1.5 Testi degli Esercizi. Dinamica del corpo rigido.

Esercizio 4.6.1

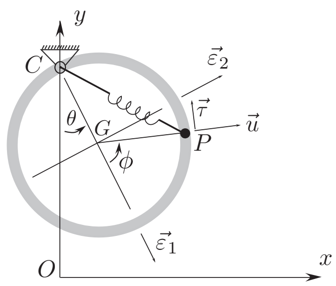
Un corpo rigido $\mathfrak{C}$ omogeneo pesante di massa $\mathfrak{M}$ a forma di anello circolare di raggio R è vincolato a ruotare liberamente attorno ad un asse orizzontale passante per un suo punto C e fisso rispetto a terra.

Si scelga un sistema di riferimento (fisso rispetto a terra) con l'asse z parallelo all'asse di rotazione, l'asse y verticale passante per C e diretto verso l'alto e l'origine O tale che sia $\overrightarrow{OC} = h\,R\,\vec{e}_2$, con $h \in \mathbb{R}^+$ (si veda la figura).

Un elemento pesante E di massa m è vincolato a scorrere lungo l'anello; su E agisce, oltre al peso e alla reazione vincolare, una forza elastica di centro C e costante elastica k.

Tutti i vincoli sono realizzati senza attrito.

Siano: G il centro dell'anello, $\vec{\varepsilon}_1 := \text{vers}\overrightarrow{CG}$, P il punto occupato dall'elemento, $\vec{u} :=$ vers $\overrightarrow{GP}$. Chiamate θ l'anomalia che $\vec{\varepsilon}_1$ forma rispetto a $-\vec{e}_2$, e ϕ l'anomalia che $\vec{u}$ forma rispetto a $\vec{\varepsilon}_1$, entrambe contate positivamente nel verso antiorario rispetto a $\vec{e}_3$, le si scelgano come coordinate lagrangiane del sistema.



Scrivere le espressioni delle energie cinetica e potenziale del sistema.

□

Esercizio 4.6.2

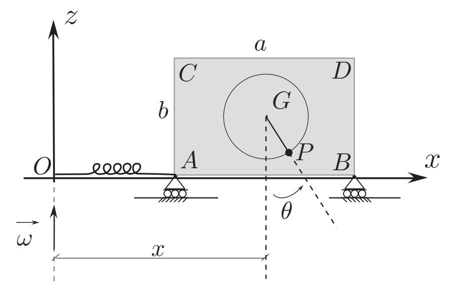
Uno spazio di riferimento $RC = (O, x, y, z)$, con versori degli assi $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ si muove, rispetto allo spazio terrestre supposto inerziale, di moto *rotatorio uniforme* intorno all'asse z, fisso rispetto a terra, verticale, e orientato verso l'alto. Sia ψ l'anomalia che l'asse x forma rispetto a un asse orizzontale X fisso rispetto a terra; in tal modo la velocità angolare (di trascinamento) è esprimibile con $\vec{\omega}^\tau = \dot{\psi}\vec{e}_3$, con $\dot{\psi}$ costante.

Nello spazio RC si consideri un sistema materiale costituito da: un elemento E e da una lamina rettangolare rigida $\mathfrak{C} = ABCD$. La lamina è omogenea, pesante, di lati a, b e massa $\mathfrak{M}$, ed è vincolata a muoversi con il suo lato AB scorrevole lungo l'asse x, e i lati AC e BD paralleli all'asse z. L'elemento E, pesante, di massa m, è vincolato a muoversi sul piano della lamina (x, y) in modo tale che, detta P la sua posizione (relativa a RC) e G quella del baricentro della lamina, risulti identicamente $\ell = GP = cost$.

Tutti i vincoli sono realizzati senza attrito.

Sul sistema oltre ai pesi e alle sollecitazioni vincolari, agisce una forza elastica, di costante elastica k, applicata in A e avente centro nell'origine O del sistema di coordinate.

Si chiami θ l'anomalia che il vettore $\vec{\varepsilon} =$ vers $\overrightarrow{GP}$ forma con il versore $-\vec{e}_3$ contata positivamente nel verso antiorario rispetto a $-\vec{e}_2$, e la si scelga come coordinata lagrangiana insieme alla ascissa x del baricentro della lamina (si veda la figura).



Scrivere le espressioni delle energie cinetica e potenziale del sistema. □

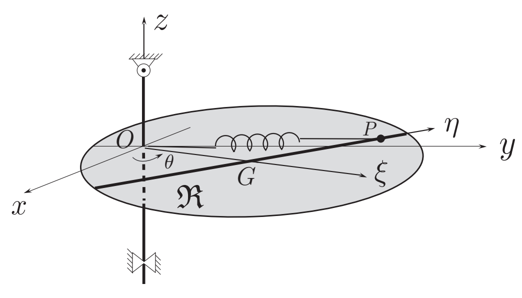
Esercizio 4.6.3

Un sistema olonomo è costituito da una lamina circolare rigida $\mathfrak{R}$ omogenea pesante di raggio R e massa $\mathfrak{M}$ e da un elemento pesante E di massa m. La lamina è vincolata a ruotare attorno a un asse z ad essa ortogonale, verticale diretto verso l'alto e fisso rispetto a terra, e l'elemento è vincolato alla lamina $\mathfrak{R}$ mediante una guida rettilinea fissa sulla lamina e passante per il suo baricentro G.

Siano O il punto nel quale l'asse z interseca la lamina, e sia (O, x, y, z) una terna fissa rispetto a terra con base di versori $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$; sia (G, ξ, η, ζ) una terna solidale a $\mathfrak{R}$ con base di versori $\mathcal{E} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ avente $\vec{\varepsilon}_3$ coincidente con $\vec{e}_3$, il piano (ξ, η) coincidente con quello della lamina, l'asse η coincidente con l'asse della guida, e l'asse ξ tale che il punto G sia a distanza δ da O nel verso positivo delle ξ.

Si chiamino P il punto occupato dall'elemento E, $J_{\mathfrak{R}}$ il momento d'inerzia di $\mathfrak{R}$ rispetto all'asse z, e siano η la coordinata del punto P lungo l'asse η e θ l'anomalia che $\vec{\varepsilon}_1$ forma rispetto a $\vec{e}_1$ contata positivamente nel verso antiorario rispetto a z.

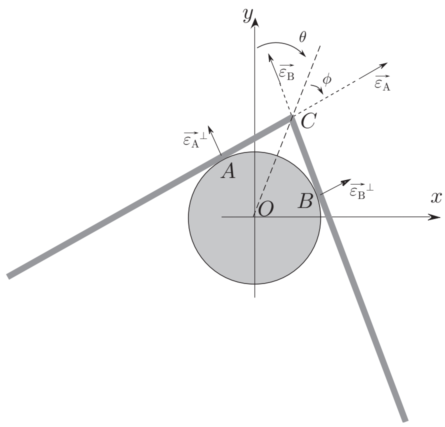
I vincoli sono realizzati senza attrito, e la sollecitazione attiva è costituita, oltre ai pesi, da una forza elastica di costante elastica: k, agente sull'elemento e avente centro nel punto O.



Scrivere le espressioni delle energie cinetica e potenziale del sistema. □

Esercizio 4.6.4

Un compasso costituito da due sbarrette uguali rettilinee rigide omogenee pesanti, ciascuna di massa $\mathcal{M}$ e lunghezza 2ℓ è posto a cavallo di un disco circolare rigido di raggio R contenuto in un piano verticale e fisso rispetto a terra. Nei punti di contatto, che si suppone *bilaterale*, non vi è attrito, così come si suppone liscia la cerniera che ne collega le estremità nel punto C (si veda la figura).



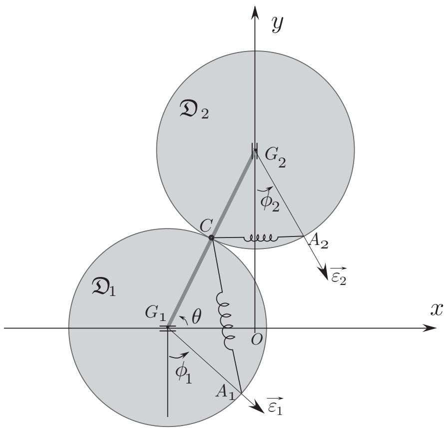
Scrivere le espressioni delle energie cinetica e potenziale del sistema. □

Esercizio 4.6.5

Due dischi uguali $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ circolari rigidi omogenei pesanti, di massa $\mathfrak{M}$ e raggio R sono vincolati a muoversi su un piano verticale π fisso rispetto a terra. Si chiami (O, x, y, z) un riferimento cartesiano destro tale che $\pi = (O, x, y)$ con l'asse y verticale e diretto verso l'alto. Il centro G_1 del disco $\mathfrak{D}_1$ è vincolato a scorrere lungo l'asse orizzontale x, e il centro G_2 del disco $\mathfrak{D}_2$ a scorrere lungo l'asse y. I centri dei due dischi sono collegati fra loro da una sbarretta rigida di lunghezza $2R$ e massa trascurabile, e nel contatto fra i due dischi non vi è strisciamento. Tutti i vincoli sono realizzati senza attrito. Fissati due assi diametrali, ξ_1 e ξ_2 solidali rispettivamente a $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$, si chiamino (si veda la figura):

C il punto medio della sbarretta G_1G_2,
A_1 il punto intersezione di ξ_1 con il bordo del disco $\mathfrak{D}_1$,
A_2 il punto intersezione di ξ_2 con il bordo del disco $\mathfrak{D}_2$,
ϕ_1 l'anomalia che l'asse ξ_1 forma con la direzione del versore $-\vec{e}_2$,
ϕ_2 l'anomalia che l'asse ξ_2 forma con la direzione del versore $-\vec{e}_2$,
(entrambi contati positivamente nel verso antiorario rispetto al versore $\vec{e}_3$),
θ l'anomalia che il vettore $\overrightarrow{G_1G_2}$ forma con il versore $\vec{e}_1$
(anch'essa contata positivamente nel verso antiorario rispetto a $\vec{e}_3$);

si scelgano come coordinate lagrangiane del sistema le due coordinate θ, ϕ_2, e si inizializzi il sistema in modo che quando $\theta = 0$ si abbiano $\phi_1 = \pi/2$ e $\phi_2 = -\pi/2$, e dunque $C \equiv A_1 \equiv A_2$.



Sul sistema, oltre ai pesi, agiscono una sollecitazione elastica scambiata fra i punti C ed A_1, ed una sollecitazione elastica scambiata fra i punti C ed A_2, entrambe di costante elastica k.

Scrivere le espressioni delle energie cinetica e potenziale del sistema.

□