793560583	0.21e+0	0.456715571	0.54e+0
3	0.625000000	0.12e+0	0.742925006	0.51e-1	0.658587384	0.20e+0
4	0.687500000	0.62e-1	0.739971453	0.29e-2	0.775393863	0.12e+0
5	0.718750000	0.31e-1	0.739961685	0.98e-5	0.736625691	0.39e-1
6	0.734375000	0.16e-1	0.739961685	0.11e-9	0.739832822	0.32e-2
7	0.742187500	0.78e-2			0.739962167	0.13e-3
8	0.738281250	0.39e-2			0.739961685	0.48e-6
9	0.740234375	0.19e-2				
10	0.739257812	0.97e-3				
11	0.739746097	0.49e-3				
12	0.739990234	0.24e-3				
13	0.739868164	0.12e-3				
14	0.739929199	0.61e-4				
15	0.739959717	0.30e-4				
16	0.739974976	0.15e-4				
17	0.739967346	0.76e-5				
18	0.739963531	0.38e-5				
19	0.739961624	0.19e-5				
20	0.739962578	0.95e-6				

Esercizio 1.6

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, *Esercizi di Calcolo Numerico*, II ed.

Data l'equazione dipendente da un parametro positivo α

$$f(x, \alpha) = \alpha e^x \sqrt{x} - 1 = 0$$

determinare i valori di α per i quali f ha una radice in $I = [0.01, 1]$; detto A l'insieme di tali valori, si consideri $\alpha \in A$ e si discuta con quali modalità va applicato il metodo di Newton-Raphson per approssimare detta radice.

Soluzione Il dominio di esistenza di f è dato da $x \geq 0$, $\forall \alpha$.

Inoltre, risulta

$$f(0) = \alpha \cdot e^0 \cdot 0 - 1 = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$f'(x) = \alpha \left(e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} \right) = \alpha e^x \left(\frac{2x + 1}{2\sqrt{x}} \right) > 0 \quad \forall x > 0$$

Infatti

$$e^x > 0 \quad \forall x, \quad \sqrt{x} > 0 \quad \forall x > 0 \quad \text{e} \quad 2x + 1 > 0 \quad \forall x > -\frac{1}{2}$$

Quindi, f è una funzione **monotona crescente**.

Poichè risulta

$$f(0.01) = \alpha \cdot \frac{e^{0.01}}{10} - 1 \quad \text{e} \quad f(1) = \alpha e - 1$$

affinchè f abbia la sua **unica** radice in I deve accadere

$$f(0.01) < 0 \quad \text{mentre} \quad f(1) > 0,$$

(f è monotona crescente) cioè

$$\alpha \cdot \frac{e^{0.01}}{10} - 1 < 0 \quad \text{e} \quad \alpha e - 1 > 0$$

da cui deriva

$$\frac{1}{e} < \alpha < \frac{10}{e^{0.01}}$$

Per poter applicare il Metodo di Newton-Raphson e soprattutto per essere certi che il metodo converga alla radice cercata, è necessario che f, f', f'' siano funzioni continue in I , che $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$.

Sicuramente f e f' sono funzioni continue in I , inoltre la monotonia di f garantisce che $f'(x) \neq 0$ in I .

Per quanto riguarda f'' , invece, si ha

$$f''(x) = \alpha e^x \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} \right) + \alpha e^x \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} \right) = \frac{\alpha e^x}{2\sqrt{x}} \frac{4x^2 + 4x - 1}{2x}$$

che risulta continua in I ma

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

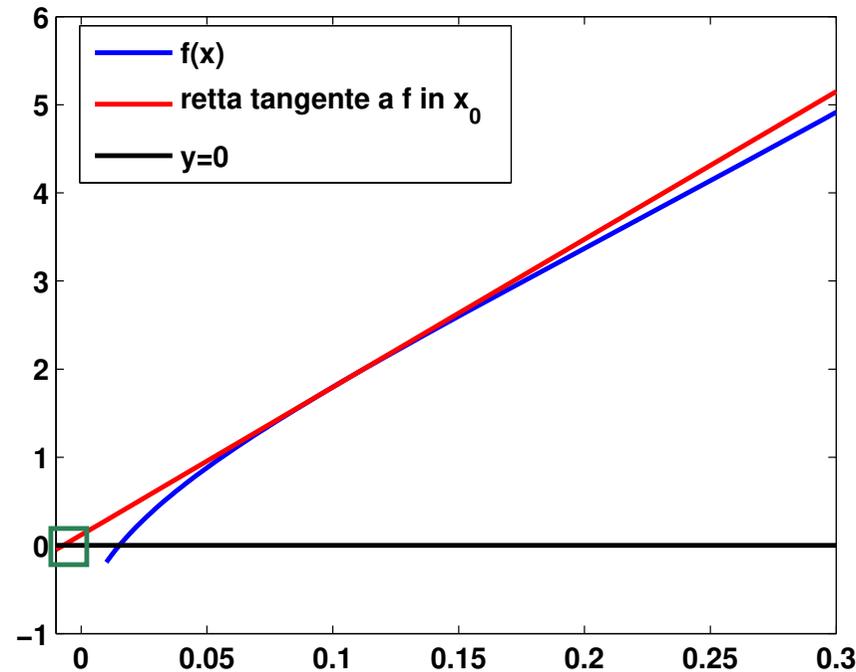
Poichè la soluzione positiva (cioè $x = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$) appartiene all'intervallo I , la **convergenza** del metodo **non è garantita** per qualsiasi scelta del punto iniziale x_0 .

In questo caso, può accadere che nella successione delle approssimazioni prodotte siano compresi punti che non appartengono all'intervallo I , come, per esempio, scegliendo $x_0 = 0.38$ e $\alpha = 8$.

k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	0.008062568849982	0.371937431150018	0.275850501413549

La tangente alla funzione f nel punto x_0 interseca l'asse delle ascisse nel punto $x_1 = 0.008062568849982 \notin I$

Inoltre, per alcune scelte di α e x_0 , come per esempio $\alpha = 8$ e $x_0 = 0.1$, il punto di intersezione può non appartenere al dominio di esistenza della funzione stessa!!! $x_1 = -0.007 < 0$



In questi casi è necessario cambiare la scelta del punto iniziale. Per esempio, si può calcolare l'approssimazione prodotta dal metodo di bisezione dopo poche iterazioni (o quando si raggiunge una certa precisione) e usarla come punto iniziale per il metodo di Newton.

Per esempio, dopo **quattro** iterazioni del metodo di bisezione ($\epsilon = 0.5 \cdot 10^{-1}$)

k	a_k	b_k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	0.01	0.505000	0.2575000	0.2475000	4.251815163314802
2	0.01	0.257500	0.1337500	0.1237500	2.344442774424002
3	0.01	0.133750	0.0718750	0.0618750	1.304590841882905
4	0.01	0.071875	0.0409375	0.0309375	0.686279560806184

si ottiene $x_4 = 0.0409375$ che, usato come punto iniziale nel metodo di Newton produce

k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	0.010137854601102	0.030799645398898	0.186297162576147
2	0.014687723854149	0.004549869253046	0.016111161677858
3	0.015155019259722	0.000467295405573	0.000115181238480
4	0.015158408093962	0.000003388834240	0.000000005864268
5	0.015158408266516	0.000000000172555	0.000000000000000
6	0.015158408266517	0.000000000000000	0.000000000000000

Al contrario, per altre scelte sia di α che del punto iniziale x_0 , come per esempio $x_0 = 0.5$ e $\alpha = 1$, il metodo converge alla soluzione in poche iterazioni

k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	0.428881942480353	0.071118057519647	0.005610829411438
2	0.426305773395493	0.002576169084861	0.000006567282834
3	0.426302751011004	0.000003022384489	0.0000000000008998
4	0.426302751006863	0.0000000000004141	0.0000000000000000
5	0.426302751006863	0.0000000000000000	0.0000000000000000

Osserviamo, infine, che scegliendo

$$\alpha = \frac{1}{e^{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}},$$

la radice di f è il suo punto di flesso (la derivata seconda si annulla in questo punto) e l'ordine di convergenza del metodo di Newton aumenta essendo almeno 3.

Esercizio

Data l'equazione non lineare

$$h(y; \xi) = (\xi - 1) e^{\sqrt{y}} - 1 = 0,$$

dove ξ è un parametro reale.

1. Determinare i valori di ξ per cui l'equazione ha una radice nell'intervallo $I = [0.02, 1.02]$;
2. per i valori di ξ individuati al punto precedente, verificare se il metodo delle tangenti è adatto ad approssimare la radice in I . Specificare la scelta dell'approssimazione iniziale e l'ordine di convergenza del metodo.

Soluzione del punto 1)

La funzione è ben definita per $y \geq 0$.

Inoltre si osserva che, poichè

$$e^{\sqrt{y}} > 0 \quad \forall y \geq 0$$

l'uguaglianza

$$(\xi - 1) e^{\sqrt{y}} = 1$$

non può essere mai verificata per valori di $\xi \leq 1$

Si osserva anche che, $e^{\sqrt{y}} \geq 1 \quad \forall y \geq 0$, e quindi l'uguaglianza

$(\xi - 1) e^{\sqrt{y}} = 1$ non è mai verificata per $\xi > 2$.

Infine, per $\xi = 2$, lo zero di $h(y; 2)$ è proprio $y = 0 \notin I$.

Sicuramente gli eventuali valori di ξ per cui la funzione h ammette uno zero in I soddisfano la seguente condizione

$$1 < \xi < 2$$

D'altra parte,

$$h'(x; \xi) = (\xi - 1) \frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} > 0, \quad \forall y > 0 \quad \xi > 1,$$

quindi, $h(y; \xi)$ è una funzione monotona crescente per $\forall y > 0 \quad \xi > 1$, e se ammette uno zero in I , questo è anche unico.

Affinchè abbia uno zero nell'intervallo I , deve accadere

$$h(0.02; \xi) < 0$$

$$h(1.02; \xi) > 0$$

cioè

$$(\xi - 1)e^{\sqrt{0.02}} - 1 < 0$$

$$(\xi - 1)e^{\sqrt{1.02}} - 1 > 0$$

da cui

$$\xi < \frac{1}{e^{\sqrt{0.02}}} + 1 \approx 1.8681$$

$$\xi > \frac{1}{e^{\sqrt{1.02}}} + 1 \approx 1.3642.$$

Possiamo, dunque, concludere che per $\frac{1}{e^{\sqrt{1.02}}} + 1 < \xi < \frac{1}{e^{\sqrt{0.02}}} + 1$ la funzione $h(y; \xi)$ ammette un unico zero nell'intervallo $I = [0.02, 1.02]$.

Soluzione del punto 2) In corrispondenza dei valori del parametro ξ determinati al punto precedente e per $y \in I$ è possibile verificare che $h(y; \xi) \in C^2(I)$ e che $h'(y; \xi) \neq 0$. Pertanto, è possibile applicare il metodo di Newton. Inoltre, poichè

$$h''(y; \xi) = \frac{\xi - 1}{4} \frac{e^{\sqrt{y}}}{y} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{y}} \right),$$

risulta

$$h''(y; \xi) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \in I.$$

Ne segue che la condizione $h''(y; \xi) \neq 0$ non è soddisfatta e, dunque, non sono verificate le ipotesi del teorema di convergenza scegliendo l'estremo di Fourier come approssimazione iniziale. Tuttavia, si può osservare che $y = 1$ è lo zero della funzione $h(y; 1 + 1/e)$. In questo caso l'ordine di convergenza del metodo di Newton è maggiore di 2. Al contrario, in corrispondenza degli altri valori ammissibili del parametro ξ , la convergenza è quadratica in quanto sicuramente $C_N \neq 0$

IDEAL AND NONIDEAL GAS LAWS (CHEMICAL/BIO ENGINEERING)

Background: La legge dei gas perfetti è :

$$pV = nRT$$

dove: p è la pressione, V è il volume, n è il numero di moli, R la costante dei gas universale e T è la temperatura.

Ma: Accurata solo in un range limitato di p, T

Un'equazione alternativa é quella di Van der Waals:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) = RT$$

dove: $v = V/n$ è il volume molare, a, b sono costanti empiriche dipendenti dal gas

Problema: Per la progettazione di appositi contenitori occorre una stima accurata di v per biossido di carbonio e ossigeno per diverse combinazioni di temperatura e pressione (confrontare i risultati delle due leggi.)

Si hanno i seguenti dati:

$$\begin{array}{l} R = 0.082054 \text{ L atm/(mol K)} \\ \left. \begin{array}{l} a = 3.592 \\ b = 0.04267 \end{array} \right\} \text{ carbon dioxide} \\ \left. \begin{array}{l} a = 1.360 \\ b = 0.03183 \end{array} \right\} \text{ oxygen} \end{array}$$

La progettazione richiede di esaminare i valori di pressione 1, 10, 100 atm in combinazione con le temperature 300, 500, 700 K.

Soluzione:

Usando la legge dei gas perfetti con $n = 1$, $p = 1 \text{ atm}$ and $T = 300 \text{ K}$

$$v = \frac{V}{n} = \frac{RT}{p} = 0.082054 \frac{\text{L atm}}{\text{mol K}} \frac{300 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 24.6162 \text{ L/mol}$$

Questi calcoli sono ripetuti per tutte le temperature e le pressioni richieste.

Temperature, K	Pressure, atm	Molal Volume (Ideal Gas Law), L/mol
300	1	24.6162
	10	2.4616
	100	0.2462
500	1	41.0270
	10	4.1027
	100	0.4103
700	1	57.4378
	10	5.7438
	100	0.5744

Ma per le soluzioni con l'eq. di van der Waals:

$$f(v) = \left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) - RT$$

bisogna utilizzare i **metodi numerici**.

È facile calcolare la **derivata prima**:

$$f'(v) = p - \frac{a}{v^2} + \frac{2ab}{v^3}$$

per cui posso usare il **metodo di Newton-Raphson**:

$$v_{i+1} = v_i - \frac{f(v_i)}{f'(v_i)}$$

```
clear
```

```
close all
```

```
R = 0.082054;    a1 = 3.592;    b1 = 0.04267;
```

```
p = [1 10 100];    T = [300 500 700];
```

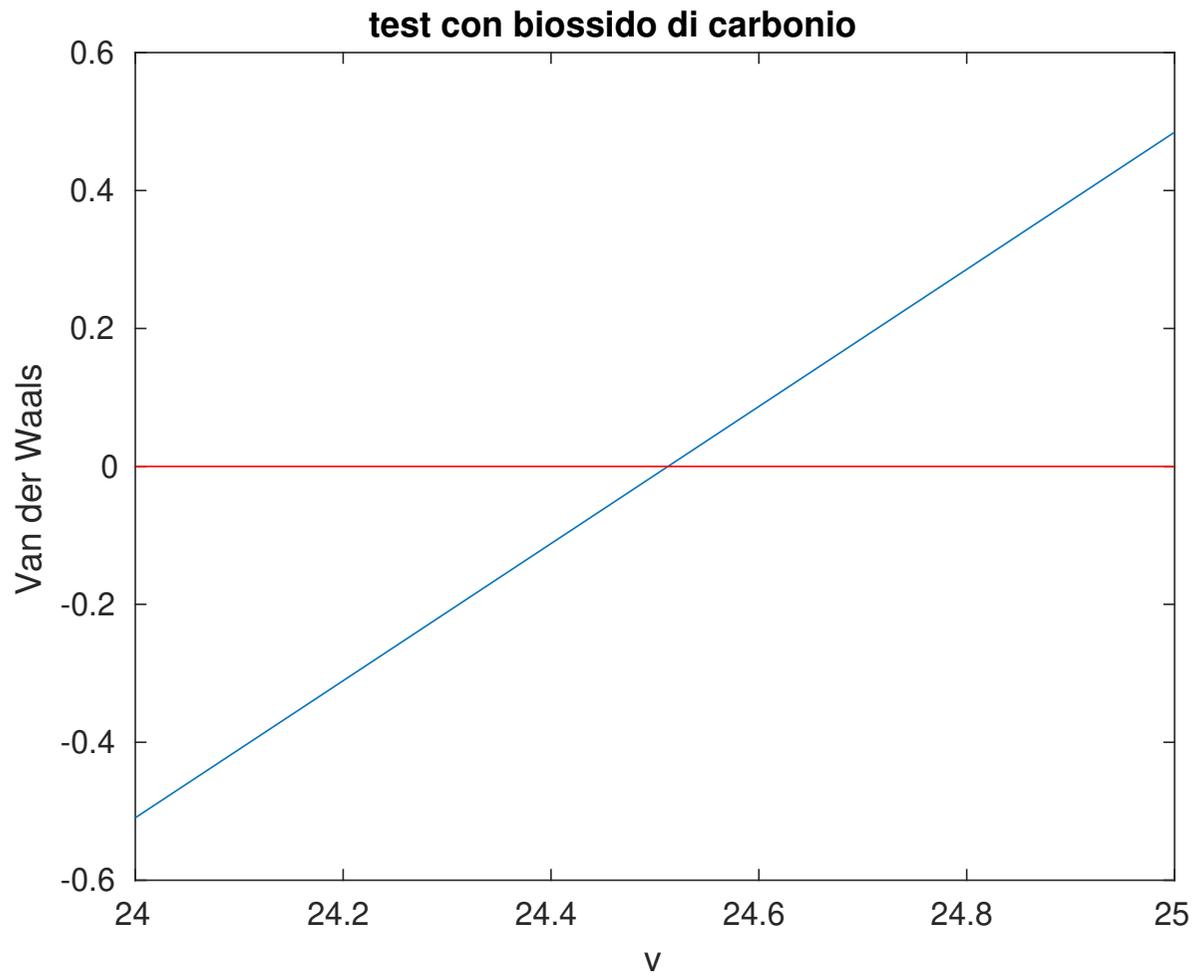
```
v = [24 : 0.0001 : 25];
```

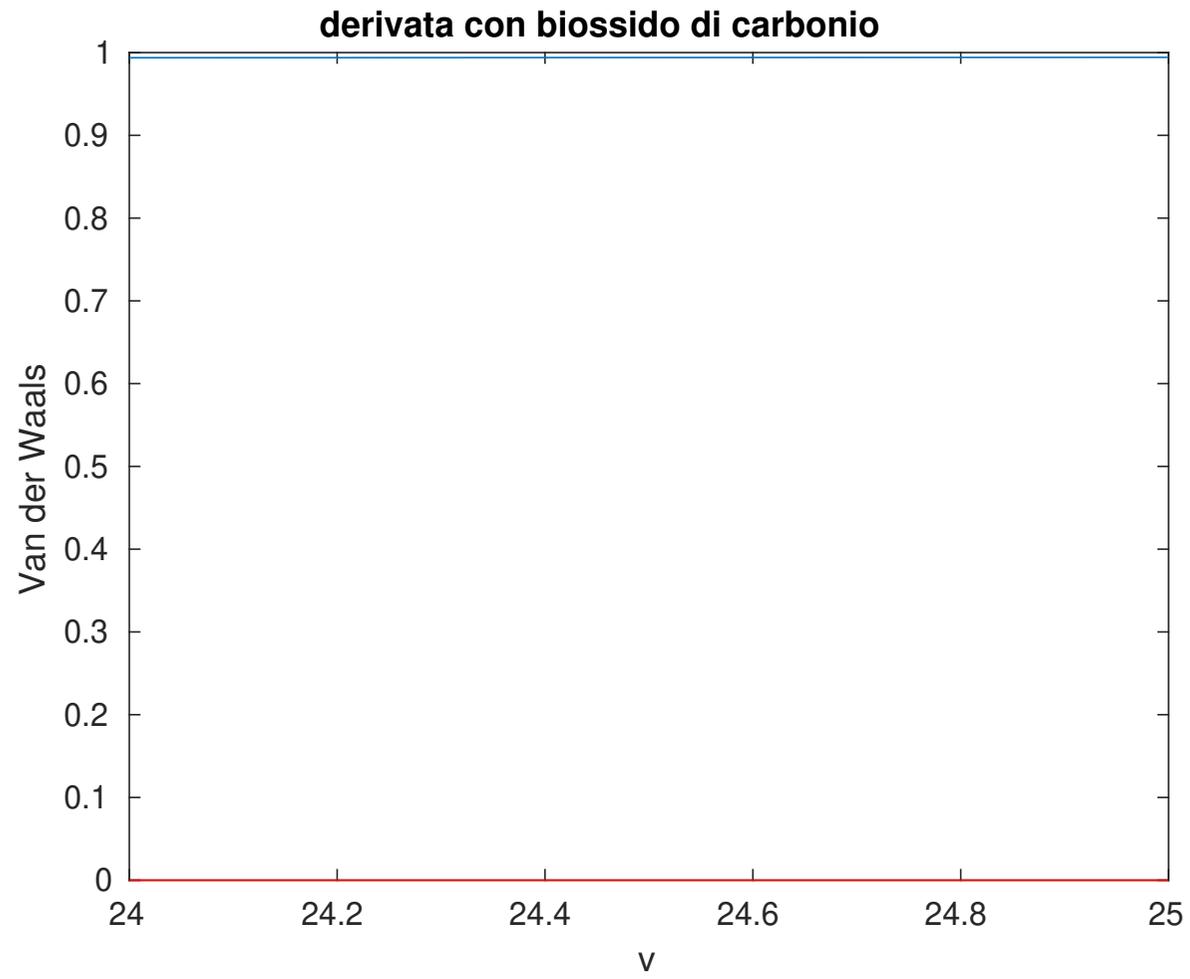
```
f = (p(1) + a1./v.^2). * (v - b1) - R * T(1);
```

```
figure, plot(v,f), hold on,
```

```
plot(v,zeros(1,length(v)),'r')
```

```
xlabel('v'), ylabel('Van der Waals'), title('test con biossido di carbo-  
nio')
```





Es.: Con punto iniziale 24.6162, il volume molare di biossido di carbonio a 300K e 1atm è 24.5126L/mol (dopo solo due iterazioni con un **errore approssimato** ($\epsilon_a = (v_k - v_{k-1})/v_k < 0.001\%$). In generale:

Temperature, K	Pressure, atm	Molal Volume (Ideal Gas Law), L/mol	Molal Volume (van der Waals) Carbon Dioxide, L/mol	Molal Volume (van der Waals) Oxygen, L/mol
300	1	24.6162	24.5126	24.5928
	10	2.4616	2.3545	2.4384
	100	0.2462	0.0795	0.2264
500	1	41.0270	40.9821	41.0259
	10	4.1027	4.0578	4.1016
	100	0.4103	0.3663	0.4116
700	1	57.4378	57.4179	57.4460
	10	5.7438	5.7242	5.7521
	100	0.5744	0.5575	0.5842

Alcune considerazioni:

- 1) La stima dei valori con l'eq. di van der Waals (piú precisa) differisce da quella ottenuta con l'eq. dei gas perfetti: strategica per una corretta progettazione !!!
- 2) La conoscenza della derivata prima ci ha condotto al metodo di Newton-Raphson altrimenti avremmo potuto scegliere altri metodi
- 3) Il metodo di NR però sarebbe da preferire nel caso di una progettazione con calcolo automatico di vari gas a diverse condizioni, rispetto al metodo di bisezione in quanto **piú efficiente** (ad es. 1s per tante stime!)
- 4) Si potrebbe scegliere l'estremo di Fourier?

Metodi iterativi a un punto (o del punto unito)

Un **metodo iterativo a un punto** in \mathbf{R} ha la forma:

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

La funzione φ è detta **funzione di iterazione**.

Nota. Per il **metodo di Newton** $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Convergenza

Il metodo è **convergente** se la **successione delle approssimazioni** $\{x_n = \varphi(x_{n-1})\}_{n \geq 1}$ verifica

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} |\xi - x_n| = 0} \iff \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi}$$

Criterio di arresto

Se il metodo è convergente, una **buona approssimazione** di ξ è data dal valore x_N per il quale $\boxed{|x_N - x_{N-1}| \leq \epsilon}$

Metodo del punto unito

Il **metodo del punto unito** consiste nel riscrivere l'equazione non lineare di partenza in una forma equivalente:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$$

Se ξ è **radice** di f allora è **punto unito** di φ :

$$f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = \varphi(\xi)$$

Nota. Trovare il **punto unito** di φ significa trovare l'ascissa del punto di **intersezione** tra la retta $y = x$ e la curva $y = \varphi(x)$.

Una funzione può avere **più di un punto unito**, **solo uno** o **nessuno**.

Metodo del punto unito: Esempio 1

Trovare i **punti uniti** della **funzione di iterazione**

$$\varphi(x) = x^2 - 2 \quad \text{per} \quad -2 \leq x \leq 3.$$

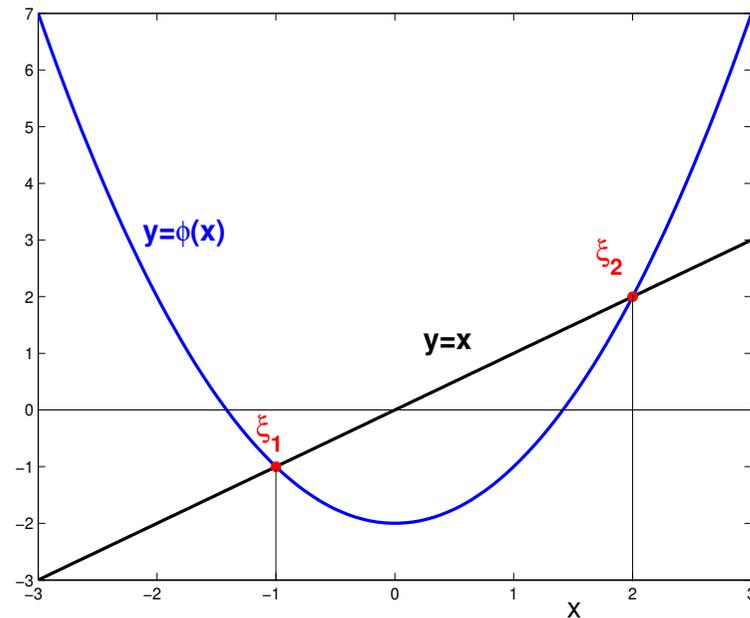
Si tratta di trovare i valori di x per i quali

$$\varphi(x) = x^2 - 2 = x \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^2 - x - 2 = 0$$

Ci sono **due** punti uniti:

$$\xi_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$$

$$\xi_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(2) = (2)^2 - 2 = 2$$



Nota. ξ_1 e ξ_2 sono anche le soluzioni di $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$

Convergenza: condizione necessaria

Teorema 1. Se la successione

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

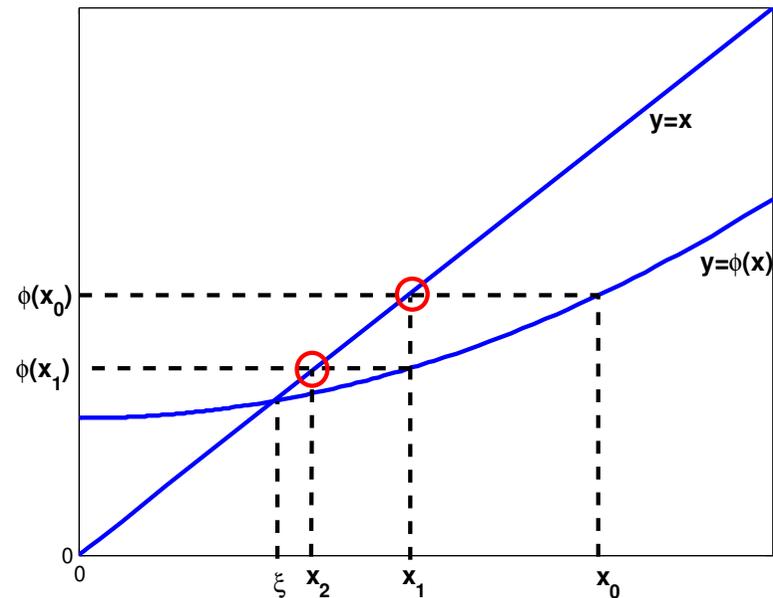
è **convergente** a un valore τ e φ è **continua** in $\tau \Rightarrow \tau$ è **punto unito** di φ , cioè $\tau = \varphi(\tau)$.

Dimostrazione.

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} \right) = \varphi(\tau)$$

x_n converge \downarrow φ è continua \downarrow

Interpretazione grafica: metodo del punto unito



x_1 è l'ascissa del punto di intersezione della retta $y = \varphi(x_0)$ con la retta $y = x$

x_2 è l'ascissa del punto di intersezione della retta $y = \varphi(x_1)$ con la retta $y = x$

.....

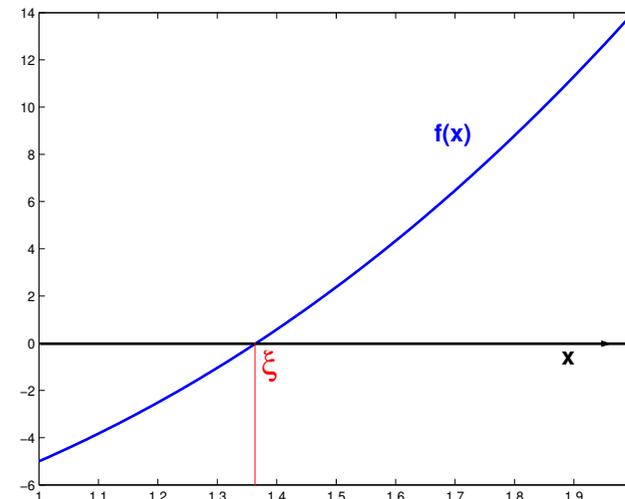
Metodo del punto unito: Esercizio

Verificare che l'equazione $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ ha un'**unica** radice in $[1, 2]$ e trovare un'opportuna **funzione di iterazione** per approssimarla.

Soluzione. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f'(x) = 3x^2 + 8x > 0 \forall x \in [1, 2]$

$\Rightarrow f(x)$ è **monotona crescente** $\Rightarrow \begin{cases} \min_{1 \leq x \leq 2} f(x) = f(1) = -5 < 0 \\ \max_{1 \leq x \leq 2} f(x) = f(2) = 14 > 0 \end{cases}$

\Rightarrow **esiste** una radice in $[1, 2]$ e, per la **monotonia**, è **unica**



Esercizio: funzioni di iterazione

Per trovare una funzione di iterazione bisogna operare sull'equazione

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

1) Isolo il termine in x^2

$$x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3)$$

$$\Rightarrow x = +\frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2} = \varphi_1(x)$$

2) Isolo il termine in x^3

$$x^3 = 10 - 4x^2$$

$$\Rightarrow x = (10 - 4x^2)^{1/3} = \varphi_2(x)$$

3) Aggiungo $-x$ ad ambo i membri

$$x^3 + 4x^2 - 10 - x = -x$$

$$\Rightarrow x = x - x^3 - 4x^2 + 10 = \varphi_3(x)$$

4) Divido per x e isolo il termine in x^2

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 10}{x} = 0$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2} = \varphi_4(x)$$

5) Metodo di Newton

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x$$

$$\Rightarrow x = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} = \varphi_5(x)$$

Metodo delle approssimazioni successive

$$\begin{cases} x_0 = 1.5 \\ x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Iter	$x_n = \varphi_5(x_{n-1})$	$x_n = \varphi_3(x_{n-1})$
1	1.5000000000000000	1.5000000000000000
2	1.3733333333333333	-0.8750000000000000
3	1.36526201487463	6.732421875000
4	1.36523001391615	-469.720012001693
5	1.36523001341410	1.03×10^8
6	1.36523001341410	

converge

diverge

Iter	$x_n = \varphi_1(x_{n-1})$	$x_n = \varphi_2(x_{n-1})$	$x_n = \varphi_4(x_{n-1})$
1	1.500000000	1.500000000	1.500000000
2	1.286953768	1.000000000	0.816496581
3	1.402540803	1.817120593	2.996908806
4	1.345458374	-1.474794991	0.000000000 - 2.941235061i
5	1.375170253	1.091370196	2.753622388 + 2.753622388i
6	1.360094193	1.736427733	1.814991519 - 3.534528790i
7	1.367846968	-1.272545596	2.384265848 + 3.434388064i
8	1.363887003	1.521542585	2.182771900 - 3.596879228i
9	1.365916733	0.904354471	2.296997587 + 3.574104462i
10	1.364878217	1.887879630	2.256510286 - 3.606561220i
11	1.365410061	-1.62061324	2.279179049 + 3.601936572i
12	1.365137821	-0.79662594	2.271142587 - 3.608371470i
13	1.365277208	1.954082914	2.275631311 + 3.607451621i
14	1.365205850	-1.74063131	2.274039927 - 3.608725567i
15	1.365242384	-1.28446791	2.274928362 + 3.608543344i
16	1.365223680	1.503778436	2.274613384 - 3.608795481i
17	1.365233256	0.984632264	2.274789213 + 3.608759411i
18	1.365228353	1.829353811	2.274726876 - 3.608809311i
19	1.365230863	-1.50164877	2.2747616734 + 3.60880217i
20	1.365229578	0.993357253	2.274749337 - 3.608812048i
...			
25	1.365230029	-1.373190473	2.274754931 + 3.608812641i
...			
30	1.365230013	1.092266409	2.274754877 - 3.608812723i

converge

non converge

non converge

Convergenza: condizione sufficiente (1)

Teorema 2. Se φ è **derivabile** in $I = [a, b]$ e

$$i) \varphi : I \rightarrow I \Leftrightarrow a \leq \min_{x \in I} \varphi(x) \leq \max_{x \in I} \varphi(x) \leq b$$

$$ii) \exists k \in (0, 1) \text{ tale che } |\varphi'(x)| \leq k, x \in I$$

\Rightarrow α) esiste un **unico punto unito** $\xi \in I$ di $\varphi(\xi)$

β) la successione $x_n = \varphi(x_{n-1})$ è **convergente** a ξ
per ogni **approssimazione iniziale** $x_0 \in I$

Osservazione

Dalla dimostrazione del teorema precedente si deduce che l'ipotesi di derivabilità della funzione di iterazione φ nell'intervallo I può essere rilassata. Infatti, basta richiedere

$$\exists k \in (0, 1) : \forall x', x'' \in I \Rightarrow |\varphi(x') - \varphi(x'')| < k|x' - x''|,$$

cioè φ deve essere una **contrazione**.

Metodo del punto unito: Esercizio

Tornando all'esercizio proposto precedentemente ($f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$), possiamo osservare che

- la funzione φ_5 genera un procedimento iterativo convergente in quanto sono verificate le ipotesi di applicabilità del metodo di Newton. Infatti, f, f', f'' sono funzioni continue in $I = [1, 2]$, $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$; inoltre anche $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$
- la funzione $\varphi_3(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$, invece, non genera un procedimento iterativo convergente in I in quanto

$$\varphi_3'(x) = 1 - 3x^2 - 8x \quad \text{e quindi} \quad |\varphi_3'(x)| > 1 \quad \forall x \in I$$

(osservare che $\varphi_3''(x) < 0 \quad \forall x \in I$)

- la funzione $\varphi_4(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$ non genera un procedimento iterativo convergente in quanto I non è completamente contenuto nel dominio di esistenza D della funzione, infatti $D = [-\infty, -\sqrt{5}/2] \cup (0, \sqrt{5}/2]$ ($\sqrt{5}/2 = 1,118033989$)
- la funzione $\varphi_2(x) = (10 - 4x^2)^{1/3}$ non genera un procedimento iterativo convergente in quanto $\varphi(I) \notin I$ ($\varphi(2) = \sqrt[3]{-6} = -1.8171 \notin I$); inoltre $|\varphi'_2(x)| > 1$ in I (basta osservare che $\varphi'_2(x)$ non è definita in $x = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1.5811$)

- la funzione $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ genera un procedimento iterativo convergente alla radice dell'equazione non lineare anche se non è verificata la prima ipotesi del teorema ($\varphi(1) = 1.5$ mentre $\varphi(2) = \sqrt{2}/2 = 0,707106781$).

Tuttavia, poichè

$$\varphi_1'(x) = -\frac{3}{4} \frac{x^2}{\sqrt{10 - x^3}}$$

è una funzione monotona decrescente in I e sicuramente $|\varphi_1'(x)| < 1$ in $\tilde{I} = [1, 1.7]$, il procedimento iterativo risulta convergente in \tilde{I} .

Esempio

La funzione $\varphi(x) = x - \sin(x)$ ammette più di un punto fisso in quanto $\sin(x)$ è una funzione periodica.

$\varphi(x) = x - \sin(x)$ è stata ottenuta dalla equazione non lineare $f(x) = 0$, con $f(x) = \sin(x)$.

Nell'intervallo $I = [0, 2\pi]$, gli zeri di f sono $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \pi$, $\xi_3 = 2\pi$.

Tuttavia, la funzione $\varphi(x)$ sicuramente non genera un procedimento iterativo convergente a ξ_2 in quanto non è possibile trovare intervalli $J \in I : \xi_2 \in J$ per cui sia verificata la condizione $|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in J$.

Infatti, $\varphi'(x) = 1 - \cos(x)$ e pertanto in prossimità di ξ_2 risulta $|\varphi'(x)| \approx 2 > 1$.

Convergenza: condizione sufficiente (2)

Teorema 3. Se φ è **derivabile** in $I = [a, b]$ e

i) $\varphi(\xi) = \xi \quad \xi \in (a, b)$

ii) $\exists k \in (0, 1)$ tale che $|\varphi'(x)| \leq k, x \in I$

\Rightarrow esiste un **intorno** di $\xi : \Delta = [\xi - \delta, \xi + \delta] \subseteq I$ tale che

$\alpha)$ ξ è l'**unico punto unito** di $\varphi(\xi)$ in Δ

$\beta)$ la successione $\{x_n = \varphi(x_{n-1})\}, n = 1, 2, \dots,$ è **convergente** a ξ per ogni **approssimazione iniziale** $x_0 \in \Delta$

Applicazione al metodo delle tangenti

Teorema 4. Se $I = [a, b]$ è un **intervallo di separazione** di uno zero di f e inoltre

i) f, f', f'' sono **continue** in I : $f \in C^2[a, b]$

ii) $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a, b]$

\Rightarrow esiste un **intorno** $J \subseteq I$ di ξ tale che per $x_0 \in J$ la **successione delle approssimazioni**

$$\left\{ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \right\}, n = 1, 2, \dots,$$

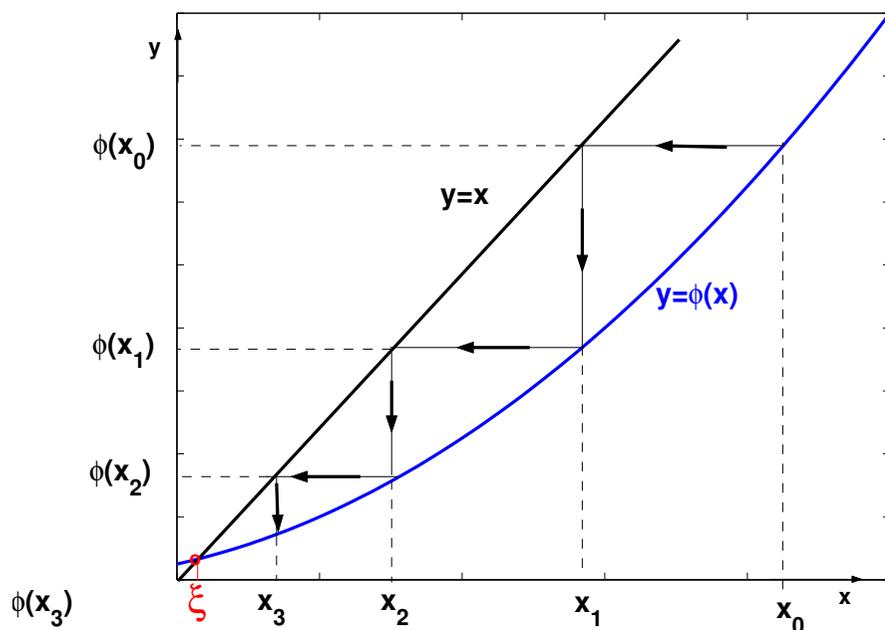
converge a ξ

Proprietà della successione delle approssimazioni

Si vuole caratterizzare la successione delle approssimazioni

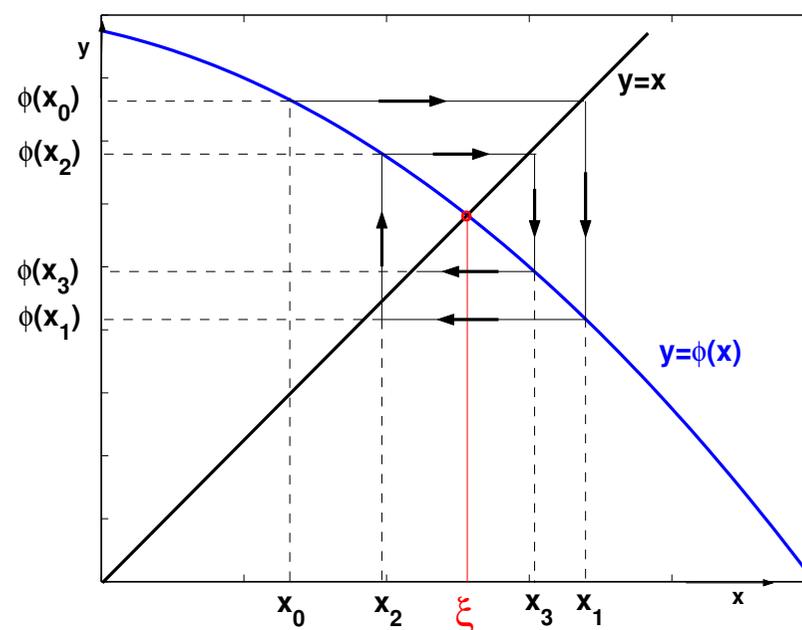
Dal **Teorema di Lagrange** si ha

$$e_n = \xi - x_n = \varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1}) = \varphi'(\xi)(\xi - x_{n-1}) = \varphi'(\xi)e_{n-1} \quad \xi \in [x_{n-1}, \xi]$$



$$0 \leq \varphi'(x) < 1$$

ad ogni iterazione l'errore diminuisce
in valore assoluto e preserva il segno

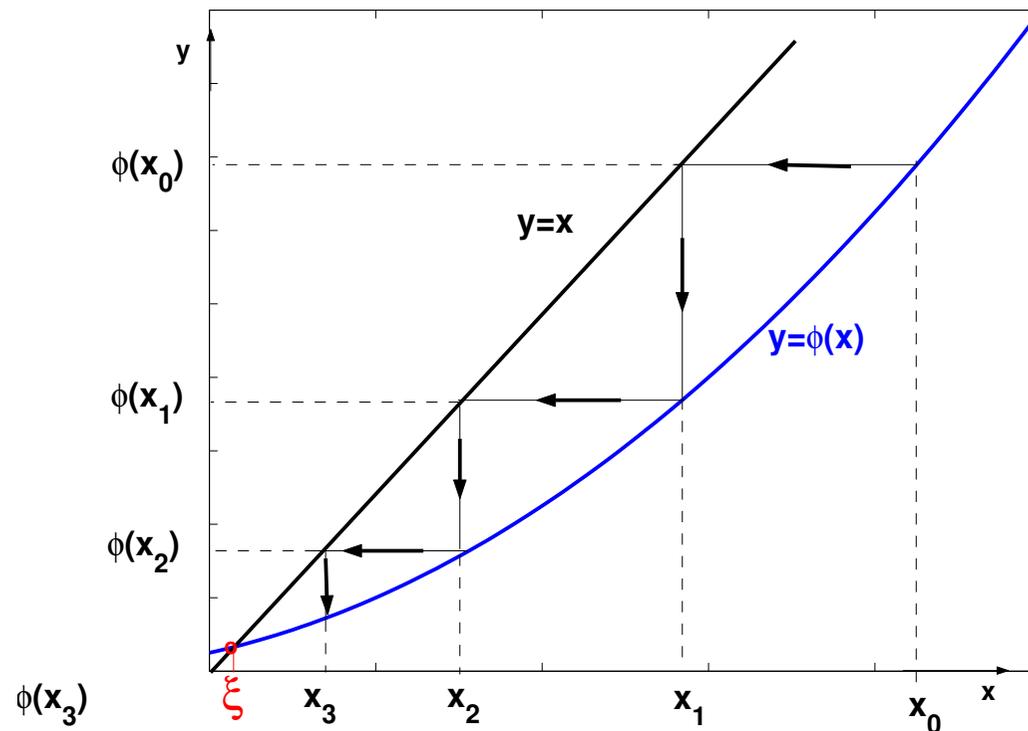


$$-1 < \varphi'(x) \leq 0$$

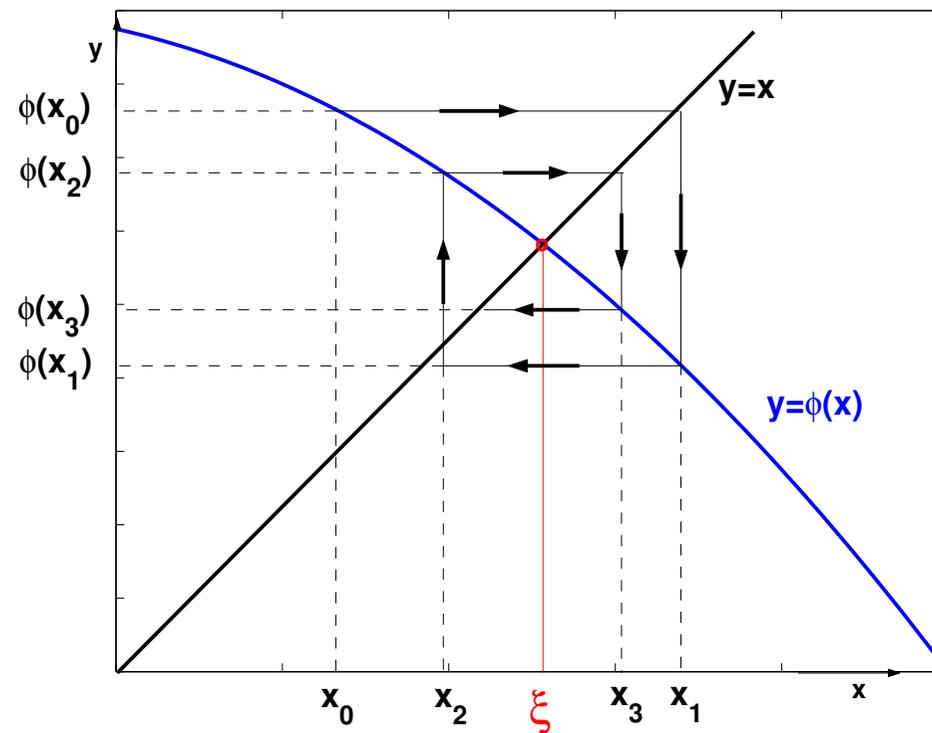
ad ogni iterazione l'errore diminuisce
in valore assoluto ma non conserva il segno

Proprietà della successione delle approssimazioni

- Se $0 \leq \varphi'(x) < 1$ per $x \in I$ la successione $\{x_n = \varphi(x_{n-1})\}$, $n = 1, 2, \dots$, è **monotona crescente** (se $e_0 > 0$) o **decrecente** (se $e_0 < 0$) \Rightarrow le approssimazioni sono per **difetto** (se $\xi > x_0$) o per **eccesso** (se $\xi < x_0$)



- Se $-1 < \varphi'(x) \leq 0$ per $x \in I$ la successione $\{x_n = \varphi(x_{n-1})\}$, $n = 1, 2, \dots$, **non è monotona** \Rightarrow le approssimazioni sono **alternativamente** per **difetto** e per **eccesso**



Ordine di convergenza

Teorema 5. Se

i) $\varphi \in C^{\mathbf{p}}(I)$ con I intorno di un punto unito ξ di φ

ii) la successione delle approssimazioni $\{x_n\}$ è **convergente**

iii) $\varphi(\xi) = \xi, \varphi^{(\nu)}(\xi) = 0 \quad \nu = 1, \dots, \mathbf{p} - 1$
 $\varphi^{(\mathbf{p})}(\xi) \neq 0$

\Rightarrow il metodo ha **ordine di convergenza p**

Esempi

- Se $\varphi'(\xi) \neq 0 \Rightarrow p = 1$ la convergenza è **lineare**:

$$C = \varphi'(\xi) \leq k := \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)| \quad \text{coefficiente di contrazione}$$

- Metodo delle tangenti:

$$\varphi_T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'_T(\xi) = \frac{f(\xi)f''(\xi)}{(f'(\xi))^2} = 0$$

$$\varphi''_T(\xi) = \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \begin{cases} \neq 0 & \text{se } f''(\xi) \neq 0 \Rightarrow p = 2 \\ = 0 & \text{se } f''(\xi) = 0 \Rightarrow p > 2 \end{cases}$$

Se $p = 2$ la convergenza è **quadratica**

Criteri di arresto

Se k è il **coefficiente di contrazione** allora

$$(1) \quad |e_n| = |\xi - x_n| = |\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| \leq k |\xi - x_{n-1}|$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} |\xi - x_{n-1}| &= |\xi - x_n + x_n - x_{n-1}| \leq \\ &\leq |\xi - x_n| + |x_n - x_{n-1}| = \\ &= |\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| + |x_n - x_{n-1}| \leq \\ &\leq k |\xi - x_{n-1}| + |x_n - x_{n-1}| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\xi - x_{n-1}| \leq \frac{1}{1-k} |x_n - x_{n-1}|$$

Sostituendo questa espressione in (1) si ha

$$\boxed{|e_n| \leq \frac{k}{1-k} |x_n - x_{n-1}|} \quad \text{Stima a posteriori}$$

Poichè

$$|e_n| \leq k|e_{n-1}| \leq k^2|e_{n-2}| \leq \dots \leq k^{n-1}|e_1| \leq k^{n-1} \frac{k}{1-k} |x_1 - x_0|$$

si ha

$ e_n \leq \frac{k^n}{1-k} x_1 - x_0 \leq \frac{k^n}{1-k} (b-a)$	Stima a priori
---	-----------------------

da cui è possibile dare una stima del numero di iterazioni N che garantisce $|e_n| < \varepsilon$, con ε fissata, come segue

$$N > \frac{\log \left(\frac{\varepsilon(1-k)}{b-a} \right)}{\log k}$$

Esercizio

Stabilire se le funzioni

$$\varphi_1(x) = x^3 + 6x^2 + x - 8, \quad \varphi_2(x) = \sqrt{\frac{8}{x+6}}, \quad \varphi_3(x) = \sqrt{\frac{8-x^3}{6}}$$

generano un procedimento iterativo convergente alla radice dell'equazione non lineare $x^3 + 6x^2 - 8 = 0$ contenuta nell'intervallo $I = [1, 2]$.

Per ognuna di esse caratterizzare la convergenza (ordine, monotonia, scelta dell'approssimazione iniziale).

Soluzione Osserviamo che $\varphi_1(x) = x \iff x^3 + 6x^2 - 8 = 0$. La stessa condizione è soddisfatta dalle funzioni φ_2 e φ_3 .

Inoltre, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ sono funzioni continue e derivabili in I .

φ_1 non genera un procedimento iterativo convergente nell'intervallo dato in quanto

$$\varphi_1'(x) = 3x^2 + 12x + 1 > 1 \quad \forall x \in I$$

$$\varphi_2'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{(x+6)\sqrt{x+6}} < 0 \quad \forall x \in I$$

ne segue che φ_2 è monotona decrescente in I e quindi

$$\forall x \in I, \quad \varphi_2(1) \geq \varphi_2(x) \geq \varphi_2(2)$$

Poichè $\varphi_2(1) = \sqrt{8/7} > 1$ and $\varphi_2(2) = 1$, si ha $\varphi_2(I) \subset I$.

Inoltre, si verifica facilmente che $|\varphi_2'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$.

Possiamo, dunque, concludere che φ_2 genera un procedimento iterativo convergente allo zero di $x^3 + 6x^2 - 8$ nell'intervallo $I = [1, 2]$ per ogni scelta dell'approssimazione iniziale $x_0 \in I$.

Inoltre, poichè $\varphi_2' \neq 0 \quad \forall x \in I$, l'ordine di convergenza è lineare ($p = 1$) e la convergenza non è monotona in quanto $\varphi_2' < 0 \quad \forall x \in I$. Infine il fattore di convergenza è $k_2 = \max_{x \in I} |\varphi_2'(x)| = |\varphi_2'(1)| = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{7}}$.

Cosa si può dire di φ_3 ?

Mostrare che φ_3 non genera un procedimento convergente in I ma lo genera in $I_1 = [1, 1.15]$ e la convergenza è lineare e non monotona. Scegliendo $x_0 = 1.15$, stabilire quale tra i procedimenti generati da φ_2 e φ_3 in I_1 converge più velocemente.

Suggerimento:

- Calcolo della derivata manualmente (o usando `diff`)
- Grafico della φ'_3 mediante `fplot` in $[1, 2]$
- Grafico contemporaneo di φ'_2 e φ'_3

Esercizio 1.25

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, *Esercizi di Calcolo Numerico*, II ed.

Dimostrare che il seguente procedimento iterativo

$$x_{n+1} = x_n + e^{1-x_n} - 1$$

converge qualunque sia il punto iniziale $x_0 > 1$ e calcolarne il limite;

- stabilire se la successione è monotona per ogni $x_0 > 1$;
- studiare il comportamento di $\{x_{n+1}\}$ se $x_0 = 1/2$;
- stabilire l'ordine di convergenza del procedimento iterativo.

Soluzione La funzione di iterazione è $\varphi(x) = x + e^{1-x} - 1$.

φ è una funzione continua in \mathbf{R} e derivabile, inoltre si osserva che

$$\varphi(x) = x \Leftrightarrow e^{1-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Quindi $x = 1$ è il punto unito di φ . Inoltre,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

mentre

$$\varphi'(x) = 1 - e^{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{1-x} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1,$$

con $\varphi'(x)$ funzione continua in \mathbf{R} .

$\varphi(x)$ è quindi una funzione monotona decrescente per $x < 1$ e monotona crescente per $x > 1$.

Poiché φ' cambia segno in $x = 1$, $\varphi(x)$ ha un estremo relativo in corrispondenza di questo punto.

$$\varphi''(x) = e^{1-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

quindi $x = 1$ è un **punto di minimo relativo** per $\varphi(x)$.

Poichè $\varphi''(x)$ ha segno costante nel dominio di esistenza di φ ,

ne deduciamo che $x = 1$ è l'**unica radice** dell'equazione non lineare considerata.

Poichè φ cambia segno proprio in corrispondenza della radice $x = 1$, l'eventuale **convergenza monotona** del metodo potrà essere garantita solo in intervalli $I \subset [1, +\infty)$ mentre il metodo può convergere, eventualmente non in modo monotono, in intervalli $I \subset [1 - \delta, +\infty)$, con $\delta \in \mathbf{R}^+$.

Per stabilire tali convergenze è necessario determinare l'intervallo I tale che $\varphi(I) \subseteq I$ e $|\varphi'(x)| \leq k, \quad k \in (0, 1) \quad \forall x \in I.$

Si osserva che

$$|\varphi'(x)| = |1 - e^{1-x}| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x & \text{se } x > 1 \\ x > 1 - \log(2) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Ne segue che $0 \leq \delta \leq \log(2)$.

Inoltre, poichè $\varphi(x)$ è una funzione monotona crescente per $x > 1$, scelto un punto $\bar{x} > 1$, risulta

$$\varphi(\bar{x}) \leq \bar{x} \Leftrightarrow e^{1-\bar{x}} \leq 1 \Leftrightarrow \bar{x} \geq 1.$$

Quindi, $\forall I = [1, \bar{x}]$ accade che

$$\varphi(I) \subseteq I \quad \text{e} \quad |\varphi'(x)| < 1$$

da cui deduciamo che il metodo converge in modo monotono $\forall x_0 > 1$.

Poiché $x = 1$ è l'unico punto unito di φ , si può scegliere un intorno del punto $x = 1$ in cui il metodo converge per ogni scelta del punto iniziale x_0 .

In questo caso, la condizione $\varphi(I) \subseteq I$ implica

$$e^{1-(1-\delta)} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^\delta \geq 1 \Leftrightarrow \delta \geq 0,$$

che, confrontata con la condizione sulla derivata, da

$$0 \leq \delta \leq \log(2).$$

Da quanto detto sopra, poichè

$$1 - \log(2) < \frac{1}{2} < 1,$$

scegliendo $x_0 = 1/2$ il metodo converge in intervalli $I = [1 - \delta, \bar{x}]$, con $\delta < 0.5$ e $\bar{x} \geq 1$ (in particolare, $\bar{x} \geq \varphi(1 - \delta)$).

Poichè risulta

$$\varphi(1) = 1 \quad \varphi'(1) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi''(1) \neq 0,$$

l'ordine di convergenza del metodo è $p = 2$.

OSS: Verificare che il procedimento iterativo corrisponde al metodo di Newton applicato alla funzione $f(x) = e^{x-1} - 1$

Esempio

$$I = [1 - \log(2), \varphi(1 - \log(2))] \quad x_0 = 1/2 \quad \epsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$$

Metodo del punto unito

k	x_k	ϵ_k
2	1.148721270700128	0.648721270700128
3	1.010530563626045	0.138190707074083
4	1.000055252269219	0.010475311356827
5	1.000000001526379	0.000055250742840
6	1.000000000000000	0.000000001526379

Metodo di Newton

k	x_k	ϵ_k
1	1.148721270700128	0.648721270700128
2	1.010530563626045	0.138190707074083
3	1.000055252269219	0.010475311356827
4	1.000000001526379	0.000055250742840
5	1.000000000000000	0.000000001526379

Esercizio 1.8

Separare le soluzioni dell'equazione

$$f(x) = (x^2 - 2)\cos(x) + 2x\sin(x) = 0$$

e stabilire se la funzione

$$\varphi(x) = \arctan\left(\frac{2 - x^2}{2x}\right)$$

genera un procedimento iterativo convergente, con appropriata scelta di x_0 , alla radice $\xi \in (0, \pi/2)$.

Si procede per separazione grafica individuando i punti di intersezione delle seguenti funzioni

$$h(x) = \tan(x), \quad g(x) = \frac{2 - x^2}{2x}.$$

In particolare, è possibile osservare che la funzione $g(x)$ è antisimmetrica rispetto all'asse delle ordinate, che rappresenta anche il suo asintoto verticale ($\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$).

$g(x)$ è monotona decrescente $\forall x > 0$ e, nel semiasse positivo, risulta $g(x) \geq 0$ per $x \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$.

Pertanto, considerata la periodicità della funzione $h(x)$, le radici dell'equazione data appartengono ai seguenti intervalli:

$$I_0 = (0, \pi/2) \text{ e } I_k = \left(\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, (k)\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Per le radici negative, basta considerare gli intervalli simmetrici corrispondenti.

Si osserva che $\varphi(x) = x$ è equivalente a $f(x) = x$ e che $\varphi(x)$ è continua e derivabile in I_0 . Inoltre, poichè $\varphi'(x) = -2\frac{x^2+2}{x^4+4}$, risulta

$$|\varphi'(x)| < 1 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2} \quad \text{oppure} \quad x > \sqrt{2}$$

mentre la radice $\xi \in (0, \pi/2)$ è $\xi \approx 0.756 \in [0, \sqrt{2}]$.

Pertanto, φ non genera un procedimento iterativo convergente.

Nota: Verificare che il [Metodo di Newton](#) genera un procedimento iterativo convergente alla radice $\xi \in (0, \pi/2)$.

Esercizio 7.11

Data l'equazione

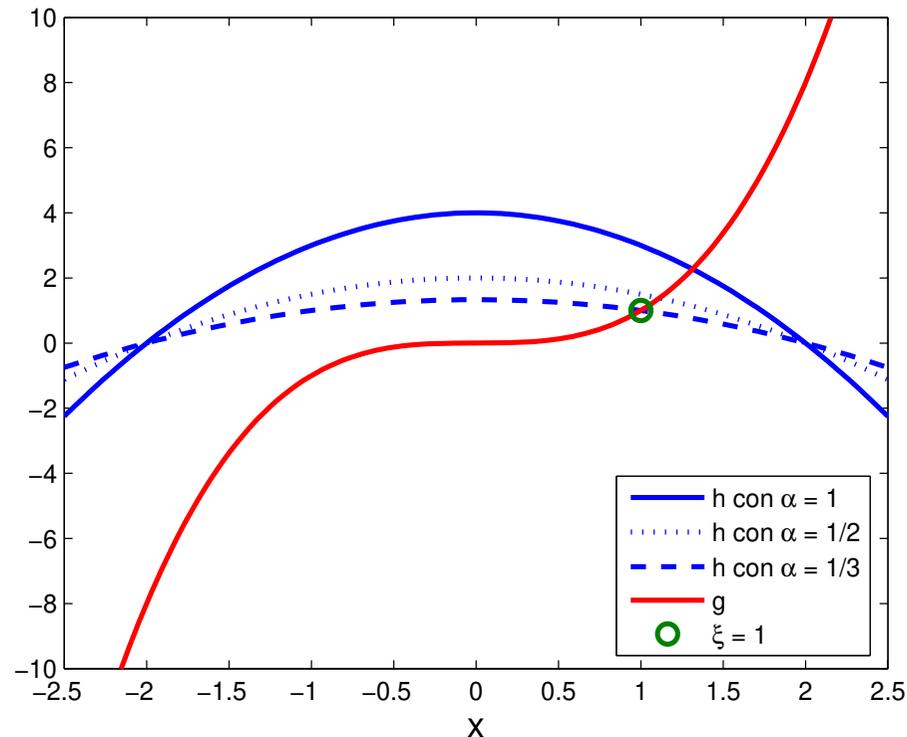
$$\alpha(4 - x^2) = x^3, \quad \alpha > 0$$

1. separare graficamente le soluzioni positive ed individuare per quali valori di α l'equazione ammette una radice $\xi > 1$;
2. posto $\alpha = 1$, introdurre un'opportuna funzione di iterazione $x = \phi(x)$, $x \in [1, 1.5]$ adatta ad approssimare la radice $\xi > 1$;
3. in base al comportamento di ϕ caratterizzare la successione delle approssimazioni $x_n = \phi(x_{n-1})$ (ordine di convergenza, monotonia, etc.).
4. stimare il numero di iterazioni necessarie affinché il procedimento iterativo produca un'approssimazione della soluzione con 5 decimali esatti e confrontarlo con il numero di iterazioni realmente necessarie.

Soluzione: Si considerano le funzioni $h(x) = \alpha(4 - x^2)$ e $g(x) = x^3$.

$h(x)$, al variare del parametro α , è una parabola con concavità rivolta verso il basso e vertice $V = (0, 4\alpha)$. Quindi, V si avvicina a 0 man mano che il valore del parametro α decresce.

Inoltre, come mostrato nel grafico, la **radice positiva esiste ed è unica**



Poichè $h(1) = 3\alpha$ mentre $g(1) = 1$, risulta $\xi = 1$ se $\alpha = 1/3$. Ne deduciamo che la radice positiva è **maggiore di 1** se $\alpha > \frac{1}{3}$

Se $\alpha = 1$, l'equazione diventa $4 - x^2 = x^3$.

Nell'intervallo $I = [1, 1.5]$,

$$x = \phi(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$$

genera un **procedimento iterativo convergente**.

Infatti, ϕ è una funzione continua, derivabile e positiva in I .

Inoltre

$$\phi'(x) = -\frac{2}{3} \frac{x}{\sqrt[3]{(4 - x^2)^2}} < 0 \quad \forall x \in I.$$

Quindi ϕ è decrescente, da cui

$$\phi(1) \geq \phi(1.5).$$

Poichè $\phi(1) = \sqrt[3]{3} \approx 1.44$ e $\phi(1.5) \approx 1.20$, risulta

$$\phi(I) \subset I.$$

Inoltre, si osserva che $|\phi'(x)| = \frac{2}{3} \frac{|x|}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}$.

La funzione a secondo membro è una funzione monotona crescente in I in quanto è il prodotto di funzioni monotone crescenti e positive in I e quindi

$$|\phi'(x)| \leq |\phi'(1.5)| = k \approx 0.69 < 1.$$

Poichè $\phi'(x) < 0 \quad \forall x \in I$, il metodo converge, producendo approssimazioni della radice ξ alternativamente per eccesso e per difetto.

Poichè $\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, risulta $\phi'(\xi) \neq 0$

e quindi l'ordine di convergenza del metodo iterativo è $\mathbf{p = 1}$.

Per stimare il **numero di iterazioni** necessarie si usa la seguente disuguaglianza

$$|e_n| = |x_n - \xi| \leq \frac{k^n}{1 - k}(b - a)$$

che nel caso considerato diventa

$$|e_n| = |x_n - \xi| \leq \frac{0.69^n}{1 - 0.69}(1.5 - 1)$$

Richiedendo **5 decimali esatti** all'approssimazione prodotta, risulta

$$|e_n| < \epsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$$

cioè

$$\frac{0.69^n}{0.31}(0.5) < 0.5 \cdot 10^{-5}$$

da cui

$$n > \frac{\log(2 \cdot (0.31) \cdot 0.5 \cdot 10^{-5})}{\log(0.69)} \approx 34.18,$$

ovvero, eseguendo **$N = 35$** iterazioni, l'approssimazione prodotta ha sicuramente i decimali esatti richiesti.

Considerando le iterate si ha

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$
2	1.407779816636963	0.307779816636963
3	1.263722089604660	0.144057727032303
4	1.339424732696048	0.075702643091388
5	1.301761199775750	0.037663532920298
6	1.321041758493116	0.019280558717367
7	1.311311289649813	0.009730468843303
8	1.316257901162381	0.004946611512568
9	1.313752451659470	0.002505449502911
10	1.315023829271998	0.001271377612529
11	1.314379285273200	0.000644543998798
12	1.314706203444088	0.000326918170888
13	1.314540428132803	0.000165775311285
14	1.314624500689312	0.000084072556509
15	1.314581866160240	0.000042634529072
16	1.314603487493636	0.000021621333396
17	1.314592522800411	0.000010964693225
18	1.314598083302941	0.000005560502530
19	1.314595263428300	0.000002819874641

Oss: La stima del numero di iterazioni è per eccesso; infatti, dopo 19 iterazioni si raggiunge la tolleranza richiesta.

Infine, si osserva che le funzioni

$$\phi_1(x) = \sqrt{4 - x^3},$$

$$\phi_2(x) = \frac{4}{x^2} - 1$$

$$\phi_3(x) = x^3 + x^2 + x - 4$$

non sono adatte ad approssimare la radice positiva della funzione considerata in quanto per esse non sono verificate le condizioni $\phi(I) \subseteq I$ e $|\phi'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$.

Esercizio

Si considerino le seguenti funzioni

$$\phi_1(x) = x^2 - 2; \quad \phi_2(x) = \sqrt{2+x}; \quad \phi_3(x) = -\sqrt{2+x}; \quad \phi_4(x) = 1 + \frac{2}{x}, \quad x \neq 0.$$

- 1.1)** Specificare quante e quali di esse sono adatte ad approssimare almeno uno zero della funzione $f(x) = x^2 - x - 2$ con il metodo delle approssimazioni successive;
- 1.2)** per ognuna delle funzioni individuate al punto precedente, caratterizzare la successione delle approssimazioni successive (scelta dell'approssimazione iniziale, coefficiente di contrazione, monotonia ordine di convergenza);
- 1.3)** proporre, se possibile, una funzione diversa dalle precedenti che sia adatta ad approssimare almeno lo zero positivo di f con il metodo delle approssimazioni successive.

Soluzione:

La ricerca del punto unito delle 4 funzioni è equivalente a risolvere l'equazione non lineare $x^2 - x - 2 = 0$, la quale ha due radici $\xi_1 = -1$ e $\xi_2 = 2$.

La funzione ϕ_1 non può generare procedimenti iterativi convergenti ad uno degli zeri della funzione in quanto risulta $\phi_1'(x) = 2x$ e quindi

$$|2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/2,$$

intervallo di valori che non contiene le due radici.

La funzione ϕ_2 , essendo positiva, può convergere solo alla radice positiva $\xi_2 = 2$. Si osserva che

$$\phi_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

è sicuramente minore di 1 per $x \in I = [1, 3]$. In questo intervallo, inoltre, $\phi_2'(x)$ è monotona decrescente, e poichè $\phi_2(1) = \sqrt{3} \in I$ e $\phi_2(3) = \sqrt{5} \in I$, possiamo concludere che ϕ_2 genera un procedimento iterativo convergente a ξ_2 .

Inoltre, poichè $\phi'_2 > 0$, la convergenza è monotona e l'ordine di convergenza è 1 mentre la costante di contrazione vale $k = \max_{x \in I} (|\phi'_2(x)|) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Stesse argomentazioni valgono per la funzione ϕ_3 che genera un procedimento iterativo convergente a $\xi_1 = -1$, per esempio nell'intervallo $I = [-1.5, 0]$.

La funzione ϕ_4 ha come derivata prima la funzione $\phi'_4(x) = -2/x^2$. Ne segue che

$$\frac{2}{x^2} < 1 \Leftrightarrow 2 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2} \wedge x > \sqrt{2},$$

e dunque il procedimento iterativo non può convergere alla radice negativa. Inoltre, poichè $\phi'_4 < 0$, ϕ_4 è monotona decrescente e quindi, scelto $I = [1.5, 3]$, risulta $\phi_4(1.5) = 7/3 \in I$ e $\phi_4(3) = 5/3 \in I$.

Concludiamo, dunque, che la ϕ_4 genera un procedimento iterativo convergente a ξ_2 in I , la convergenza non è monotona in quanto $\phi_4'(x) < 0$, l'ordine di convergenza è **1** mentre la costante di contrazione è $k = \max_{x \in I} |\phi_4'(x)| = |\phi_4'(1.5)| = 8/9$.

Infine, poichè $f(x), f'(x), f''(x)$ sono funzioni continue in \mathbf{R} , $f'(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$ e $f''(x) = 2 > 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}$, è possibile individuare due intervalli, che non contengono il punto $x = 1/2$, in cui il metodo di Newton genera un procedimento iterativo convergente alle due radici dell'equazione non lineare. L'approssimazione iniziale è l'estremo di Fourier dell'intervallo considerato, la convergenza è monotona e l'ordine di convergenza è $p = 2$.

Esercizio

Si consideri la seguente equazione non lineare dipendente dal parametro reale β :

$$\beta x = e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

1. Stabilire per quali valori di β l'equazione non lineare ammette un'unica radice reale.
2. Scelto $\beta = 1$ e detta α la radice, determinare se esistono valori del parametro reale ω , con $\omega > 0$, per cui il procedimento iterativo

$$x_{n+1} = \frac{\omega e^{-x_n} + x_n}{1 + \omega}$$

converge ad α per ogni scelta dell'approssimazione iniziale.

3. Tra i valori di ω determinati al punto precedente, individuare quello per cui la convergenza è massima.

Soluzione Si osserva che la radice corrisponde all'intersezione di una retta passante per l'origine e la funzione esponenziale (funzione positiva e decrescente) e quindi se $\beta = 0$, l'intersezione sicuramente non esiste in quanto la funzione esponenziale non assume mai valore zero.

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\beta x - e^{-x}) = \pm\infty \quad (+\infty \text{ se } \beta > 0, -\infty \text{ se } \beta < 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\beta x - e^{-x}) = -\infty$$

Ne segue che per $\beta > 0$ esiste sicuramente una radice ed è anche unica, mentre non è così per i valori di β negativi. Infatti, $\frac{\partial}{\partial x}(\beta x - e^{-x}) = \beta + e^{-x} = 0 \iff x = -\log(-\beta)$, che esiste per $\beta < 0$, mentre per $\beta > 0$ risulta $\frac{\partial}{\partial x}(\beta x - e^{-x}) > 0 \quad \forall x$

Prima di tutto si osserva che, quando $\beta = 1$,

$$\frac{\omega e^{-x} + x}{1 + \omega} = x \iff e^{-x} = x.$$

Ne segue che la successione $x_{n+1} = \frac{\omega e^{-x_n} + x_n}{1 + \omega}$, se converge, sicuramente converge ad α .

Inoltre, definita $f(x) = x - e^{-x}$, risulta

$$f(0) = -1 < 0 \text{ mentre } f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0,$$

e quindi l'intervallo $I = [0, 1]$ contiene l'unico zero di f .

La funzione

$$\varphi(x) = \frac{\omega e^{-x} + x}{1 + \omega}$$

è una media pesata, con pesi positivi $w_1 = \frac{\omega}{1 + \omega} < 1$ e $w_2 = \frac{1}{1 + \omega}$

e tali che $w_1 + w_2 = 1$, di funzioni che assumono valori nell'intervallo $[0, 1]$, e quindi $\varphi(I) \subseteq I$

Inoltre, poichè

$$\varphi''(x) = \frac{\omega e^{-x}}{1 + \omega} > 0 \quad \forall x,$$

$\varphi'(x) = \frac{1}{1+\omega}(-\omega e^{-x} + 1)$ è monotona crescente e si verifica facilmente che

$$-1 < \frac{1}{1 + \omega}(-\omega e^{-x} + 1) < 1$$

è vera in I per tutti i valori di $\omega > 0$

Si conclude che la successione $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ genera un procedimento iterativo convergente ad α in $I = [0, 1]$.

Infine, si osserva che $\varphi'(\alpha) = 0 \iff \omega = \frac{1}{\alpha}$, mentre $\varphi''(\alpha) = \frac{1}{1+\omega} \neq 0$

Ne segue che esiste un solo valore di ω ($\omega = \frac{1}{\alpha}$) per cui la convergenza del procedimento iterativo è quadratica. In tutti gli altri casi la convergenza è lineare.

Cenni sulla soluzione di

Sistemi non lineari

Sistemi di equazioni non lineari

Un **sistema di equazioni non lineari**, $F(X) = 0$, può essere scritto nella forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

con $F(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)]^T$ e $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.

La **soluzione** del sistema è il vettore $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$ le cui componenti **annullano simultaneamente** le n equazioni del sistema.

Supporremo che le funzioni $f_i : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, i = 1, \dots, n$, siano almeno **continue** in D

Metodo del punto unito in \mathbb{R}^n

Si scrive il sistema

$$F(X) = 0$$

nella forma equivalente

$$X = \Phi(X)$$

con $\Phi = [\varphi_1(X), \varphi_2(X), \dots, \varphi_n(X)]^T$

Se $\Xi \in \mathbb{R}^n$ è **radice** di F allora è **punto unito** di Φ :

$$F(\Xi) = 0 \Leftrightarrow \Xi = \Phi(\Xi)$$

Metodo del punto unito in \mathbb{R}^n

$$X = \Phi(X) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

e quindi

$$\Xi = \Phi(\Xi) \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ \xi_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \xi_n = \varphi_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \end{cases}$$

Metodo del punto unito

Il **punto unito** $\Xi = \Phi(\Xi)$, $\bar{X} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$, può essere **approssimato** generando la successione

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{(0)} \text{ dato} \\ X^{(k)} = \Phi(X^{(k-1)}) \\ k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T \text{ dato} \\ x_1^{(k)} = \varphi_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \varphi_2(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = \varphi_n(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \end{array} \right.$$

Le funzioni φ_i sono chiamate **funzioni di iterazione**.

Convergenza

Per poter definire la **convergenza** di un metodo iterativo dobbiamo prima di tutto definire l'**errore di troncamento**

Errore di troncamento: $E^{(k)} = \bar{X} - X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$

\swarrow \searrow

soluzione esatta **soluzione approssimata**

Per "*misurare*" la lunghezza di un vettore $V \in \mathbb{R}^n$ si ricorre alla **norma di vettore**:

$$\|V\| = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

Convergenza: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \bar{X}$

Se il metodo iterativo è **convergente**, in assenza di errori di arrotondamento si ottiene la **soluzione esatta** dopo un **numero infinito** di passi.

Nota. In pratica ci si arresta quando $\|E^{(k)}\| \leq \epsilon$ (**criterio di arresto**)

Norma di vettore

La **norma** di un vettore $V = [v_1, \dots, v_n]^T$ viene utilizzata per "*misurare*" la sua **lunghezza**.

$$\text{Intorno: } \|V - W\| \leq r$$

- **Norma due o euclidea:** $\|V\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$

- **Norma uno:** $\|V\|_1 := \sum_{i=1}^n |v_i|$

- **Norma infinito:** $\|V\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$

Nota. Tutte le norme sono **equivalenti**: $m\|V\|_p \leq \|V\|_q \leq M\|V\|_p$

Proprietà della norma di vettore

- $\|V\| \geq 0, \quad \|V\| = 0 \iff V = 0$
- $\|\alpha V\| = |\alpha| \cdot \|V\| \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall V \in \mathbf{R}^n$
- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\| \quad \forall V, W \in \mathbf{R}^n \quad (\text{disuguaglianza triangolare})$

Distanza: in uno **spazio vettoriale normato** S è possibile introdurre la **distanza** tra due punti V e W in S

$$d(V, W) := \|V - W\|$$

Proprietà della distanza:

- $d(V, W) = 0 \iff V = W$
- $d(V, W) = d(W, V) \quad \forall V, W \in S$
- $d(V, W) \leq d(V, Z) + d(Z, W) \quad \forall V, W, Z \in S$

Norme di matrici

La **norma** di una matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ soddisfa le seguenti

Proprietà

- $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \iff A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall A \in \mathbf{R}^{n \times n}$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ (*disuguaglianza triangolare*)
- $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, $\forall A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ (*sub-moltiplicatività*)

Definizione. Una matrice si dice **convergente** se $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$

Norme indotte dalla norma di vettore

Ogni **norma di vettore** può essere utilizzata per definire una **norma di matrice** che permette di "*misurare*" come la matrice agisce sui vettori:

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\| \quad A \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad X \in \mathbf{R}^n$$

Le norme indotte soddisfano tutte le **proprietà delle norme** e, inoltre, soddisfano la **relazione di compatibilità** :

$$\|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\|$$

Infatti, se $X \neq 0$, si ha

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\| = \max_{\|X\| \neq 0} \left\| \frac{AX}{\|X\|} \right\| = \max_{\|X\| \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \implies \|A\| \geq \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

Nota. Per tutte le norme indotte si ha $\|I\| = 1$ (I : matrice identità)

Norme indotte: esempi

- **Norma uno:** $\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (per colonne)

- **Norma infinito:** $\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (per righe)

- **Norma due o spettrale:** $\|A\|_2 := \sqrt{\rho(A^T A)}$

dove $\rho(M) := \max_i |\lambda_i|$ (λ_i : autovalori di M) è il **raggio spettrale** della matrice $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$.

Se A è **simmetrica** $\implies \rho(A^T A) = \rho^2(A) \implies \|A\|_2 = \rho(A)$

Autovalori

Norma uno

Convergenza: condizione necessaria

Tramite la **norma di vettore** si può "misurare" la **lunghezza** del vettore errore di troncamento, cioè la **distanza** tra la soluzione esatta e quella approssimata.

Convergenza: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \bar{X}$

Teorema. Sia S uno **spazio vettoriale normato** e sia $\Phi : S \rightarrow S$. Se la successione $\{X^{(k)}\} = \{\Phi(X^{(k-1)})\}$ è **convergente** a un valore $\bar{X} \in S$ e l'applicazione Φ è **continua** in $\bar{X} \Rightarrow \bar{X}$ è **punto unito** di Φ , cioè $\bar{X} = \Phi(\bar{X})$.

Dim.

$$\bar{X} = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(X^{(k-1)}) = \Phi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k-1)}\right) = \Phi(\bar{X})$$

Convergenza: condizione sufficiente

Definizione. Un'applicazione $\Phi : S \rightarrow S$, dove S è uno **spazio normato** è detta **contrazione**, se esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che

$$\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq \lambda \|X - Y\| < \|X - Y\| \quad \forall X, Y \in S$$

Teorema. Sia $D \subset \mathbb{R}^n$. Se $\Phi : D \rightarrow D$ è una **contrazione**

\Rightarrow • esiste un **unico punto unito** $\bar{X} \in D$ di Φ

- la successione $\{X^{(k)}\} = \{\Phi(X^{(k-1)})\}$ è **convergente** a \bar{X} per ogni **approssimazione iniziale** $X^{(0)} \in D$

Contrazione: condizione sufficiente

Matrice Jacobiana di Φ

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Teorema. Se *i)* le **funzioni di iterazione** $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono **continue** e **parzialmente derivabili** in D ;

ii) esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che $\|J(X)\| \leq \lambda$ per $X \in D$

$\Rightarrow \Phi$ è una **contrazione** in D

Esempio

La condizione $\|J(X)\| \leq \lambda$, $X \in D$, è **sicuramente verificata** se

$$\left| \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_k} \right| \leq M_{ik} \quad i, k = 1, \dots, n \quad X \in D$$

con

$$\|M\| \leq \lambda < 1 \quad \text{dove } M = [M_{ik}]_{i,k=1}^n$$

Esempio: $n = 2$

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi(x, y) \\ y = \psi(x, y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |\varphi_x(X)| \leq M_{11} & |\varphi_y(X)| \leq M_{12} \\ |\psi_x(X)| \leq M_{21} & |\psi_y(X)| \leq M_{22} \end{cases}$$

$$M_{11} + M_{12} \leq \lambda < 1 \quad e \quad M_{21} + M_{22} \leq \lambda < 1$$

$$\|M\| \leq \lambda < 1 \Leftrightarrow \text{oppure } M_{11} + M_{21} \leq \lambda < 1 \quad e \quad M_{12} + M_{22} \leq \lambda < 1$$

$$\text{oppure } \sqrt{M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{21}^2 + M_{22}^2} \leq \lambda < 1$$

Metodo di Newton per sistemi

Sistema non lineare:

$$F(X) = 0 \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

Il **metodo di Newton** per la soluzione di sistemi non lineari si basa sulla **linearizzazione** della $F(X) = [f_1(X), \dots, f_n(X)]^T$

Se le funzioni $f_i(X)$ hanno **derivate parziali limitate**, allora si può sviluppare in **serie di Taylor** la funzione vettoriale $F(X)$ scegliendo come punto iniziale $X^{(k)}$

$$F(X) = F(X^{(k)}) + J_F(X^{(k)}) (X - X^{(k)}) + \dots$$

dove $[J_F(X)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ è lo **giacobiano** della $F(X)$

$$\Rightarrow F(X^{(k+1)}) \approx F(X^{(k)}) + J_F(X^{(k)}) (X^{(k+1)} - X^{(k)}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X^{(0)} & \text{dato} \\ X^{(k+1)} = X^{(k)} - [J_F(X^{(k)})]^{-1} F(X^{(k)}) & k \geq 0 \end{cases}$$

Convergenza del metodo di Newton

Il **metodo di Newton** è un **metodo iterativo** la cui **funzione di iterazione** è $\Phi(X) = X - [J_F(X)]^{-1} F(X)$

Teorema. Sia \bar{X} una soluzione del sistema non lineare
$$F(X) = 0$$

con $F \in C^2(I)$ ($I \in \mathbf{R}^n$ intorno di \bar{X}).

Sia $\det J_F(X) \neq 0$ per $X \in I$.

\Rightarrow **i)** $\exists A \subseteq I$ tale che, $\forall X^{(0)} \in A$, la successione $\{X^{(k+1)}\} = \{\Phi(X^{(k)})\}$ **converge** a \bar{X} ;

ii) la convergenza è **quadratica**: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|E^{(k+1)}\|}{\|E^{(k)}\|^2} > 0$.

Osservazioni sul metodo di Newton per sistemi

- La **convergenza** del metodo è legata all'**accuratezza** dell'**approssimazione iniziale**.
- Ad ogni passo bisogna verificare che $\det J_F(X^{(k)}) \neq 0$. Nella pratica, si può avere **instabilità** numerica se $\det J_F(X^{(k)})$ è "**piccolo**" → conviene utilizzare una **precisione elevata**.

- Poiché il **costo computazionale** del calcolo dell'inversa $[J_F(X^{(k)})]^{-1}$ può essere **elevato**, si preferisce risolvere ad ogni passo il sistema lineare

$$J_F(X^{(k)})Y = -F(X^{(k)}) \Rightarrow X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y$$

- **Criterio di arresto**: il procedimento iterativo viene arrestato quando $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| \leq \epsilon$.
- A volte si preferisce ricalcolare $J_F(X^{(k)})$ non ad ogni iterazione ma **dopo 3-4 iterazioni** (metodi di tipo quasi-Newton).

Metodo di Newton per sistemi: $n = 2$

$$\text{Per } n = 2 \text{ si ha: } \begin{cases} f(X) = f(x, y) = 0 \\ g(X) = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Formula di Taylor di punto iniziale $X^{(k)} = [x_k, y_k]^T$:



$$\begin{cases} f(X) = f(X^{(k)}) + f_x(X^{(k)})(x - x_k) + f_y(X^{(k)})(y - y_k) + R_1 = 0 \\ g(X) = g(X^{(k)}) + g_x(X^{(k)})(x - x_k) + g_y(X^{(k)})(y - y_k) + R_2 = 0 \end{cases}$$

dove $R_1 = R_1(X, X^{(k)})$, $R_2 = R_2(X, X^{(k)})$ rappresentano il **resto**.

La **soluzione approssimata** del sistema non lineare è la soluzione del **sistema lineare** che si ottiene trascurando il resto nello sviluppo precedente.

$$\begin{cases} f_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + f_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -f(X^{(k)}) \\ g_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + g_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -g(X^{(k)}) \end{cases}$$

Metodo di Newton per sistemi: $n = 2$

$$\begin{cases} f_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + f_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -f(X^{(k)}) \\ g_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + g_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -g(X^{(k)}) \end{cases}$$

$$\Downarrow \\ J_F^{(k)}(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = -F(X^{(k)})$$

$$\text{dove } J_F^{(k)} := J_F(X^{(k)}) = \begin{bmatrix} f_x(X^{(k)}) & f_y(X^{(k)}) \\ g_x(X^{(k)}) & g_y(X^{(k)}) \end{bmatrix}$$

Il **sistema lineare** ammette soluzione se

$$|J_F^{(k)}| = \det J_F^{(k)} \neq 0$$

La soluzione è

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{1}{|J_F^{(k)}|} [f(X^{(k)})g_y(X^{(k)}) - g(X^{(k)})f_y(X^{(k)})] \\ y_{k+1} = y_k - \frac{1}{|J_F^{(k)}|} [g(X^{(k)})f_x(X^{(k)}) - f(X^{(k)})g_x(X^{(k)})] \end{cases}$$

Esempio

Determinare i punti di intersezione tra il cerchio $x^2 + y^2 = 3$ e l'iperbole $xy = 1$ con 3 decimali esatti.

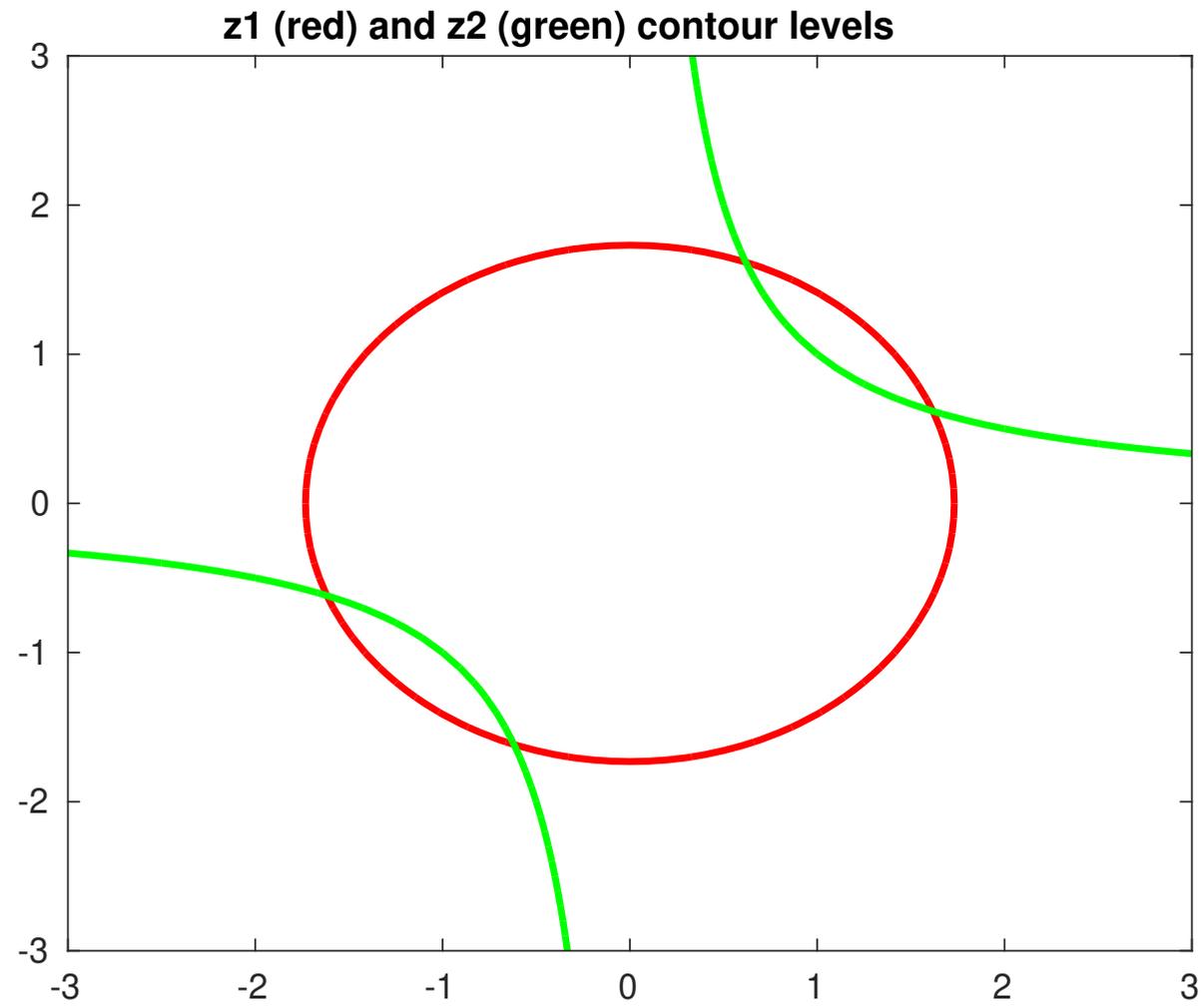
Soluzione

Si devono trovare i punti che annullano simultaneamente le funzioni $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3$ e $g(x, y) = xy - 1$.

Si tratta quindi di risolvere il **sistema non lineare**

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ g(x, y) = xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Separazione grafica:



Le due funzioni hanno 4 punti di intersezione: 2 nel primo quadrante e 2 nel terzo.

Ne segue che, detti $\xi_1 = (x_1, y_1)$ e $\xi_2 = (x_2, y_2)$ i punti di intersezione nel primo quadrante, i rimanenti due sono:

$$\xi_3 = (-x_1, -y_1) \quad \text{e} \quad \xi_4 = (-x_2, -y_2).$$

Inoltre, se il punto di coordinate (x_1, y_1) è uno zero sia di f che di g , lo è anche il punto di coordinate (y_1, x_1) . Ne segue che

$$\xi_2 = (x_2, y_2) = (y_1, x_1).$$

Il punto $\xi_1 = (x_1, y_1)$ è contenuto in $I_1 = [0, 1[\times [1, \sqrt{3}]$.

Si verifica facilmente che $F(x, y) = [f(x, y), g(x, y)]^T \in C^2(I_1)$.

Inoltre

$$J_F(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

e quindi

$$|J_F(x, y)| = 2x^2 - 2y^2 = 0 \iff x^2 = y^2$$

$$\Rightarrow |J_F(x, y)| \neq 0 \text{ in } I_1.$$

Sono verificate le ipotesi di applicabilità del **metodo di Newton**

Scegliendo il punto $X^{(0)} = (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ come approssimazione iniziale della soluzione si ha

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \frac{1}{|J_F(x_0, y_0)|} [f(x_0, y_0) g_y(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) f_y(x_0, y_0)] \\ y_1 = y_0 - \frac{1}{|J_F(x_0, y_0)|} [g(x_0, y_0) f_x(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) g_x(x_0, y_0)] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4} - 3 \right) \frac{1}{2} - \left(\frac{13}{22} - 1 \right) 2 \frac{3}{2} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \\ y_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{3}{4} - 1 \right) + \frac{1}{2} \frac{3}{2} \right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8} \end{cases}$$

$$\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{\infty} = \max \left\{ \left| \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \right|, \left| \frac{13}{8} - \frac{3}{2} \right| \right\} = 0.125 > 0.5 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - 0.00694 = 0.61806 \\ y_2 = y_1 - 0.00694 = 1.61806 \end{cases}$$

$$\|X^{(2)} - X^{(1)}\|_{\infty} = \max \{|0.61806 - 0.625|, |1.61806 - 1.625|\} = 0.00694 > 0.5 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 - 0.00003 = 0.61803 \\ y_3 = y_2 - 0.00003 = 1.61803 \end{cases}$$

$$\|X^{(3)} - X^{(2)}\|_{\infty} = \max \{|0.61803 - 0.61806|, |1.61803 - 1.61806|\} = 0.00003 < 0.5 \cdot 10^{-3}$$

Esercizio

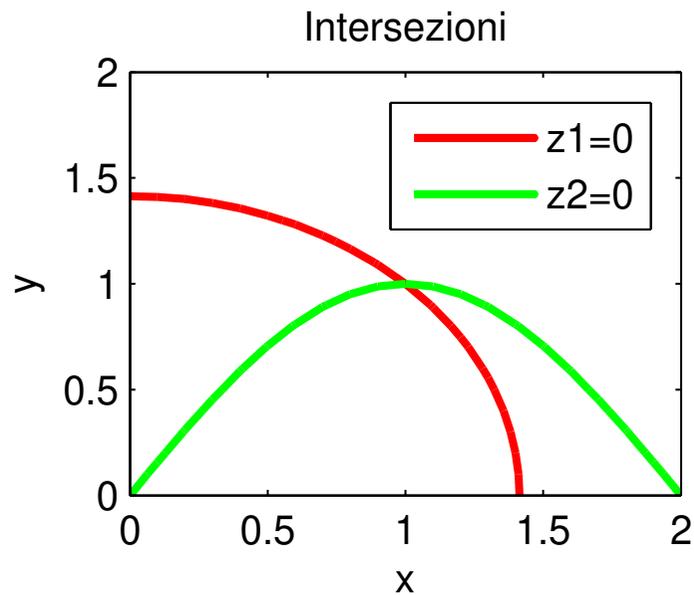
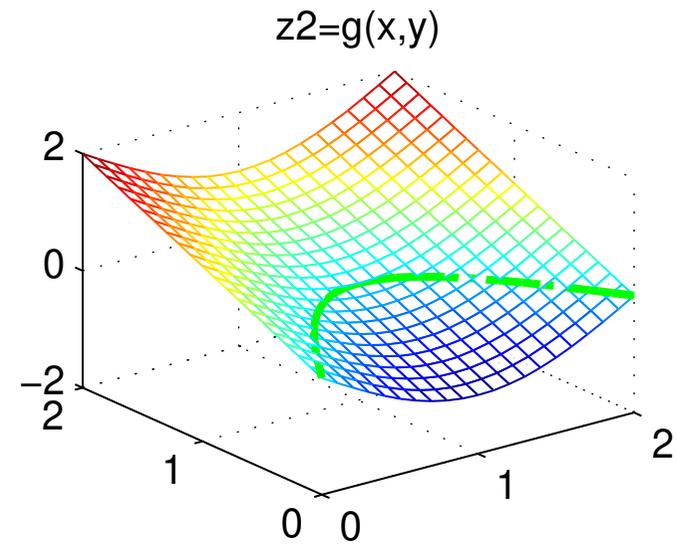
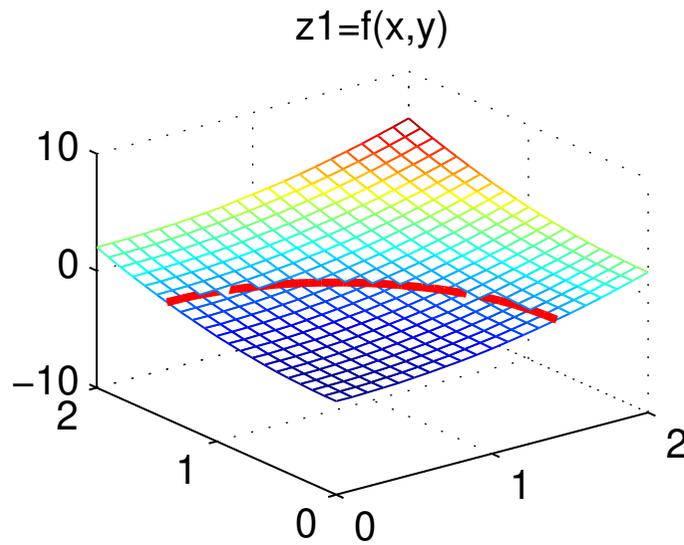
Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0, \end{cases}$$

stabilire se il metodo di Newton è adatto ad approssimare la soluzione $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$.

Soluzione

E' necessario determinare un opportuno intervallo I in cui la soluzione $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ del sistema sia unica. Disegnando il grafico delle due funzioni, limitandoci al primo quadrante, possiamo concludere che $I = [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}]$ è un buon intervallo di separazione



Inoltre, le funzioni $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ e $g(x,y) = y - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ sono

$C^2(I)$, mentre la matrice Jacobiana

$$J_F(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & 1 \end{bmatrix}$$

è tale che

$$|J_F(x, y)| = 2x + \pi y \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \neq 0$$

in un intorno opportuno del punto $(1, 1)$ contenuto in I ; infatti,

$$|J_F(1, 1)| = 2 + 0 > 0.$$

Possiamo concludere che sono verificate le ipotesi di applicabilità del **metodo di Newton**.

Esercizio

Mostrare che risolvere il sistema precedente è equivalente a risolvere la seguente equazione non lineare:

$$x^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 2.$$

Nota: Si può risolvere usando il metodo di Newton-Raphson ! ! !

F I N E

Autovalori

Sia \mathbf{A} una matrice quadrata di ordine n . Se esiste un numero (reale o complesso) λ e un vettore \mathbf{x} tali che

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x},$$

allora λ si dice *autovalore* di \mathbf{A} e \mathbf{x} è il corrispondente *autovettore*.

La relazione precedente può scriversi in forma equivalente come segue

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

e, poichè $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, il determinante della matrice del sistema deve essere nullo, cioè

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

E' possibile dimostrare che l'identità precedente è equivalente a

$$\lambda^n - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(\mathbf{A}) = 0.$$

Il polinomio al primo membro si dice *polinomio caratteristico* e le sue radici sono gli autovalori di A . Inoltre

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A).$$

Teorema. Per una norma verificante la **relazione di compatibilità** si ha $\rho(A) \leq \|A\|$.

Infatti da $\lambda X = AX \implies \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\| \implies |\lambda| \leq \|A\|$.

Norme indotte: norma 1

• **Norma uno:** $\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (per colonne)

dim: $\|A\|_1 = \max_{\|X\|_1=1} \|AX\|_1$. Inoltre, $\|X\|_1 = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| = 1$.

La i -esima componente del vettore AX è $(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \underbrace{\sum_{j=1}^n |x_j|}_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \end{aligned}$$

Per dimostrare l'uguaglianza, indichiamo con h l'indice di colonna che realizza il massimo e con E_h il vettore della base canonica corrispondente, quindi $\|E_h\|_1 = 1$.

Considerando che il vettore $AE_h = (0, 0, \dots, 0, a_{ih}, 0, \dots, 0)^T$, si ha

$$\|AE_h\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ih}| = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$$