Metodi Numerici con elementi di Programmazione

(A.A. 2013-2014)

Metodi Numerici

Appunti delle lezioni: Equazioni non lineari

Introduzione e Metodo di Bisezione

Docente Vittoria Bruni

Email: vittoria.bruni@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 16

Tel. 06 49766648

Ricevimento: Giovedì 14.00-15.00

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sul sito

http://ingaero.uniroma1.it/

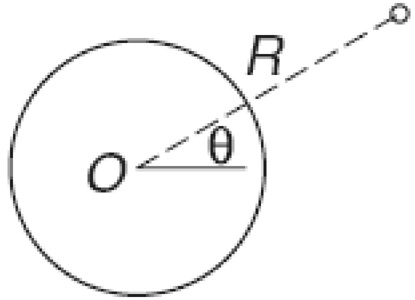
nella pagina dedicata al corso Metodi Numerici con elementi di Programmazione

Equazioni non lineari

Problema 1

La traiettoria di un satellite che orbita intorno alla terra è data dalla seguente equazione

$$R(\theta) = \frac{C}{1 + esin(\theta + \alpha)}$$



dove (R, θ) sono le coordinate polari del satellite, C, e ed α sono tre costanti (e è nota come eccentricità dell'orbita).

Sapendo che il satellite è stato osservato nelle seguenti tre posizioni

θ	-30^o	0^o	30^o
$R(km)$	6870	6728	6615

si vuole determinare la distanza minima del satellite dalla terra e l'angolo corrispondente.

Si verifica facilmente che il valore minimo di R è $\frac{C}{1+e}$ e si realizza in corrispondenza dell'angolo $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Per poter determinare il valore minimo di R e l'angolo θ è quindi necessario determinare il valore delle tre costanti C, e, α usando le tre posizioni del satellite note, cioè

$$\begin{cases} \frac{C}{1+esin(\alpha-30)} = 6870 \\ \frac{C}{1+esin(\alpha)} = 6728 \\ \frac{C}{1+esin(\alpha+30)} = 6615 \end{cases}$$

che risulta essere un **sistema di equazioni non lineari** nelle tre incognite C, e ed α. Infatti, risulta

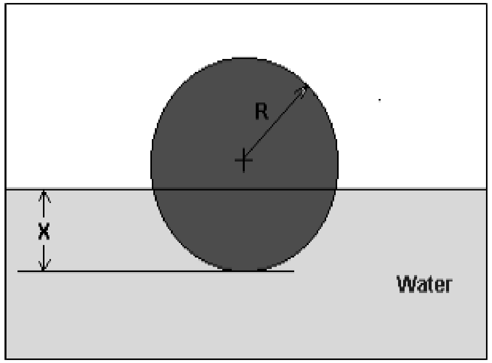
$$\frac{dR}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow -\frac{ecos(\theta+\alpha)}{(1+esin(\theta+\alpha))^2} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

per $sin(\theta+\alpha) \neq -\frac{1}{e}$. Da cui $R(\frac{\pi}{2}) = \frac{C}{1+e}$.

Problema 2

Un altro esempio:

Si vuole determinare la parte sommersa di una boa sferica di raggio $R = 0.055$m e densità $\rho_B=0.6$ Kg/m^3



Indicando con F_p la spinta idrostatica, con M_B la massa della boa sferica, g l'accelerazione di gravità e $\rho_w=1$ la densità dell'acqua, si ha

$$M_B g = F_p$$

e quindi

$$4/3\, \pi R^3 \rho_B = \pi x^2 (R - x/3)\, \rho_w g$$

da cui

$$x^3 - 3x^2 R + 4 R^3 \rho_B = 0$$

per calcolare il valore di x è necessario risolvere un'equazione non lineare

L'equazione da risolvere è la seguente

$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \cdot 10^{-4} = 0.$$

Problema 3

La **crescita di una popolazione** può essere modellata, su un periodo di tempo piccolo, assumendo che la popolazione abbia un tasso di crescita proporzionale al numero di individui presenti in ciascun istante. Se $N(t)$ indica il numero di individui al tempo t e λ è il fattore di crescita della popolazione, allora $N(t)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t),$$

la cui soluzione è $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$, dove N_0 indica la popolazione all'istante di tempo iniziale, cioè $N_0 = N(t_0)$.

Questo modello è valido solo quando la popolazione è isolata e non c'è immigrazione dall'esterno. Se si suppone che ci sia una immigrazione a un tasso costante ν, il modello differenziale diventa

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + \nu$$

la cui soluzione è $N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$.

Supponendo che la popolazione iniziale sia di un milione di individui, che la comunità cresca di 435˙000 immigrati il primo anno e che 1˙564˙000 individui siano presenti alla fine del primo anno, determinare il tasso di crescita λ della popolazione.

E' necessario risolvere l'**equazione non lineare**

$$N|_{t=1\,\text{anno}} = N_0 e^{\lambda} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

nell'incognita λ, con $N|_{t=1\,\text{anno}} = 1{\cdot}564{\cdot}000$, $N_0 = 1{\cdot}000{\cdot}000$, $\nu = 435{\cdot}000$.

$$\Rightarrow \quad f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

Sistemi di equazioni non lineari

Un sistema di equazioni non lineari può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

La **soluzione** del sistema è il vettore $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]^T$ le cui componenti **annullano simultaneamente** le n equazioni del sistema.

Supporremo che le funzioni $f_i : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, i = 1, \ldots, n,$ siano almeno **continue** in D

Oss: Nel **Problema 1**, $n = 3$ e $[x_1, x_2, x_3]^T = [C, e, \alpha]^T$.

Nei **Problemi 2,3**, $n = 1$ e si ha rispettivamente $[x_1]^T = [x]^T$ e $[x_1]^T = [\lambda]^T$.

Caso $n = 1$: equazioni non lineari

Un' **equazione non lineare** è un'equazione del tipo

$$f(x) = 0$$

Le **soluzioni** ξ dell'equazione, cioè quei valori tali che

$$f(\xi) = 0,$$

vengono chiamati **radici** dell'equazione non lineare o **zeri** della funzione f.

Ci limiteremo al caso di **radici reali**.

Separazione delle radici

Prima di utilizzare un metodo numerico bisogna sapere:

- **quante** sono le radici (reali);
- **dove** si trovano approssimativamente;
- se ci sono delle **simmetrie**.

Per rispondere a queste domande si può ricorrere alla **tabulazione** o al **grafico** della funzione f.

Problema 3: separazione grafica delle radici

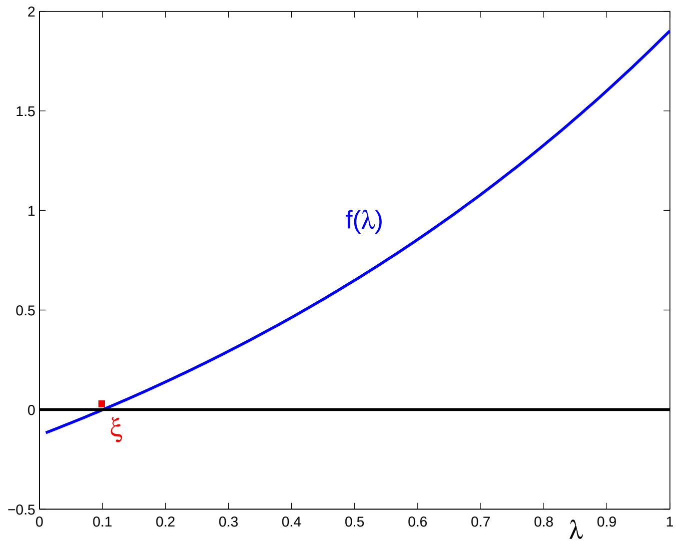
$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

Separazione grafica: si traccia il **grafico della funzione** e si individuano gli intervalli in cui la funzione **interseca l'asse delle ascisse.**

In questo caso, la funzione f risulta definita e continua in $\mathbf{R} - \{0\}$. Inoltre, da uno studio preliminare di f nel semiasse positivo, si ha

- $lim_{\lambda \to 0} f(\lambda) < 0$
- $lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = +\infty$
- $f'(\lambda) > 0$, cioè la funzione è **monotona crescente**

e quindi si può concludere che f ha un unico zero ξ nel semiasse positivo.



Osservando il grafico tracciato è possibile individuare un intorno di ξ; per esempio

Intervallo di separazione: $I = [a, b] = [0.05, 0.15]$

$\Rightarrow f(a) = -0.0667, f(b) = 0.0672 \Rightarrow f(a)f(b) < 0$

Problema 3: separazione delle radici - tabulazione

$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

Si valuta la funzione in corrispondenza di valori equidistanti della variabile λ in un certo intervallo e si osserva il segno dei valori ottenuti:

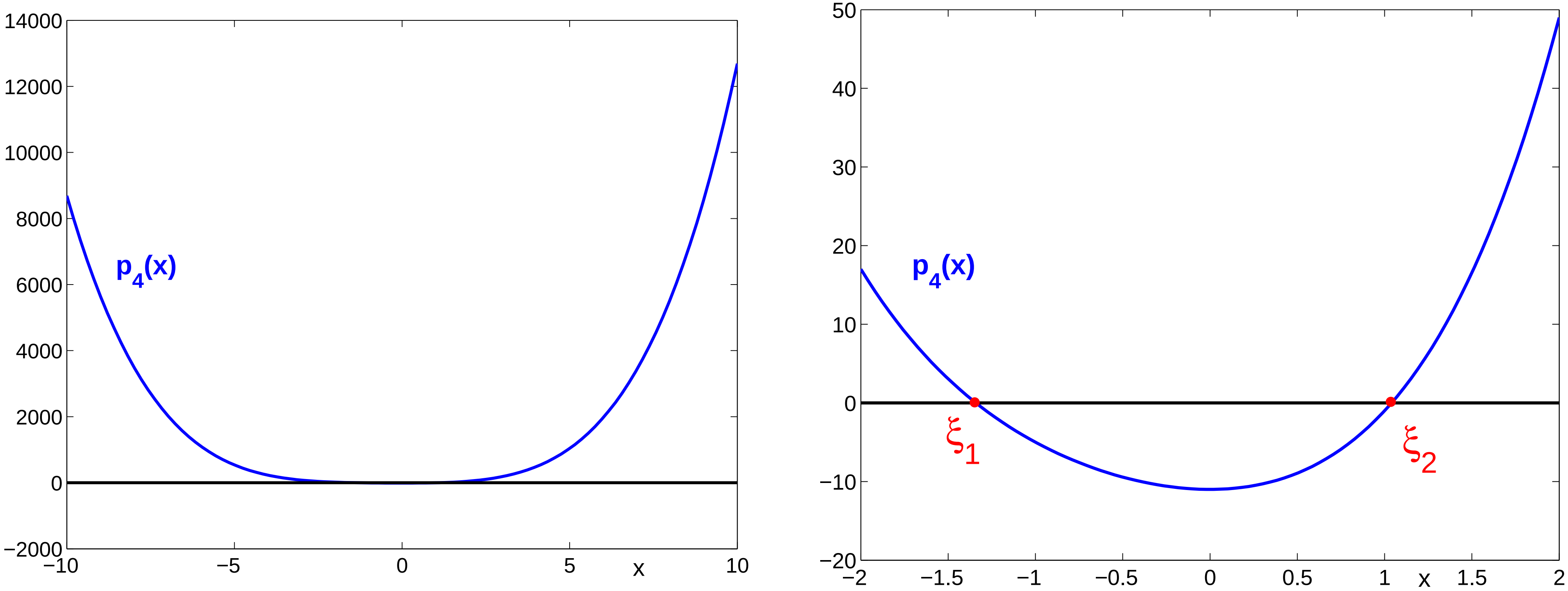
λ	$f(\lambda)$
0.10	-0.00133558829528
0.12	0.02567293855461
0.14	0.05319595959218
0.16	0.08124355150079
0.18	0.10982599066618
0.20	0.13895375715854

Intervallo di separazione: $I = [a, b] = [0.10, 0.12]$

$\Rightarrow f(a) = -0.0013, f(b) = 0.0257 \Rightarrow f(a)f(b) < 0$

Separazione delle radici: esempio 1

Equazioni polinomiali: $p_4(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 11 = 0$



Restringendo l'intervallo di osservazione si identificano meglio le due radici reali

Delle **4 radici** di $p_4(x)$ **due** sono **reali**, $\xi_1 \in [-1.5, -1]$ e $\xi_2 \in [0.75, 1.25]$, mentre **due** sono **complesse coniugate**.

Separazione delle radici: esempio 2

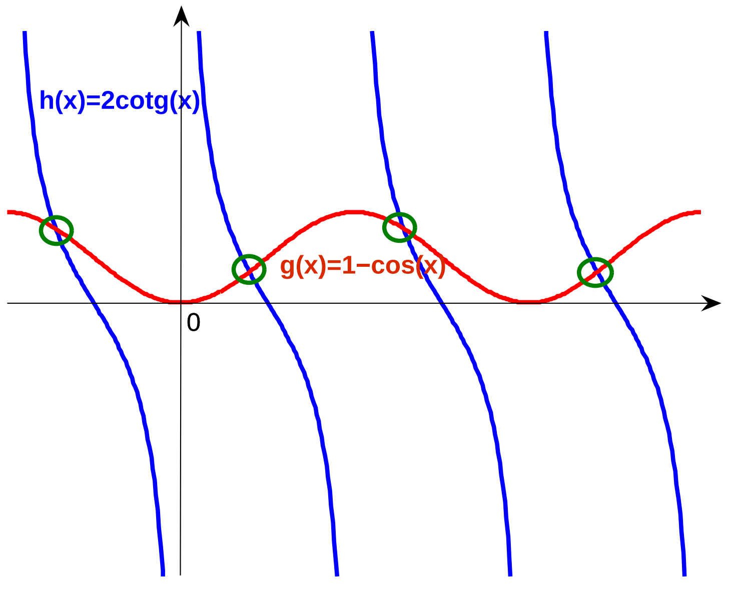
Equazione trascendente: $f(x) = tgx(1 - \cos x) - 2 = 0$

L'equazione $f(x) = 0$ si può riscrivere come $1 - cosx = 2cotgx.$

In questo modo è possibile risolvere il problema equivalente

$$h(x) = g(x)$$

corrispondente a determinare i punti di intersezione delle funzioni $h(x) = 2cotgx$ e $g(x) = 1 - cosx$



Esistono **infinite soluzioni**
$\xi_k \in (k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}), \quad k \in \mathbf{Z}$

Separazione delle radici: esempio 3

Equazione trascendente: $f(x) = \cos x \cosh x - 1 = 0$

La funzione $f(x)$ è **simmetrica** rispetto all'origine

$\Rightarrow$ se ξ è **radice** lo è anche $-\xi$

$\Rightarrow$ si considera il caso $x > 0$ ($\xi = 0$ è radice banale)

Nota $cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Metodo di bisezione (o metodo dicotomico)

Il **metodo di bisezione** è un metodo molto **semplice**:

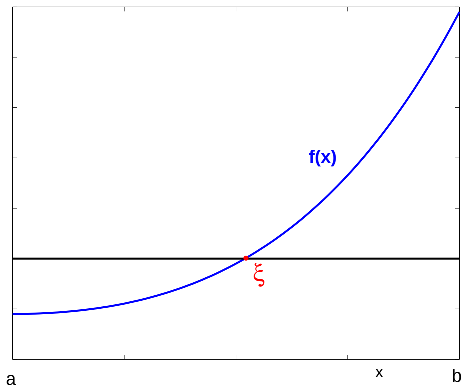
una volta individuato un intervallo di separazione in cui si trova **una sola** radice, permette di costruire una **successione** $\{x_k\}$ di **approssimazioni** di ξ.

Ipotesi di applicabilità :

- è stato **separato** un intervallo $I = [a, b]$ in cui c'è un'**unica radice** ξ;

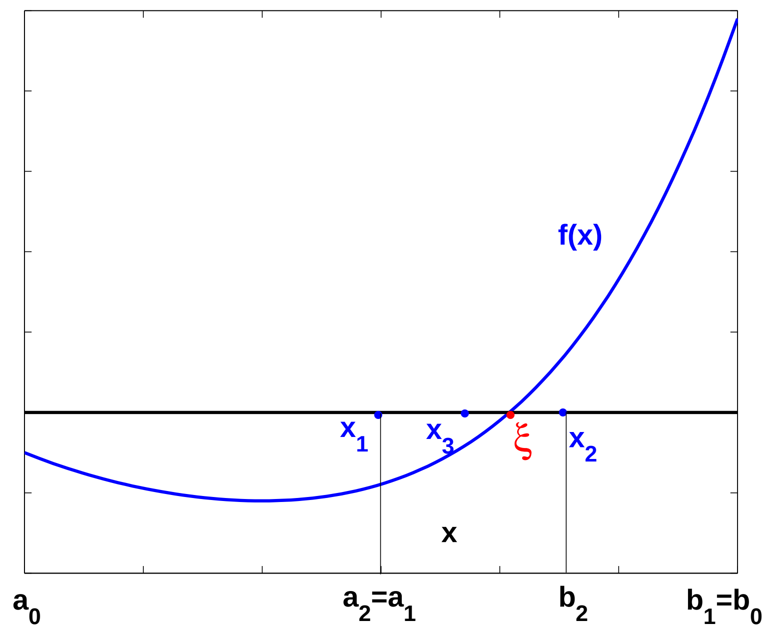
- la funzione f è **continua** in I: $f \in C^0[a, b]$;

- $f(a)f(b) < 0$.



Metodo di bisezione: algoritmo

Si genera una **successione** di approssimazioni $\{x_k\}$ con $x_k \in [a_{k-1}, b_{k-1}]$ e $\xi \in [a_{k-1}, b_{k-1}]$.



Algoritmo:

$a_0 = a, \quad b_0 = b$

`per` $k = 1, 2, 3, \ldots$

$x_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ (**punto medio** di $[a_{k-1}, b_{k-1}]$)

`se` $f(x_k) = 0$, `allora stop`

`se` $f(a_{k-1})f(x_k) < 0$, `allora` $[a_k, b_k] = [a_{k-1}, x_k]$

`se` $f(x_k)f(b_{k-1}) < 0$, `allora` $[a_k, b_k] = [x_k, b_{k-1}]$

Convergenza del metodo di bisezione

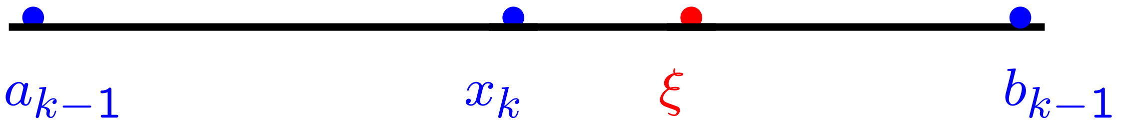
Errore di troncamento: $e_k = \xi - x_k$

è l'errore che si commette approssimando la radice ξ con il k-esimo elemento della successione costruita usando l'algoritmo descritto precedentemente.

Il procedimento iterativo converge alla radice ξ se la successione $\{x_k\}$ converge a ξ per $k \to +\infty$

Convergenza: $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} |e_k| = 0$

Per il **metodo di bisezione** si ha



Alla $k - esima$ iterazione $\xi \in [x_k, b_{k-1}]$ oppure $\xi \in [a_{k-1}, x_k]$.

Ne segue che $|e_k| < \frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}$.

Inoltre, considerando che l' ampiezza dell' intervallo $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ è pari alla metà dell'ampiezza dell'intervallo $[a_{k-2}, b_{k-2}]$ costruito all'iterazione precedente, si ha

$$|e_k| < \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = \cdots = \frac{b-a}{2^k}$$

e quindi

$$0 \leq \lim_{k \to \infty} |e_k| < \lim_{k \to \infty} \frac{b-a}{2^k} = 0$$

Ordine di convergenza

Sia $\{x_k\}$ una **successione di approssimazioni convergente** a ξ. La successione ha **ordine di convergenza** p e **fattore di convergenza** C, se esistono due reali $p \geq 1$ e $C > 0$ tali che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$$

Nota. La convergenza si dice **lineare** se $p = 1$,

quadratica se $p = 2$.

Metodo di bisezione: ordine di convergenza

Per $k \to \infty$ si ha $\quad \dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^1} \quad \simeq \quad \dfrac{\frac{b-a}{2^k}}{\frac{b-a}{2^{k-1}}} = \dfrac{2^{k-1}}{2^k} = \dfrac{1}{2}.$

$\Rightarrow$ **Ordine di convergenza**: 1 (**lineare**)

Fattore di convergenza: $\frac{1}{2}$

La convergenza è **lenta**, in quanto ad ogni passo l'**errore** viene **dimezzato**, cioè ad ogni passo si guadagna una **cifra binaria**

$\Rightarrow$ poiché $2^{-4} < 10^{-1} < 2^{-3}$, per guadagnare una **cifra decimale** servono 3-4 **iterazioni**.

Metodo di bisezione: criteri di arresto

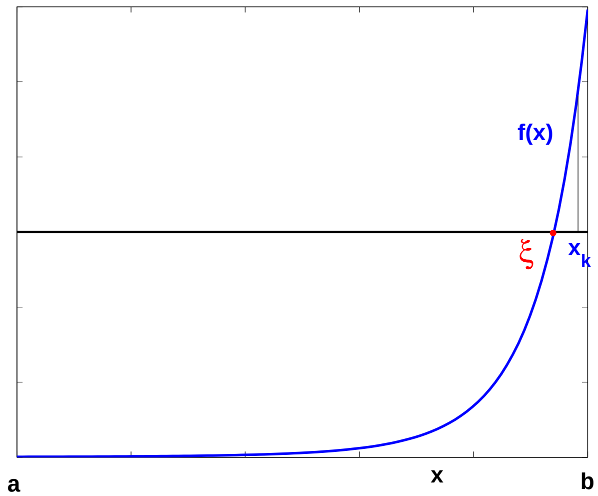
Nella pratica, a causa degli **errori di arrotondamento** e degli **errori di troncamento** non si verifica **mai** che $f(x_k) = 0$. Quando si arrestano le iterazioni?

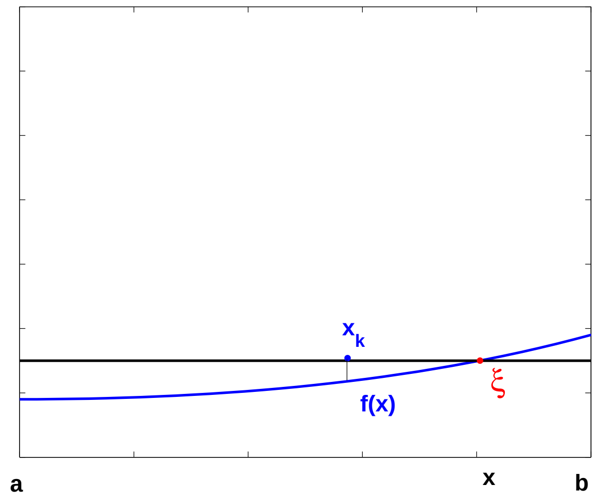
Criteri di arresto a posteriori

$$\begin{cases} |e_k| \simeq |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \\ \\ |f(x_k)| < \varepsilon \end{cases}$$

Criteri di arresto a posteriori: esempi

$|e_k| \simeq |x_k - x_{k-1}| < \epsilon$ oppure $|f(x_k)| < \epsilon$





$f(x_k)$ è "*grande*" anche se x_k è "*vicino*" a ξ

$f(x_k)$ è "*piccolo*" anche se x_k è "*lontano*" da ξ

Criterio di arresto a priori:

Usando l'espressione dell'errore di troncamento, è possibile dare una **stima a priori** del numero di iterazioni K necessario per ottenere un **errore minore** di ε. Infatti, risulta

$$|e_k| < \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \quad \Rightarrow \qquad K > \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log 2}$$

Oss.: Poichè K deve essere un numero intero positivo, può essere posto uguale all'intero più grande e più vicino alla quantità a secondo membro dell'ultima disequazione.

Soluzione Problema 3

Si vuole usare il metodo di bisezione per calcolare la radice dell'equazione

$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0 \quad \text{in} \quad I = [a, b] = [0.05, 0.15]$$

k	a_{k-1}	b_{k-1}	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$	$\lvert f(x_k)\rvert$
1	0.05000000000000	0.15000000000000	0.10000000000000	10.00000000000000	10.00000000000000
2	0.10000000000000	0.15000000000000	0.12500000000000	0.02500000000000	0.03250506973938
3	0.10000000000000	0.12500000000000	0.11250000000000	0.01250000000000	0.01548498364220
4	0.10000000000000	0.11250000000000	0.10625000000000	0.00625000000000	0.00704990930651
5	0.10000000000000	0.10625000000000	0.10312500000000	0.00312500000000	0.00285098217571
6	0.10000000000000	0.10312500000000	0.10156250000000	0.00156250000000	0.00075615469668
7	0.10000000000000	0.10156250000000	0.10078125000000	0.00078125000000	0.00029010206821
8	0.10078125000000	0.10156250000000	0.10117187500000	0.00039062500000	0.00023292996053
9	0.10078125000000	0.10117187500000	0.10097656250000	0.00019531250000	0.00002861013771
10	0.10097656250000	0.10117187500000	0.10107421875000	0.00009765625000	0.00010215388987
11	0.10097656250000	0.10107421875000	0.10102539062500	0.00004882812500	0.00003677037077

Dalla tabella è possibile osservare che se si sceglie $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$ e si usa come criterio di arresto $|f(x_k)| < \varepsilon$, il procedimento iterativo si interrompe quando $k = 9$.

Scegliendo come criterio di arresto $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, il procedimento iterativo si arresta quando $k = 11$.

E' possibile osservare che per $k = 11$ è soddisfatta anche la condizione $|f(x_k)| < \varepsilon$.

Usando, invece, il criterio di arresto a priori, si ha

$$K > log_2(0.10) - log_2(0.5 \cdot 10^{-4}) \approx 10.9658$$

cioè $K \geq 11$,

Esercizio 1

La lunghezza d'onda di uno tsunami L, per una certa profondità dell'acqua d soddisfa la seguente **equazione non lineare**

$$L = \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

con a_g e T rispettivamente l'accelerazione di gravità e il periodo. Sapendo che $T = 2880s$ e $d = 4000m$ (valore tipico dell'Oceano Indiano), produrre una stima del valore di L con precisione almeno 10^{-5}.

Esercizio 1: Separazione delle radici

Utilizziamo il **metodo grafico** per stabilire quante sono le radici reali di $f(L)$, con $f(L) = L - \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$.

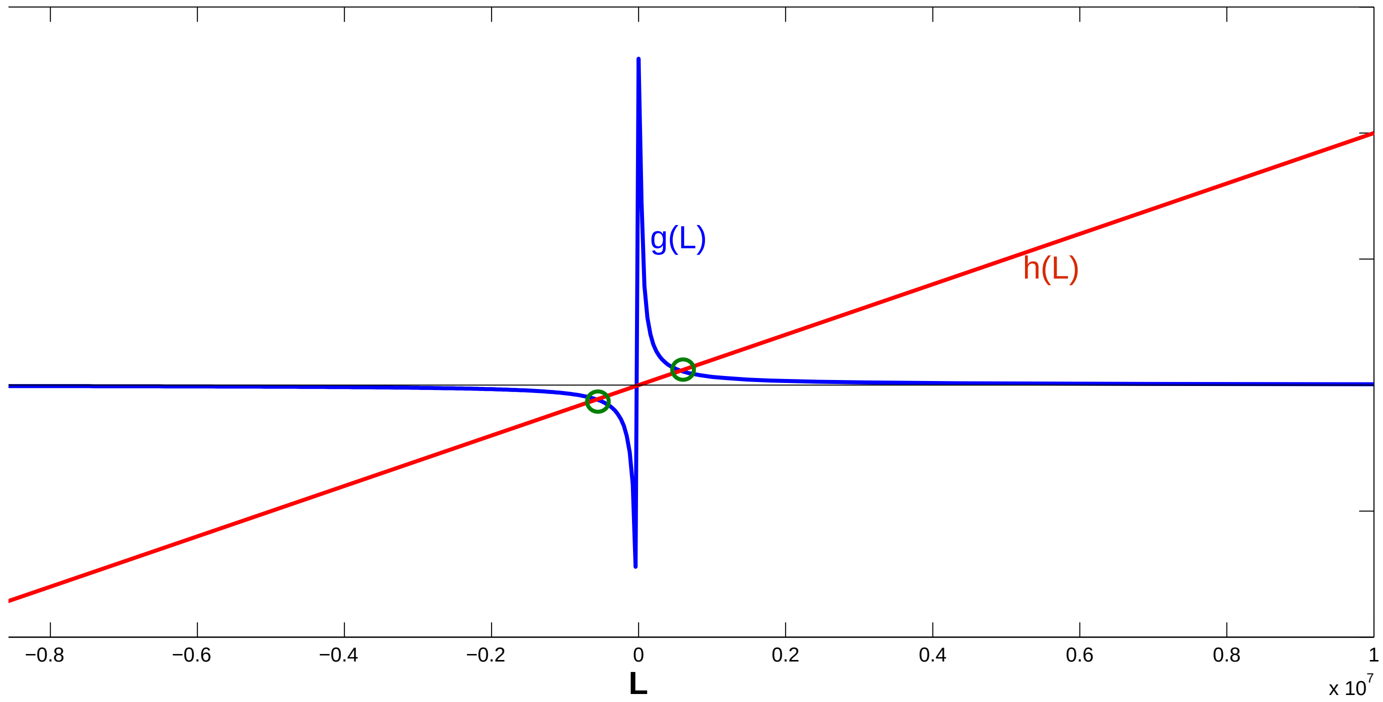
Poniamo

$$h(L) = L \qquad \text{e} \qquad g(L) = \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

e visualizziamo i punti di intersezione tra le due funzioni.

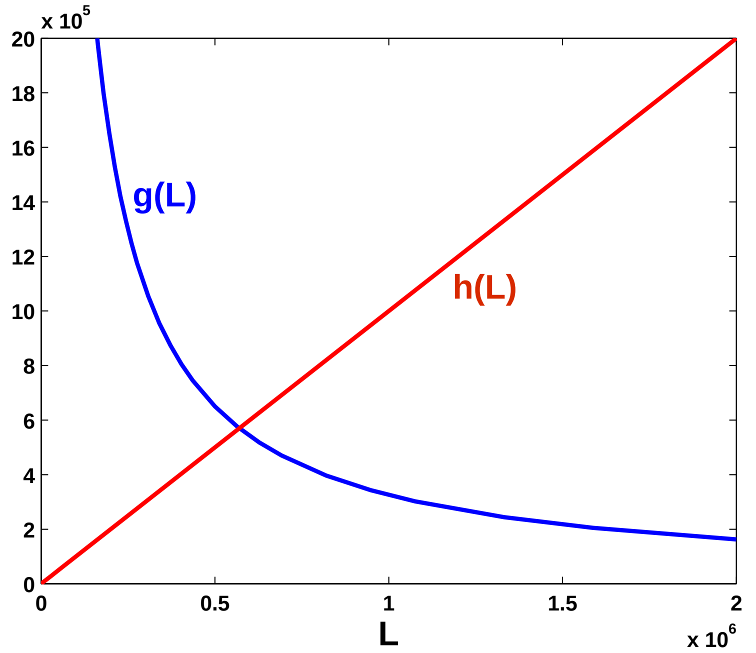
Nota $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Dal grafico si evince che le intersezioni sono due, una positiva e una negativa.



Poichè la lunghezza d'onda deve essere un numero positivo, si scarta la radice negativa.

Restringendo il grafico delle funzioni nell'intervallo $[0 \quad 2 \cdot 10^6]$, si osserva che la radice positiva è contenuta nell'intervallo $[.5 \cdot 10^6 \quad 1 \cdot 10^6]$ ($[500,\ 1000]Km$)



Visualizzando le due funzioni per $L \in [0.5 \cdot 10^6, \quad 1 \cdot 10^6]$, si può ridurre ulteriormente l'intervallo in cui cercare la radice dell'equazione non lineare considerata, per esempio $[0.5 \cdot 10^6, \quad 0.6 \cdot 10^6]$

A questo punto è possibile selezionare un metodo numerico per il calcolo della radice di $f(L) = 0$ nell'intervallo $I = [0.5 \cdot 10^6, \quad 0.6 \cdot 10^6]$

Esercizio 1: Metodo di bisezione

Si verifica facilmente che la funzione $f(L) = L - \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$ è una funzione continua in tutto il dominio di definizione ed in particolare nell'intervallo $I = [a, b] = [0.5 \cdot 10^6, \quad 0.6 \cdot 10^6]$. Inoltre risulta

$$f(0.5 \cdot 10^6) = -150396.83597 \quad \text{e} \quad f(0.6 \cdot 10^6) = 57863.27995$$

(Oss. $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$)

da cui

$$f(a)f(b) < 0.$$

Quindi, sono soddisfatte le condizioni di applicabilità del metodo di bisezione

Si calcola il punto

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0.5 \cdot 10^6 + 0.6 \cdot 10^6}{2} = 0.55 \cdot 10^6$$

si valuta la funzione f nel punto x_1, cioè $f(x_1) = -41356.18896 < 0$

quindi, si definisce il nuovo intervallo

$$I_1 = [x_1, b] = [0.55 \cdot 10^6,\ 0.6 \cdot 10^6]$$

che contiene la radice positiva di f.

L'errore è

$$e_1 = |x_1 - x_0| = |x_1 - a| = 50000.$$

Si calcola il punto $x_2 = \frac{x_1+b}{2} = \frac{0.55 \cdot 10^6 + 0.6 \cdot 10^6}{2} = 0.575 \cdot 10^6$

si valuta la funzione f nel punto x_2, cioè $f(x_2) = 9321.48847 > 0$.

Il nuovo intervallo è $I_2 = [x_1, x_2] = [0.55 \cdot 10^6,\ 0.575 \cdot 10^6]$

mentre l'errore diventa

$$e_2 = |x_2 - x_1| = 25000.$$

Procedendo in questo modo si ha

$$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0.55 \cdot 10^6 + 0.575 \cdot 10^6}{2} = 0.5625 \cdot 10^6$$

$$f(x_3) = -15732.61210 < 0,$$

$$e_3 = |x_3 - x_2| = |0.5625 \cdot 10^6 - 0.575 \cdot 10^6| = 12500$$

e $\qquad I_3 = [x_3, x_2] = [0.5625 \cdot 10^6,\ 0.575 \cdot 10^6]$

$$x_4 = \frac{x_3 + x_2}{2} = \frac{0.5625 \cdot 10^6 + 0.575 \cdot 10^6}{2} = 0.56875 \cdot 10^6$$

$$f(x_4) = -3136.71786 < 0,$$

$$e_4 = |x_4 - x_3| = |0.56875 \cdot 10^6 - 0.5625 \cdot 10^6| = 6250$$

e $$I_4 = [x_4, x_2]$$

e così via.

Si osserva che l'errore e_k si dimezza ad ogni iterazione, cioè $\frac{e_{k+1}}{e_k} = \frac{1}{2}$.

Quindi, richiedendo un errore almeno pari a

$$\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5},$$

sono necessarie K iterazioni con

$$K > \frac{log(b-a) - log(\varepsilon)}{log(2)} = \frac{log(0.1 \cdot 10^{6}) - log(0.5 \cdot 10^{-5})}{log(2)} \approx 34.2193$$

affinchè il metodo converga alla soluzione con la precisione fissata.

k	estremo inferiore	estremo superiore	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	550000.00000000000	600000.00000000000	575000.00000000000	$25 \cdot 10^3$	9321.48847
2	550000.00000000000	575000.00000000000	562500.00000000000	$12.5 \cdot 10^3$	15732.61210
3	562500.00000000000	575000.00000000000	568750.00000000000	$6.250 \cdot 10^3$	3136.71786
4	568750.00000000000	575000.00000000000	571875.00000000000	$3.125 \cdot 10^3$	3109.31488
5	568750.00000000000	571875.00000000000	570312.50000000000	$1.5625 \cdot 10^3$	9.43440
6	570312.50000000000	571875.00000000000	571093.75000000000	$7.8125 \cdot 10^2$	1551.00265
7	570312.50000000000	571093.75000000000	570703.12500000000	$3.9062 \cdot 10^2$	771.05027
8	570312.50000000000	570703.12500000000	570507.81250000000	$19.5312 \cdot 10^1$	380.87454
9	570312.50000000000	570507.81250000000	570410.15625000000	97.6562	185.73673
10	570312.50000000000	570410.15625000000	570361.32812500000	48.8281	88.15533
11	570312.50000000000	570361.32812500000	570336.91406250000	24.4141	39.36151
12	570312.50000000000	570336.91406250000	570324.70703125000	12.2070	14.96382
13	570312.50000000000	570324.70703125000	570318.60351562500	6.1035	2.76477
14	570312.50000000000	570318.60351562500	570315.55175781250	3.0518	3.33480
15	570315.55175781250	570318.60351562500	570317.07763671875	1.5259	0.28501
16	570317.07763671875	570318.60351562500	570317.84057617187	$7.6 \cdot 10^{-1}$	1.23988
17	570317.07763671875	570317.84057617187	570317.45910644531	$3.8 \cdot 10^{-1}$	0.47744
18	570317.07763671875	570317.45910644531	570317.26837158203	$1.9 \cdot 10^{-1}$	0.09622
19	570317.07763671875	570317.26837158203	570317.17300415039	$9.5 \cdot 10^{-2}$	0.09439
20	570317.17300415039	570317.26837158203	570317.22068786621	$4.8 \cdot 10^{-2}$	0.00091
21	570317.17300415039	570317.22068786621	570317.19684600830	$2.3 \cdot 10^{-2}$	0.04674
22	570317.19684600830	570317.22068786621	570317.20876693726	$1.192 \cdot 10^{-2}$	0.02292
23	570317.20876693726	570317.22068786621	570317.21472740173	$6 \cdot 10^{-3}$	0.01100
24	570317.21472740173	570317.22068786621	570317.21770763397	$3 \cdot 10^{-3}$	0.00505
25	570317.21770763397	570317.22068786621	570317.21919775009	$1.5 \cdot 10^{-3}$	0.00207
26	570317.21919775009	570317.22068786621	570317.21994280815	$7.4 \cdot 10^{-4}$	0.00059
27	570317.21994280815	570317.22068786621	570317.22031533718	$3.7 \cdot 10^{-4}$	0.00017
28	570317.21994280815	570317.22031533718	570317.22012907267	$1.8 \cdot 10^{-4}$	0.00021
29	570317.22012907267	570317.22031533718	570317.22022220492	$9.3 \cdot 10^{-5}$	0.00002
30	570317.22022220492	570317.22031533718	570317.22026877105	$4.7 \cdot 10^{-5}$	0.00007
31	570317.22022220492	570317.22026877105	570317.22024548799	$2.3 \cdot 10^{-5}$	0.00003
32	570317.22022220492	570317.22024548799	570317.22023384646	$1.2 \cdot 10^{-5}$	0.000003
33	570317.22022220492	570317.22023384646	570317.22022802569	$0.6 \cdot 10^{-5}$	0.000009
34	570317.22022802569	570317.22023384646	570317.22023093607	$0.3 \cdot 10^{-5}$	0.000003

Se come criterio di arresto avessimo usato solo

$$|f(x_k)| \leq \epsilon,$$

la soluzione prodotta sarebbe quella corrispondente a $k = 32$ nella tabella precedente.

Infine, si osserva che il metodo di bisezione non converge in modo monotono.

Esercizio 2

Esempio 3.2.1 (*Libro*) Stabilire quante radici ammette l'equazione

$$f(x) = log(x+1) + \sqrt{x+2} - 1 = 0.$$

La funzione è definita e continua nell'intervallo $(-1, +\infty)$.

Inoltre, poichè $f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$, la funzione è monotona nel suo dominio di definizione e quindi ha un unico zero in $(-1, +\infty)$.

Infine, si osserva che $\forall\, x \geq 0 \quad f(x) > 0$, quindi lo zero di f sicuramente appartiene all'intervallo $(-1, 0]$.

Scegliendo come **Intervallo di separazione:** $I = [a, b] = [-1/2, 0]$ e applicando il **metodo di bisezione** si ha

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{-1/2}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a_0) \cong -0.468 \\ f(b_0) \cong +0.414 \\ f(x_1) \cong +0.035 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = a_0 \\ b_1 = x_1 \end{array}$$

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{-1/2 - 1/4}{2} \cong -\frac{3}{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a_1) \cong -0.468 \\ f(b_1) \cong +0.035 \\ f(x_2) \cong -1.268 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_2 = x_2 \\ b_2 = b_1 \end{array}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{f(x_k)}$	$\lvert\xi - \mathbf{x_k}\rvert$
1	-0.2500000	0.0351936	0.0203336
2	-0.3750000	-0.1952488	0.1046664
3	-0.3125000	-0.0756553	0.0421664
4	-0.2812500	-0.0192306	0.0109164
5	-0.2656250	0.0082212	0.0047086
6	-0.2734375	-0.0054435	0.0031039
7	-0.2695313	0.0014040	0.0008023
8	-0.2714844	-0.0020160	0.0011508
9	-0.2705078	-0.0003050	0.0001742

Dopo 9 iterazioni, l'approssimazione prodotta produce un errore dell'ordine di 10^{-3}

Il numero di iterazioni K necessarie affinchè la soluzione prodotta sicuramente abbia una certa precisione ε può essere stimato prima di eseguire le iterazioni nel modo seguente:

$$K \geq log_2(b-a) - log_2(\varepsilon)$$

con $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$ da cui

$$K > log_2(0.5) - log_2(0.5 \cdot 10^{-3}) \approx 9.9658$$

cioè $K \geq 10$.

Il valore di K stimato assicura che l'errore tra due approssimazioni successive sia inferiore alla tolleranza fissata. Ovviamente, poichè K deriva da una stima superiore dell'errore di troncamento, può accadere che il metodo raggiunga la precisione richiesta con un numero di iterazioni inferiore al valore K stimato usando la stima a priori.

Esercizio 3

Si consideri

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 5.$$

- Verificare che uno degli zeri di $f(x)$ è contenuto nell'intervallo $I = [a, b] = [0.6, 0.8]$.

- Indicando con ξ lo zero isolato al punto precedente, dare una stima del numero di iterazioni necessarie per avere una approssimazione di ξ con almeno quattro decimali esatti usando il metodo di bisezione.

- Verificare che $\xi \approx 0.7346$.

Soluzione

$f(x)$ è una funzione continua in $\mathbf{R}$.

Si verifica facilmente che $f(0.6) \approx 1.616 > 0$ e $f(0.8) \approx -0.888 < 0$; inoltre $f'(x) = 3x^2 - 20x = x(3x - 20) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq \frac{20}{3} > 6$, quindi $f(x)$ è sicuramente monotona decrescente in $I = [0.6, 0.8]$.

Ne segue che esiste una sola radice di f in I.

Per stimare il numero di iterazioni necessarie K si usa il criterio di arresto a priori, cioè

$$K > log_2(b - a) - log_2(\epsilon)$$

In questo caso: $a = 0.6, b = 0.8, \epsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$ e quindi

$$K > log_2(0.2) - log_2(0.5 \cdot 10^{-4}) = log_2\left(\frac{2}{10}\frac{10}{5}10^4\right) \approx 11.9658$$

ovvero $K \geq 12$

Applicando l'algoritmo di bisezione si ha

k	a_{k-1}	b_{k-1}	x_k	$x_k - x_{k-1}$	$f(x_k)$
1	0.6000000000	0.80000000000	0.700000000000	0.100000000000000	0.443000000000001
2	0.7000000000	0.80000000000	0.750000000000	0.050000000000000	0.203125000000000
3	0.7000000000	0.75000000000	0.725000000000	0.025000000000000	0.124828125000001
4	0.7250000000	0.75000000000	0.737500000000	0.012500000000000	0.037931640625001
5	0.7250000000	0.73750000000	0.731250000000	0.006250000000000	0.043753173828126
6	0.7312500000	0.73750000000	0.734375000000	0.003125000000000	0.002986907958984
7	0.7343750000	0.73750000000	0.735937500000	0.001562500000000	0.017453342437745
8	0.7343750000	0.73593750000	0.735156250000	0.000781250000000	0.007228459835052
9	0.7343750000	0.73515625000	0.734765625000	0.000390625000000	0.002119586408138
10	0.7343750000	0.73476562500	0.734570312500	0.000195312500000	0.000433958180248
11	0.7345703125	0.73476562500	0.734667968750	0.000097656250000	0.000842739765532
12	0.7345703125	0.73466796875	0.734619140625	0.000048828125000	0.000204372205189

Esercizio 4

Si consideri

$$f(x;\lambda) = e^{-x} - 2x - \lambda,$$

con $\lambda \in \mathbf{R}$.

- Determinare per quali valori del paramtero λ la funzione $f(x)$ ammette un unico zero nell'intervallo $[0, 1]$.

- Posto $\lambda = -1$, dare una stima del numero di iterazioni necessarie per avere un' approssimazione dello zero ξ con almeno tre decimali esatti usando il metodo di bisezione.

Esercizio 5

La velocità v del razzo Saturno V in volo verticale vicino la superficie terrestre può essere approssimata come segue

$$v(t) = u log \frac{M_0}{M_0 - mt} - gt$$

con $u = 2510 m/s$ velocità del razzo al momento del lancio

$M_0 = 2.8 \cdot 10^6 Kg$ massa del razzo al momento del lancio

$m = 13.3 \cdot 10^3 Kg/s$ tasso di consumo di carburante

$g = 9.81 m/s$ accelerazione di gravità

t tempo trascorso dal lancio.

Determinare l'istante di tempo in cui il razzo raggiunge la velocità del suono ($\approx 335 m/s$) con precisione al millesimo di secondo.

Esercizio 5

- Scrivere il diagramma di flusso dell'algoritmo di bisezione con criterio stima a priori

- Scrivere il diagramma di flusso dell'algoritmo di bisezione con criterio stima a posteriori

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: Cap. 3, §§ 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 (escluso metodo di falsa posizione)