Metodi Numerici con elementi di Programmazione

(A.A. 2013-2014)

Metodi Numerici

Appunti delle lezioni: Equazioni non lineari

Metodi di linearizzazione

Docente Vittoria Bruni

Email: vittoria.bruni@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 16

Tel. 06 49766648

Ricevimento: Giovedì 14.00-15.00

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sul sito

http://ingaero.uniroma1.it/

nella pagina dedicata al corso Metodi Numerici con elementi di Programmazione

Metodi di linearizzazione

Metodo babilonese o Metodo di Erone: fornisce un algoritmo iterativo (formulato già intorno al 1700 a.C.) per il calcolo della radice quadrata di un numero a:

1. scegliere un numero x_0 prossimo a $\sqrt{a}$
2. dividere a per x_0
3. calcolare la media tra a e x_0, cioè $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$
4. ripetere i passi 2 e 3 dopo aver posto $x_0 = x_1$

L'algoritmo si può schematizzare come segue

$$\begin{cases} x_0 \quad \text{dato} \\ x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Esempio

Si vuole calcolare $\sqrt{2} = 1.41421356237310$ usando il Metodo babilonese

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), & n \geq 1 \end{cases}$$

In questo caso $a = 2$ e si sceglie $x_0 = 1.5$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = \frac{17}{12} = 1.41666667$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1.41666667 + \frac{2}{1.41666667}\right) = 1.41421569$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(1.41421569 + \frac{2}{1.41421569}\right) = 1.41421356$$

Esercizio

E' possibile scrivere un algoritmo per il calcolo del reciproco di un numero c senza eseguire divisioni?

Metodi di linearizzazione

Si approssima la funzione $f(x)$ in un intorno I di ξ con la sua **tangente** o con la sua **secante**, calcolate tramite un opportuno **sviluppo in serie di Taylor**.

- **Metodo di Newton-Raphson o metodo delle tangenti**

- **Metodo delle secanti**

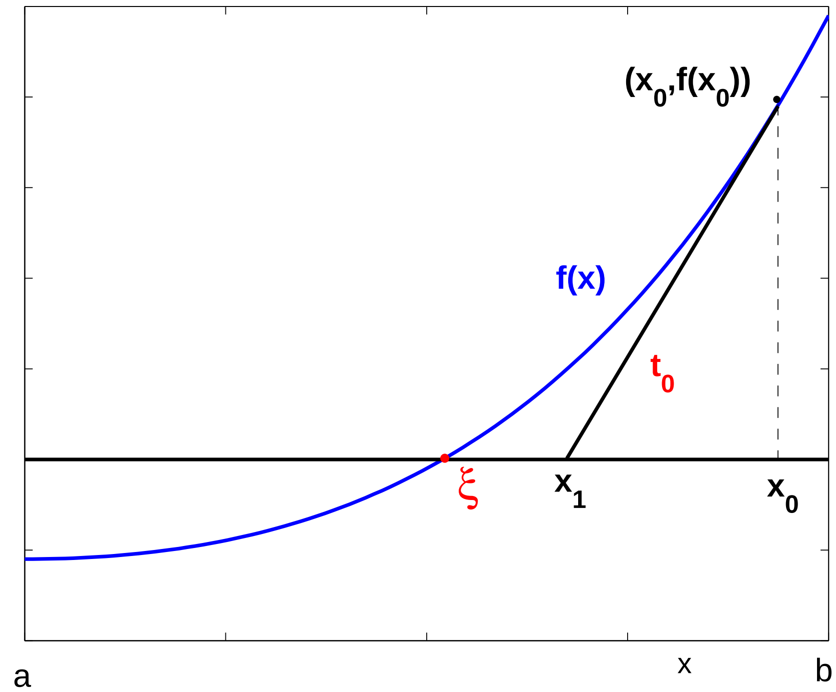
Metodo di Newton-Raphson

Approssimazione iniziale: x_0

Prima iterazione:

t_0 è la **retta tangente** a $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$:

$t_0 \rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



Nuova approssimazione x_1**:**

intersezione tra t_0 e $y = 0$

$$\Rightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

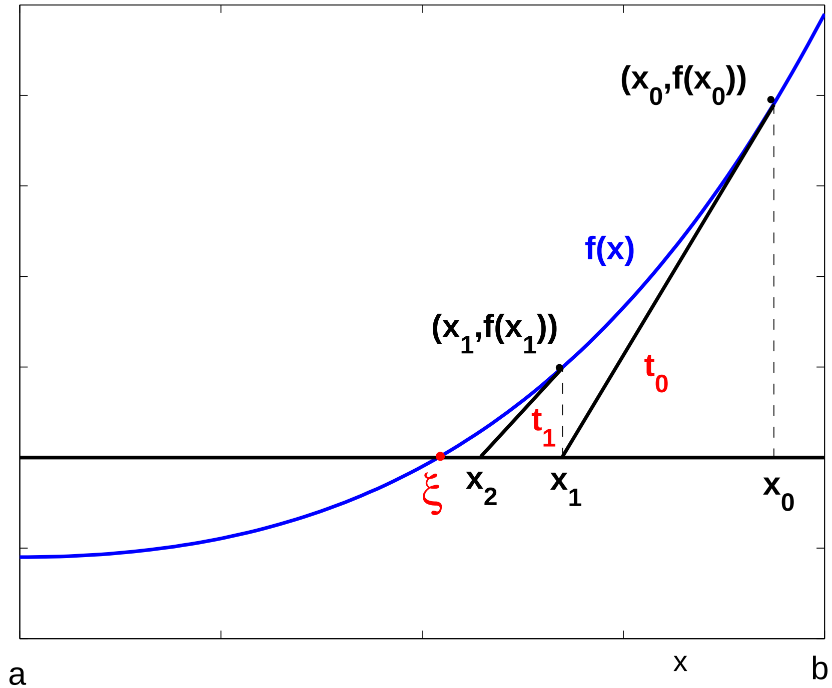
Metodo di Newton-Raphson

Nuova approssimazione: x_1

Seconda iterazione:

t_1 è la **retta tangente** a $f(x)$ nel punto $(x_1, f(x_1))$:

$t_1 \rightarrow y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$



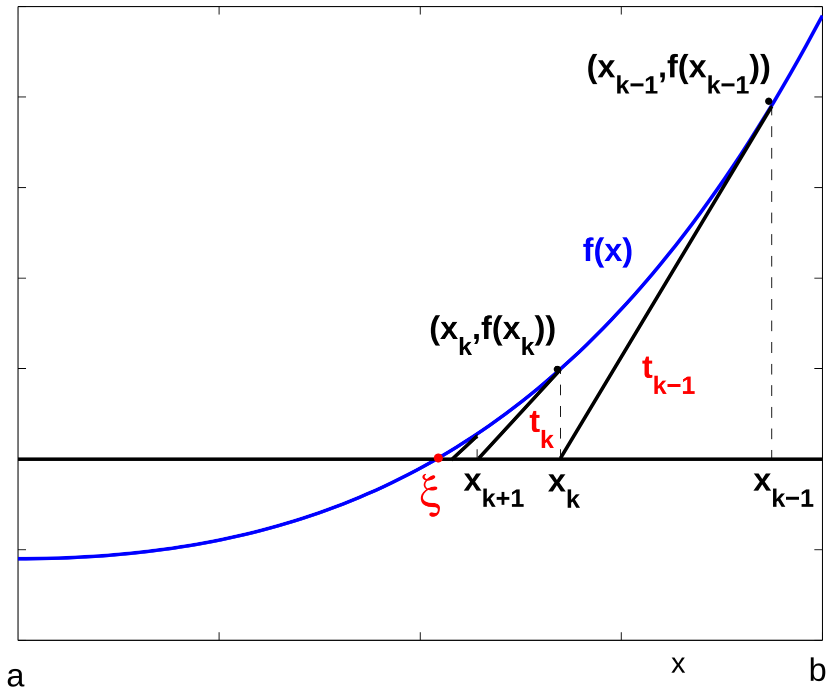
Nuova approssimazione x_2**:**

intersezione tra t_1 e $y = 0$,

$$\Rightarrow f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$$

Metodo di Newton-Raphson: algoritmo

Ad ogni **iterazione** $k = 1, 2, \ldots$ la **nuova approssimazione** x_k è data dall'**intersezione** tra la **retta** t_{k-1}, **tangente** a $f(x)$ nel punto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, e la retta $y = 0$; cioè



$$t_{k-1} \rightarrow y = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x - x_{k-1})$$

e quindi $$f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = 0$$

$$\downarrow$$

Algoritmo:
$$\boxed{\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}}$$

Metodo di Newton-Raphson: algoritmo

Il calcolo della radice di un numero a è equivalente a trovare gli zeri della seguente funzione

$$f(x) = x^2 - a$$

Se vogliamo calcolare la radice di a mediante il metodo di Newton-Raphson, dobbiamo usare il seguente algoritmo

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{(x_{k-1}^2 - a)}{2x_{k-1}}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = \frac{1}{2}\left(x_{k-1} + \dfrac{a}{x_{k-1}}\right), & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

che è proprio l'algoritmo corrispondente al metodo babilonese

Metodo di Newton-Raphson: algoritmo

Il calcolo del reciproco di un numero c è equivalente a trovare gli zeri della seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} - c$$

Se vogliamo calcolare il reciproco di c mediante il metodo di Newton-Raphson, dobbiamo usare il seguente algoritmo

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{\frac{1}{x_{k-1}} - c}{-\frac{1}{x_{k-1}^2}}, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1}(2 - c x_{k-1}), & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

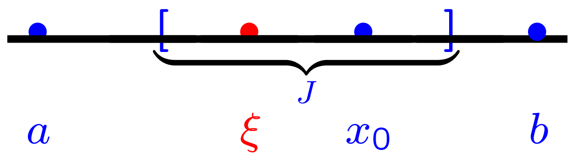
Metodo di Newton-Raphson: convergenza

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ipotesi di applicabilità :

- è stato **separato** un intervallo $I = [a, b]$ in cui c'è un'**unica radice** ξ;
- f, f', f'' sono **continue** in I: $f \in C^2[a, b]$;
- $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a, b]$

$\Rightarrow$ esiste un **intorno** $J \subseteq I$ di ξ tale che, se $x_0 \in J$, la **successione delle approssimazioni** $\{x_k\}$ **converge** a ξ.



Oss: il teorema garantisce solo l'esistenza di J

Metodo di Newton-Raphson: ordine di convergenza

Si vuole determinare l'ordine di convergenza del metodo di Newton-Raphson

Ordine di convergenza p: $\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$

L'errore di troncamento alla *k+1-esima* iterazione si può scrivere come segue

$$e_{k+1} = \xi - x_{k+1} = \left(\xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}\right) - \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right) = (\xi - x_k) - \left(\frac{f(\xi)}{f'(\xi)} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)$$

Il valore di $f(x_k)$ si può stimare considernado i primi tre termini dello **sviluppo in serie di Taylor** attorno alla radice ξ, cioè

$$f(x_k) = f(\xi) + f'(\xi)\underbrace{(x_k - \xi)}_{-e_k} + \frac{1}{2} f''(\xi)(x_k - \xi)^2 + \dots$$

mentre, supponendo che x_k sia molto vicino a ξ, si può assumere che $f'(x_k) \simeq f'(\xi)$

Sostituendo i valori di $f(x_k)$ e $f'(x_k)$ così ottenuti nell'espressione di e_{k+1} si ha

$$|e_{k+1}| \simeq \left| e_k - \frac{f(\xi) - f(\xi) + f'(\xi)e_k - \frac{1}{2}f''(\xi)e_k^2}{f'(\xi)} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)e_k^2}{f'(\xi)} \right|$$

da cui risulta

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right| \quad \Rightarrow \boxed{p \geq 2}$$

e quindi, se $f(x) \in C^3[a,b]$ la convergenza è almeno **quadratica**

Efficienza computazionale

Per valutare l'**efficienza** di un metodo iterativo bisogna tener conto sia dell'**ordine di convergenza** che del **costo computazionale**, cioè della quantità di calcoli richiesta ad ogni passo.

Efficienza computazionale: $E = p^{1/r}$

p: **ordine** di convergenza del metodo

r: numero di **valutazioni funzionali** (calcolo di funzioni o derivate) richieste ad ogni passo

Metodo di bisezione: $E = 1$

(ad ogni passo si richiede una sola valutazione funzionale, $f(x_k)$, e quindi $r = 1$)

Metodo di Newton: $E = 2^{1/2}$

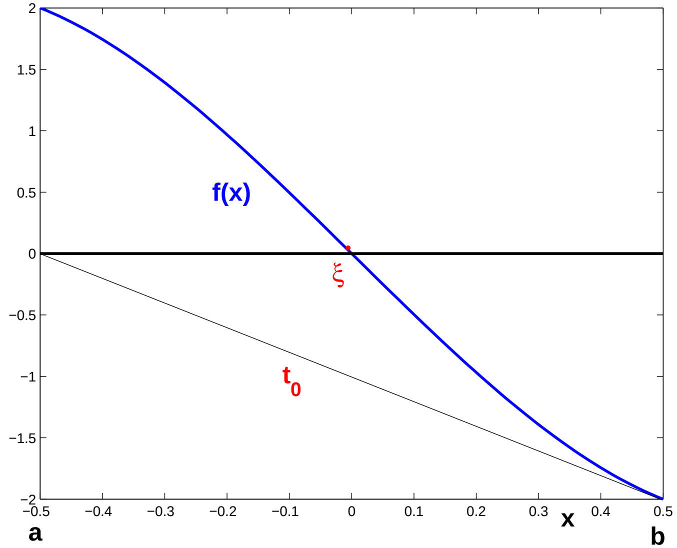
(ad ogni passo si richiedono due valutazioni funzionali, $f(x_k)$ e $f'(x_k)$, e quindi $r = 2$)

Metodo di Newton-Raphson: esempio

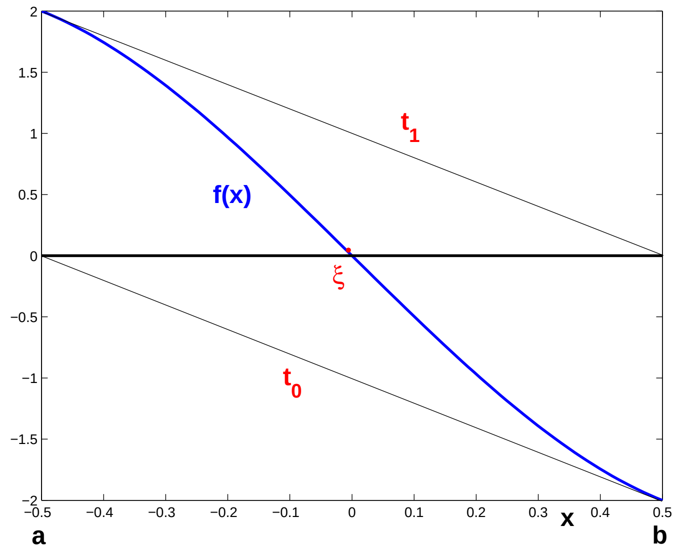
Approssimare la radice $\xi = 0$ dell'equazione

$$f(x) = 4x^3 - 5x = 0$$

con il **metodo di Newton-Raphson** nell'intervallo $I = [-0.5, 0.5]$ e scegliendo come approssimazione iniziale una volta $x_0 = 0.5$ e una volta $x_0 = 0.4$.



$$x_{2k} = 0.5$$



$$x_{2k+1} = -0.5$$

Si verifica facilmente che f verifica le condizioni di applicabilità del **metodo di Newton-Raphson**.

Infatti, $f \in C^2(I)$, $f'(x) = 12x^2 - 5 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} \notin I$.

Scegliendo $x_0 = 0.5$ si ha una *situazione di stallo* e il metodo non converge. Infatti, l'algoritmo di Newton per f è il seguente

$$x_k = x_{k-1} - \frac{4x_{k-1}^3 - 5x_{k-1}}{12x_{k-1}^2 - 5}$$

e quindi

$$x_1 = x_0 - \frac{4x_0^3 - 5x_0}{12x_0^2 - 5} = 0.5 - \frac{2}{-2} = -0.5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{4x_1^3 - 5x_1}{12x_1^2 - 5} = -0.5 + \frac{2}{2} = 0.5$$

Al contrario, scegliendo $x_0 = 0.4$, il metodo converge

k	x_k	$\|x_k - x_{k-1}\|$	$\|f(x_k)\|$
1	-0.16623376623377	0.56623376623377	0.81279423831355
2	0.00787190837207	0.17410567460584	0.03935759066802
3	-0.00000078059303	0.00787268896510	0.00000390296513
4	0.00000000000000	0.00000078059303	0.00000000000000

Infatti, il teorema di convergenza del metodo di Newton-Raphson assicura la convergenza per ogni scelta dell'approssimazione iniziale in un opportuno intorno J del punto ξ. Scegliendo come approssimazioni iniziali punti che non appartengono all'intorno J, la convergenza non può essere garantita.

Oss: $f''(x) = 24x = 0 \iff x = 0 \in I$.

Estremo di Fourier

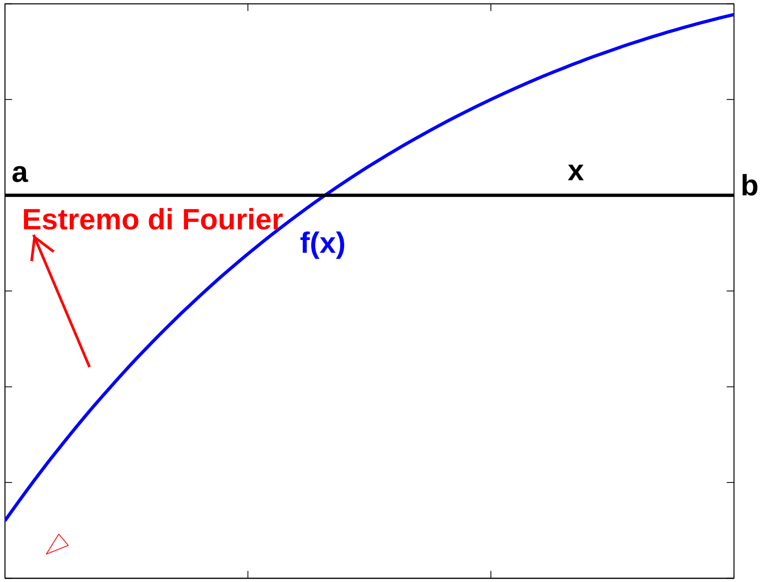
Se $f(x)$ ha **concavità fissa** in un intervallo I, è possibile stabilire un criterio di scelta dell'approssimazine iniziale che garantisce la **convergenza** del metodo.

Estremo di Fourier:

Data una funzione f **continua** e **convessa** in $I = [a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$, si dice **estremo di Fourier** di I l'estremo verso cui f rivolge la convessità .

Se **esiste** f'', allora l'estremo di Fourier è a o b a seconda che $f(a)f''(a) > 0$ oppure $f(b)f''(b) > 0$.

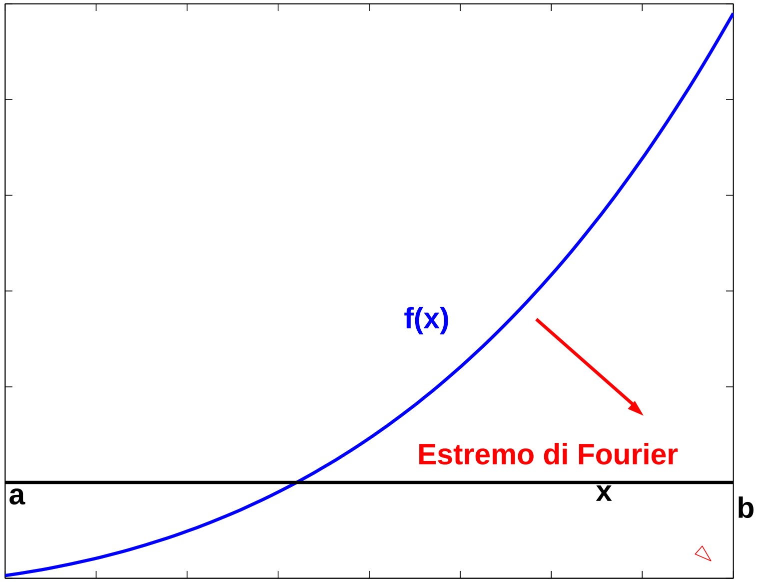
Estremo di Fourier: esempi



$f''(x) < 0$ per $x \in [a, b]$

$$\begin{cases} f(a)f''(a) > 0 \\ f(b)f''(b) < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ a è **estremo di Fourier**



$f''(x) > 0$ per $x \in [a, b]$

$$\begin{cases} f(a)f''(a) < 0 \\ f(b)f''(b) > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ b è **estremo di Fourier**

Metodo di Newton-Raphson: convergenza

Ipotesi di applicabilità :

- $f(a)f(b) < 0$
- f, f', f'' sono **continue** in I: $f \in C^2[a,b]$;
- $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a,b]$;
- $f''(x) \neq 0$ per $x \in [a,b]$ e x_0 è l'**estremo di Fourier** di $[a,b]$.

$\Rightarrow$

1) esiste un'**unica radice** $\xi \in [a,b]$;

2) la **successione delle approssimazioni**

$$\left\{ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \right\} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

è **monotona** e **converge** a ξ;

3) se $f \in C^3[a,b]$, la convergenza è **quadratica**.

Nell'esempio precedente, relativo alla funzione $f(x) = 4x^3 - 5x$, non è soddisfatta l'ipotesi relativa alla derivata seconda. Al contrario, per la funzione $f(x) = x^3 - 10x^2 + 5$, considerando l'intervallo $I = [0.6, 0.8]$, si ha

$$f''(x) = 6x - 20 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{10}{3} \notin I$$

Le ipotesi del teorema sono verificate e, poichè

$$f''(0.6) = \frac{18}{5} - 20 < 0 \quad f''(0.8) = \frac{24}{5} - 20 < 0,$$

mentre

$$f(0.6) > 0 \quad f(0.8) < 0,$$

l'estremo di Fourier è l'estremo $b = 0.8$, che quindi può essere scelto come approssimazione iniziale del metodo di Newton-Raphson, cioè $x_0 = 0.8$.

Esercizio: eseguire le iterazioni e verificare la convergenza monotona.

Problema 3: Soluzione con Metodo di Newton

$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0 \qquad \lambda \in I = [0.05, 0.15]$

- Nell'intervallo I è stato separato un unico zero

- f, f', f'' sono **continue** in I

- $f'(x) = e^{\lambda} - \frac{0.435}{\lambda^2}(e^{\lambda} - 1) + \frac{0.435}{\lambda}e^{\lambda} \neq 0$ per $\lambda \in I$

$\Rightarrow$ Lo zero può essere approssimato con il **metodo delle tangenti**

Inoltre $f''(x) = e^{\lambda} + \frac{0.87}{\lambda^3}(e^{\lambda} - 1) - \frac{0.87}{\lambda^2}e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}e^{\lambda} > 0$ in I

$\Rightarrow$ esiste l'**estremo di Fourier** di I:

$$f(0.15)f''(0.15) > 0 \Rightarrow x_0 = 0.15$$

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$	$\lvert f(x_k) \rvert$
0	0.15000000000000	10.00000000000000	0.06715354664030
1	0.10211384134812	0.04788615865188	0.00149497988981
2	0.10099851665312	0.00111532469500	0.00000078594305
3	0.10099792968591	0.00000058696721	0.00000000000022
4	0.10099792968575	0.00000000000016	0.00000000000000
5	0.10099792968575	0.00000000000000	0.00000000000000

Ripetere scegliendo $x_0 = 0.05$

Metodi di linearizzione

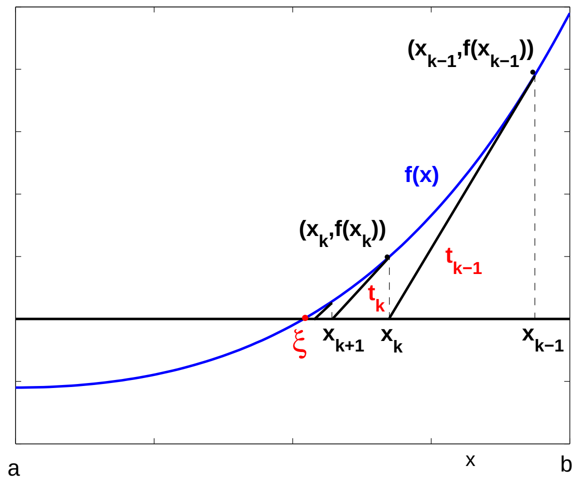
Il metodo di Newton-Raphson richiede la conoscenza della $f'(x)$ che non sempre è di facile valutazione.

Metodi alternativi sono, per esempio,

- il metodo della *tangente fissa*: ad ogni iterazione $f'(x_n)$ è approssimato con $f'(x_0)$
- il metodo delle *secanti con estremi variabili*: $f'(x_n)$ è approssimato con il rapporto incrementale
- il metodo delle *secanti con estremo fisso*: $f'(x_n)$ è approssimato con il rapporto incrementale in cui un punto rimane fisso ad ogni iterazione

Metodi di linearizzione

Metodo di Newton-Raphson

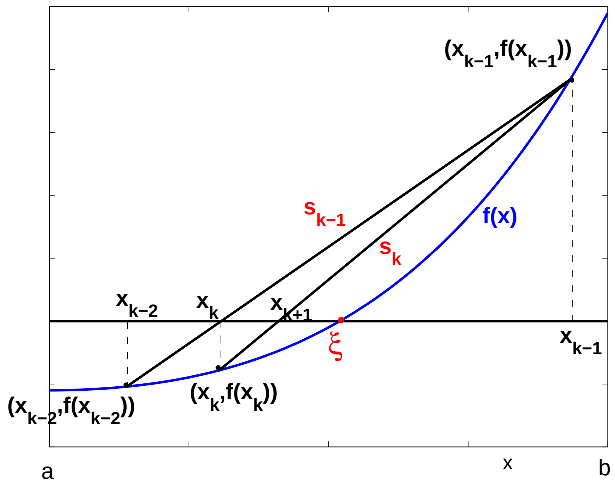


Ad ogni **iterazione** $k = 1, 2, \ldots$ la **nuova approssimazione** x_k è data dall'**intersezione** tra la **retta** t_{k-1}, **tangente** a $f(x)$ nel punto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, e $y = 0$.

Algoritmo:

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Metodo delle secanti con estremi variabili



Ad ogni **iterazione** $k = 2, 3, \ldots$ la **nuova approssimazione** x_k è data dalla **intersezione** tra la **retta** s_{k-1}, **secante** $f(x)$ nei punti $(x_{k-2}, f(x_{k-2}))$ e $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, e $y = 0$.

Algoritmo:

$$\begin{cases} x_0, x_1 & \text{dati} \\ x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \dfrac{x_{k-1} - x_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}, & k \geq 2 \end{cases}$$

Metodo delle secanti

$$\begin{cases} x_0, x_1 \quad \text{dati} \\ x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \dfrac{x_{k-1} - x_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}, \quad k = 2, \ldots \end{cases}$$

Vantaggi:

- si può usare quando **non si conosce** la derivata di $f(x)$ o quando $f(x)$ è **nota per punti**
- ad ogni passo richiede **una sola** valutazione funzionale

Svantaggi:

- servono **due approssimazioni iniziali** x_0 e x_1
- la scelta di x_0 e x_1 deve essere "**accurata**"

Convergenza del metodo delle secanti

Se

- è stato **separato** un intervallo $I = [a, b]$ **simmetrico** intorno alla **radice** ξ,

- f, f', f'' sono **continue** in I: $f \in C^2[a, b]$,

- $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a, b]$,

$\Rightarrow$ esiste un **intorno** $J \subseteq I$ di ξ tale che, se $x_0, x_1 \in J$, la **successione delle approssimazioni** $\{x_k\}$ **converge** a ξ con convergenza **superlineare**, cioè $1 < p < 2$.

Se $f''(x) \neq 0$ in I, l'**ordine di convergenza** è $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow E = p \simeq 1.62$$

Convergenza del metodo delle secanti

Se $f''(x) \neq 0$ in I, **allora** $e_{n+1} \approx C_N^{\frac{p}{p+1}} e_n$

con $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e

C_N la costante asintotica del metodo di Newton ($C_N = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$).

Dim: Sottraendo ξ ad ambo i membri della formula di iterazione del metodo delle secanti si ha

$$-e_{k+1} = -e_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

poichè $e_{k-1} - e_k = \xi - x_{k-1} - (\xi - x_k) = x_k - x_{k-1}$, l'uguaglianza precedente può essere riscritta nel modo seguente

$$e_{k+1} = e_k - \frac{f(x_k)(e_k - e_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{f(x_k)e_{k-1} - f(x_{k-1})e_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Mettendo a fattor comune la quantità $e_k e_{k-1}$ e moltiplicando per $\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$, risulta

$$e_{k+1} = e_k e_{k-1} \left(\frac{\frac{f(x_k)}{e_k} - \frac{f(x_{k-1})}{e_{k-1}}}{x_k - x_{k-1}} \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \right).$$

Poichè per $x_{k-1} \rightarrow x_k \rightarrow \xi$

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \rightarrow \frac{1}{f'(x_k)} \rightarrow \frac{1}{f'(\xi)}$$

$$\frac{\frac{f(x_k)}{e_k} - \frac{f(x_{k-1})}{e_{k-1}}}{x_k - x_{k-1}} \rightarrow -g'(x_k) \rightarrow \frac{f''(\xi)}{2},$$

con $g(x) = -\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$,

e $g'(x) = -\frac{f'(x)(x-\xi)-f(x)+f(\xi)}{(x-\xi)^2} = -\frac{f'(x)(x-\xi)-f(x)}{(x-\xi)^2} \rightarrow -\frac{f''(\xi)}{2}$

(infatti $\lim_{x\rightarrow\xi} g'(x) = \lim_{x\rightarrow\xi} -\frac{f''(x)(x-\xi)+f'(x)-f'(x)}{2(x-\xi)} = -\frac{f''(\xi)}{2}$)

Quindi, per $x_k \to \xi$ risulta

(1) $$e_{k+1} = C_N e_k e_{k-1}.$$

D'altra parte, il metodo ha ordine di convergenza p se $e_{k+1} \approx C e_k^p$, ovvero se $e_k \approx C e_{k-1}^p$.

Per determinare i valori di C e p si considera

$$e_{k-1} \approx \left(\frac{e_k}{C}\right)^{\frac{1}{p}}$$

e lo si sostituisce in eq. (1), da cui

$$e_{k+1} \approx C_N \left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{p}} e_k^{1+1/p}$$

e quindi

$$C e_k^p \approx C_N \left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{p}} e_k^{1+1/p}$$

da cui

$$e_k^{1+1/p-p} \approx \frac{C^{1+1/p}}{C_N}.$$

Affinchè l'ultima relazione sia vera deve accadere che

$$1 + 1/p - p = 0 \Leftrightarrow p^2 - p - 1 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

di cui si considera solo la soluzione positiva.

In corrispondenza del valore di p trovato si ha

$$1 \approx \frac{C^{1+1/p}}{C_N},$$

da cui

$$C = C_N^{\frac{p}{1+p}}.$$

Esercizio: Quale è l'ordine di convergenza del metodo delle secanti se usato per il calcolo dello zero di $f(x) = x^3 - 10x^2 + 5$ contenuto nell'intervallo $I = [0.6, 0.8]$?

Esercizio 1

Data l'equazione non lineare

$$f(x) = x^3 + \alpha - \cos x = 0:$$

1) individuare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ l'equazione non ammette radici positive

2) per $\alpha = \frac{1}{3}$ separare la radice più piccola $\tilde{\xi}$

3) fornire una stima a priori del numero di iterazioni necessarie per approssimare $\tilde{\xi}$ con un errore inferiore a $\epsilon = 10^{-6}$ tramite il metodo di bisezioni;

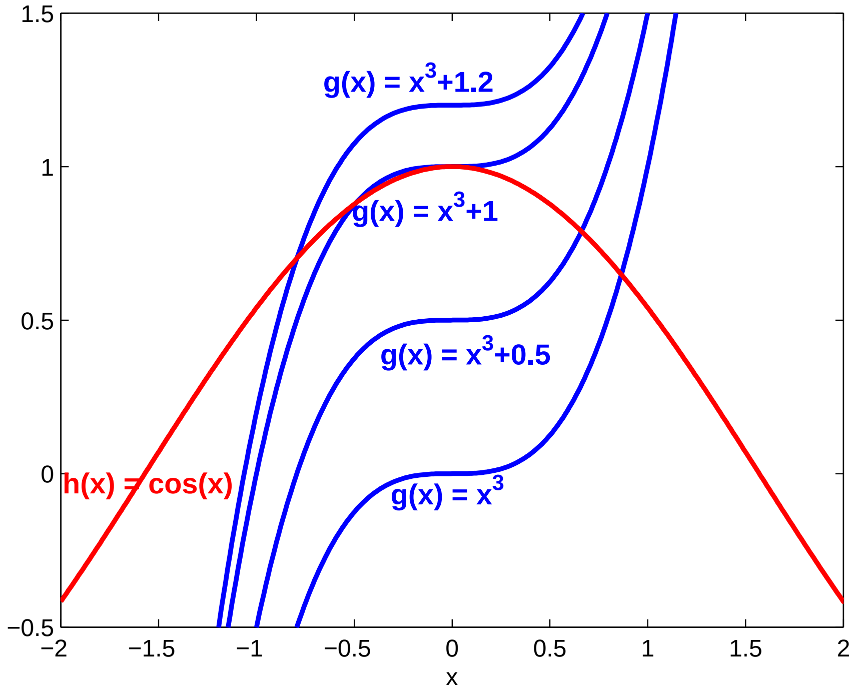
3) quante iterazioni sono necessarie per approssimare con la stessa tolleranza ϵ la radice $\tilde{\xi}$ tramite il metodo di Newton e il metodo delle secanti?

Traccia della soluzione

1) Tracciando **qualitativamente** i grafici delle funzioni

$$y = g(x) = x^3 + \alpha \qquad\qquad y = h(x) = \cos x,$$

si deduce che se $\alpha \geq 1$, la funzione $f(x)$ non ha zeri positivi.



2) L'intervallo $[0,1]$ contiene l'**unica** radice positiva dell'equazione

$$f(x) = x^3 + 1/3 - \cos x = 0$$

Infatti

$$f(0) = -2/3 < 0,\ f(1) = 4/3 - cos(1) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(0)f(1) < 0$$

e inoltre

$$f'(x) = 3x^2 + sin(x) > 0 \qquad \text{per} \quad x \in (0,1]$$

3) Nell'intervallo $[0, 1]$ sono verificate le **ipotesi di applicabilità** del metodo di bisezioni.

Quindi il numero di iterazioni K per cui $|e_K| \leq \epsilon$ si ricava dalla relazione

$$|e_K| = |\xi - x_K| \leq \frac{b-a}{2^K} \leq \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad K > \frac{\log(b-a) - \log \epsilon}{\log 2}.$$

In questo caso $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 10^{-6}$

$$\Rightarrow K > \frac{\log(1) - \log 10^{-6}}{\log 2} \approx 19.9320 \Rightarrow K \geq 20.$$

4) Nel caso dei metodi di Newton e delle secanti si possono verificare le **ipotesi di applicabilità** nell'intervallo $[0,1]$:

- nell'intervallo I è stato separato un **unico zero**

- f, f', f'' sono **continue** in I

- $f'(x) = 3x^2 + sin(x) > 0$ per $x \in J \subset I$, $\quad J = [\delta, 1]$ con $0 < \delta << 1$

- $f''(x) = 6x + cos(x) > 0$ per $x \in I$

$\Rightarrow$ l'estremo $b = 1$ è l'**estremo di Fourier** dell'intervallo J.
Il numero di iterazioni si può calcolare eseguendo le iterate.

k	x_k (bisez.)	$\|x_k - x_{k-1}\|$	x_k (Newton)	$\|x_k - x_{k-1}\|$	x_k (secanti)	$\|x_k - x_{k-1}\|$
1	0.500000000		1.		0., 1.	
2	0.750000000	0.25e+0	0.793560583	0.21e+0	0.456715571	0.54e+0
3	0.625000000	0.12e+0	0.742925006	0.51e-1	0.658587384	0.20e+0
4	0.687500000	0.62e-1	0.739971453	0.29e-2	0.775393863	0.12e+0
5	0.718750000	0.31e-1	0.739961685	0.98e-5	0.736625691	0.39e-1
6	0.734375000	0.16e-1	0.739961685	0.11e-9	0.739832822	0.32e-2
7	0.742187500	0.78e-2			0.739962167	0.13e-3
8	0.738281250	0.39e-2			0.739961685	0.48e-6
9	0.740234375	0.19e-2				
10	0.739257812	0.97e-3				
11	0.739746097	0.49e-3				
12	0.739990234	0.24e-3				
13	0.739868164	0.12e-3				
14	0.739929199	0.61e-4				
15	0.739959717	0.30e-4				
16	0.739974976	0.15e-4				
17	0.739967346	0.76e-5				
18	0.739963531	0.38e-5				
19	0.739961624	0.19e-5				
20	0.739962578	0.95e-6				

Esercizio 2

La lunghezza d'onda di uno tsunami L, per una certa profondità dell'acqua d soddisfa la seguente **equazione non lineare**

$$L = \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

con a_g e T rispettivamente l'accelerazione di gravità e il periodo. Sapendo che $T = 2880s$ e $d = 4000m$ (valore tipico dell'Oceano Indiano), produrre una stima del valore di L con precisione almeno 10^{-5}.

Esercizio 2: Metodo di Newton-Raphson

Si osserva che

- $f'(L) = 1 + \frac{a_g T^2 d}{L^2} \frac{1}{cosh^2(\frac{2\pi d}{L})} \neq 0 \quad \forall L \neq 0.$

  Inoltre f' è una funzione continua nello stesso dominio ed in particolare nell'intervallo I in cui è stata isolata la radice positiva di f.

- $$f''(L) = a_g T^2 d \left(-\frac{2}{L^3 cosh^2(\frac{2\pi d}{L})} + \frac{2\pi d}{L^4} \frac{sinh(\frac{4\pi d}{L})}{cosh^4(\frac{2\pi d}{L})} \right)$$

  é una funzione continua nel dominio di esistenza di f.

  Inoltre è strettamente negativa nell'intervallo I.

  Scegliamo $x_0 = b = 0.6 \cdot 10^6$ come approssimazione iniziale della soluzione.

Calcoliamo ora il punto x_1 tale che

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

cioè

$$x_1 = 0.6 \cdot 10^6 - \frac{57863.27995127568}{1.90250514141390} = 569585.74319106806.$$

L'errore $e_1 = |x_1 - x_0| = 30414.25681 > 0.5 \cdot 10^{-5}$.

Calcoliamo ora il punto x_2 tale che

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

cioè

$$x_2 = 569585.74319106806 - \frac{-1462.944269931060}{2.00126829645764 6} = 570316.7517582455.$$

L'errore $e_2 = |x_2 - x_1| = 731.00856717745773 0 > 0.5 \cdot 10^{-5}$.

L'approssimazione ottenuta non ha ancora la precisione richiesta, quindi calcoliamo il punto x_3 tale che

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

cioè

$$x_3 = 570316.7517582455 - \frac{-0.93634280480910}{1.99870815060183} = 570317.220232246 9.$$

L'errore $e_3 = |x_3 - x_2| = 0.468474001390859 > 0.5 \cdot 10^{-5}$.

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

cioè

$$x_4 = 570317.2202322469 - \frac{-3.834720700979233 \cdot 10^{-7}}{1.998706513054914} =$$

$$= 570317.22023243876000.$$

L'errore $e_4 = |x_4 - x_3| = 1.918601193287788 \cdot 10^{-7} < 0.5 \cdot 10^{-5}$.

Riassumendo

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{e_k}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	569585.74319106806	30414.256808931939	1462.9442699310603
2	570316.75175824552	731.0085671774577 3	0.936342804809101
3	570317.22023224691	0.4684740013908590	0.000000383472070
4	570317.22023243876	0.0000001918524500	0.000000000000000

Dopo 4 iterazioni è stata raggiunta la precisione ϵ richiesta per l'errore!

Dopo 3 iterazioni il valore di f nell'approssimazione alla terza iterazione è molto più piccolo di ϵ!

Poichè

$$f''(a) < 0 \text{ e } f''(b) < 0 \text{ mentre } f(a) < 0 \text{ e } f(b) > 0,$$

a è l'estremo di Fourier dell'intervallo $I = [0.5 \cdot 10^6, 0.6 \cdot 10^6]$

e quindi può essere scelto come approssimazione iniziale della soluzione, cioè $x_0 = a = 0.5 \cdot 10^6$:

k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	565429.608054025100000	65429.608054025099000	9811.013667401624800
2	570296.151698269420000	4866.543644244317000	42.110592287266627
3	570317.219844276430000	21.068146007019095	0.000775822554715
4	570317.220232438760000	0.000388162326999	0.000000000000000
5	570317.220232438760000	0.000000000000000	0.000000000000000

Esercizio 2: Metodo delle secanti

La continuità di f, f' e f'' e $f'(L) \neq 0 \quad \forall\ L \quad \in \quad I$, assicurano la convergenza del motodo delle secanti.

Si scelgono gli estremi dell'intervallo I come punti iniziali, cioè

$$x_1 = a = 0.5 \cdot 10^6 \qquad \text{e} \qquad x_2 = 0.6 \cdot 10^6,$$

e si calcola il punto

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} =$$

$$= 0.6 \cdot 10^6 - \frac{57863.27995127568 \cdot 0.1 \cdot 10^6}{57863.27995127568 + 150396.8359693979} =$$

$$= 572215.86106611218$$

L'errore $e_3 = |x_3 - x_2| = 27784.138933887822 > \epsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$

Calcoliamo il punto

$$x_4 = x_3 - f(x_3)\frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} =$$

$$= 572215.86106611218 - \frac{3788.546320179361 \cdot (-27784.138933887822)}{3788.546320179361 - 57863.27995127568} =$$

$$= 570269.26807805535$$

Continuando si ottiene la seguente tabella

$\mathbf{k}$	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{e_k}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	572215.86106611218	27784.13893388782200	3788.5463201793609
2	570269.26807805535	1946.592988056829200	95.84630239580292
3	570317.29971602384	48.031637968495488	0.1588643480 79078
4	570317.22023577173	0.079480252112262	0.000006661517546
5	570317.22023243876	0.000003332970664	0.000000000000000

Il metodo converge dopo 5 iterazioni

(Oss: la $f(x_5)$ è zero rispetto alla precisione di macchina.)

Esercizio 2: Separazione delle radici

La separazione delle radici di $f(L)$ può essere fatta anche in modo analitico. Infatti, basta osservare che

$$\lim_{L \to 0} f(L) = -\frac{a_g T^2}{2\pi},$$

in quanto $\tanh(\frac{2\pi d}{L}) \to 1$, mentre

$$\lim_{L \to +\infty} f(L) = +\infty$$

in quanto $\tanh(\frac{2\pi d}{L}) \to 0$.

Inoltre, la derivata prima di f è strettamente positiva per $L > 0$ da cui si deduce che f è una funzione monotona crescente per $L > 0$.

Scegliendo $L = 2\pi d$, si ha

$$f(2\pi d) = 2\pi d - \frac{a_g T^2}{2\pi} \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} < 0,$$

mentre, considerando che $\tanh(x) \approx x$, si ha $L = \sqrt{a_g d}T$ e

$$f(\lceil \sqrt{a_g d}T \rceil) = 369.26 > 0.$$

Quindi, l'intervallo

$$I = [\lceil 2\pi d \rceil, \; \lceil \sqrt{a_g d}T \rceil] = [25133, 570502]$$

isola la radice positiva di f.

Esercizio 2: nuovo intervallo di separazione

Confrontare le approssimazioni della radice positiva di f nell'intervallo $I = [25133, 570502]$, usando il metodo di bisezione, di Newton-Raphson e delle secanti, con i risultati delle tabelle precedenti.

Esercizio 2: Metodo di Bisezione

$$I = [25133,\ 570502]$$

Si osserva che il metodo converge alla soluzione con la precisione richiesta dopo 36 iterazioni

k	estremo inf.	estremo sup.	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	297817.500000000	570502.00000000000	434159.7500000000	136342.25	314664.12181
2	434159.750000000	570502.00000000000	502330.8750000000	68171.125	145053.08450
3	502330.875000000	570502.00000000000	536416.4375000000	34085.5625	69892.91937
4	536416.437500000	570502.00000000000	553459.2187500000	17042.78125	34205.98083
5	553459.218750000	570502.00000000000	561980.6093750000	8521.39062	16785.70212
6	561980.609375000	570502.00000000000	566241.3046875000	4260.69531	8175.80282
7	566241.304687500	570502.00000000000	568371.6523437500	2130.34766	3895.25742
8	568371.652343750	570502.00000000000	569436.8261718750	1065.17383	1761.00610
9	569436.826171875	570502.00000000000	569969.4130859375	532.58691	695.37596

10	569969.41308593750	570502.00000000000	570235.70654296875	266.29346	162.93356
11	570235.70654296875	570502.00000000000	570368.85327148438	133.14673	103.19463
12	570235.70654296875	570368.85327148438	570302.27990722656	66.57336	29.86171
13	570302.27990722656	570368.85327148438	570335.56658935547	33.28668	36.66839
14	570302.27990722656	570335.56658935547	570318.92324829102	16.64334	3.40382
15	570302.27990722656	570318.92324829102	570310.60157775879	8.32167	13.22882
16	570310.60157775879	570318.92324829102	570314.76241302490	4.16083	4.91247
17	570314.76241302490	570318.92324829102	570316.84283065796	2.08042	0.75431
18	570316.84283065796	570318.92324829102	570317.88303947449	1.04021	1.32476
19	570316.84283065796	570317.88303947449	570317.36293506622	0.52010	0.28522
20	570316.84283065796	570317.36293506622	570317.10288286209	0.26005	0.23455
21	570317.10288286209	570317.36293506622	570317.23290896416	0.13003	0.02534
22	570317.10288286209	570317.23290896416	570317.16789591312	0.06501	0.10460
23	570317.16789591312	570317.23290896416	570317.20040243864	0.03251	0.03963
24	570317.20040243864	570317.23290896416	570317.21665570140	0.01625	0.00715
25	570317.21665570140	570317.23290896416	570317.22478233278	0.00813	0.00909
26	570317.21665570140	570317.22478233278	570317.22071901709	0.00406	0.00097
27	570317.21665570140	570317.22071901709	570317.21868735924	0.00203	0.00309
28	570317.21868735924	570317.22071901709	570317.21970318817	0.00102	0.00106
29	570317.21970318817	570317.22071901709	570317.22021110263	0.00051	0.00004
30	570317.22021110263	570317.22071901709	570317.22046505986	0.00025	0.00046
31	570317.22021110263	570317.22046505986	570317.22033808124	0.00013	0.00021
32	570317.22021110263	570317.22033808124	570317.22027459193	0.00006	0.00008
33	570317.22021110263	570317.22027459193	570317.22024284722	0.00003	0.00002
34	570317.22021110263	570317.22024284722	**570317.22022**697493	0.00002	0.00001
35	570317.22022697493	570317.22024284722	**570317.22023**491107	0.00001	$0.5 \cdot 10^{-5}$
36	570317.22022697493	570317.22023491107	**570317.22023**094306	$0.4 \cdot 10^{-5}$	$0.3 \cdot 10^{-5}$

Esercizio 2: Metodo di Newton-Raphson

$$I = [25133,\ 570502]$$

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{e_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	570317.19038567902	184.80961432098411 0	0.05965491465758 5
2	570317.22023243795	0.02984675893094 4	0.00000000162981 5
3	570317.22023243876	0.00000000081490 7	0.00000000000000 0

L' approssimazione iniziale è molto più vicina alla soluzione.

Esercizio 2: Metodo delle secanti

$$I = [25133,\ 570502]$$

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{e_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	570481.52988393593	20.470116064068861	328.35959916887805
2	570317.19369166286	164.33619227306917	0.053047222900204
3	570317.22023625160	0.026544588734396	0.000007620779797
4	570317.22023243876	0.000003812834620	0.000000000000000

Esercizio 1.6

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, *Esercizi di Calcolo Numerico*, **II ed.**

Data l'equazione dipendente da un parametro positivo α

$$f(x,\alpha) = \alpha e^x \sqrt{x} - 1 = 0$$

determinare i valori di α per i quali f ha una radice in $I = [0.01, 1]$; detto A l'insieme di tali valori, si consideri $\alpha \in A$ e si discuta con quali modalità va applicato il metodo di Newton-Raphson per approssimare detta radice.

Soluzione Il dominio di esistenza di f è dato da $x \geq 0, \quad \forall\, \alpha$.

Inoltre, risulta

$$f(0) = \alpha \cdot e^0 \cdot 0 - 1 = -1, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$f'(x) = \alpha \left(e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} \right) = \alpha e^x \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} \right) > 0 \quad \forall x > 0$$

Infatti

$$e^x > 0 \quad \forall x, \qquad \sqrt{x} > 0 \quad \forall x > 0 \quad \text{e} \quad 2x + 1 > 0 \quad \forall x > -\frac{1}{2}$$

Quindi, f è una funzione monotona crescente.

Poichè risulta

$$f(0.01) = \alpha \cdot \frac{e^{0.01}}{10} - 1 \quad \text{e} \quad f(1) = \alpha e - 1$$

affinchè f abbia la sua unica radice in I deve accadere

$$f(0.01) < 0 \quad \text{mentre} \quad f(1) > 0,$$

(f è monotona crescente) cioè

$$\alpha \cdot \frac{e^{0.01}}{10} - 1 < 0 \quad \text{e} \quad \alpha e - 1 > 0$$

da cui deriva

$$\frac{1}{e} < \alpha < \frac{10}{e^{0.01}}$$

Per poter applicare il Metodo di Newton-Raphson e soprattutto per essere certi che il metodo converga alla radice cercata, è necessario che f, f', f'' siano funzioni continue in I, che $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$.

Sicuramente f e f' sono funzioni continue in I, inoltre la monotonia di f garantisce che $f'(x) \neq 0$ in I.

Per quanto riguarda f'', invece, si ha

$$f''(x) = \alpha e^x \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}\right) + \alpha e^x \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4x\sqrt{x}}\right) = \frac{\alpha e^x}{2\sqrt{x}} \; \frac{4x^2+4x-1}{2x}$$

che risulta continua in I ma

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

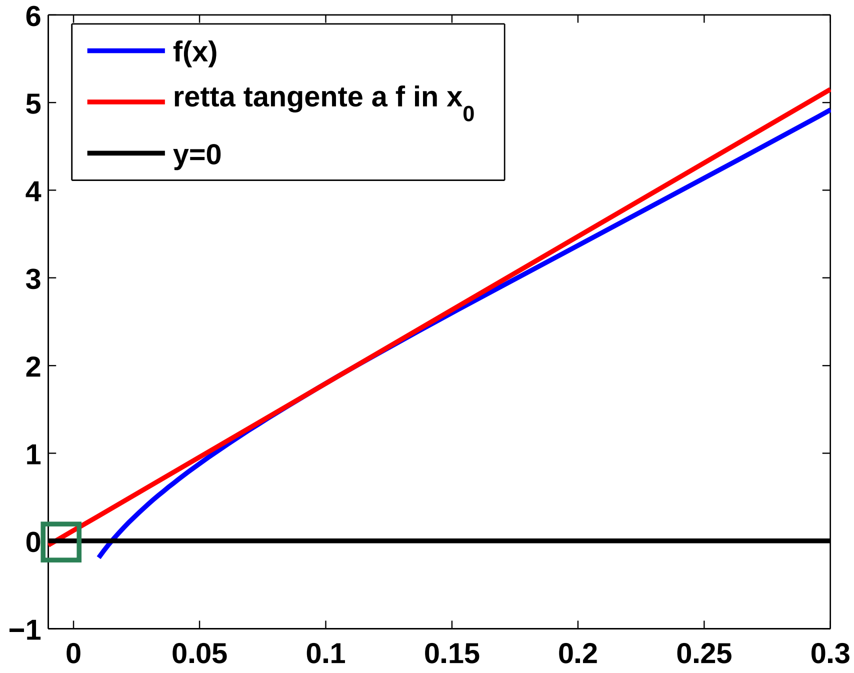
Poichè la soluzione positiva (cioè $x = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$) appartiene all'intervallo I, la convergenza del metodo non è garantita per qualsiasi scelta del punto iniziale x_0.

In questo caso, può accadere che nella successione delle approssimazioni prodotte siano compresi punti che non appartengono all'intervallo I, come, per esempio, scegliendo $x_0 = 0.38$ e $\alpha = 8$.

k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	0.008062568849982	0.371937431150018	0.275850501413549

La tangente alla funzione f nel punto x_0 interseca l'asse delle ascisse nel punto $x_1 = 0.008062568849982 \notin I$

Inoltre, per alcune scelte di α e x_0, come per esempio $\alpha = 8$ e $x_0 = 0.1$, il punto di intersezione può non appartenere al dominio di esistenza della funzione stessa!!! $x_1 = -0.007 < 0$



In questi casi è necessario cambiare la scelta del punto iniziale. Per esempio, si può calcolare l'approssimazione prodotta dal metodo di bisezione dopo poche iterazioni (o quando si raggiunge una certa precisione) e usarla come punto iniziale per il metodo di Newton.

Per esempio, dopo quattro iterazioni del metodo di bisezione ($\epsilon = 0.5 \cdot 10^{-1}$)

k	a_k	b_k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	0.01	0.505000	0.2575000	0.2475000	4.251815163314802
2	0.01	0.257500	0.1337500	0.1237500	2.344442774424002
3	0.01	0.133750	0.0718750	0.0618750	1.304590841882905
4	0.01	0.071875	**0.0409375**	0.0309375	0.686279560806184

si ottiene $x_4 = 0.0409375$ che, usato come punto iniziale nel metodo di Newton produce

k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	0.010137854601102	0.030799645398898	0.186297162576147
2	0.014687723854149	0.004549869253046	0.016111161677858
3	0.015155019259722	0.000467295405573	0.000115181238480
4	0.015158408093962	0.000003388834240	0.000000005864268
5	0.015158408266516	0.000000000172555	0.000000000000000
6	0.015158408266517	0.000000000000000	0.000000000000000

Al contrario, per altre scelte sia di α che del punto iniziale x_0, come per esempio $x_0 = 0.5$ e $\alpha = 1$, il metodo converge alla soluzione in poche iterazioni

k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	0.428881942480353	0.071118057519647	0.005610829411438
2	0.426305773395493	0.002576169084861	0.000006567282834
3	0.426302751011004	0.000003022384489	0.000000000008998
4	0.426302751006863	0.000000000004141	0.000000000000000
5	0.426302751006863	0.000000000000000	0.000000000000000

Osserviamo, infine, che scegliendo

$$\alpha = \frac{1}{e^{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}},$$

la radice di f è il suo punto di flesso (la derivata seconda si annulla in questo punto) e l'ordine di convergenza del metodo di Newton aumenta essendo almeno 3.

Esercizio

Data l'equazione non lineare

$$h(y;\xi) = (\xi - 1)\,\mathrm{e}^{\sqrt{y}} - 1 = 0\,,$$

dove ξ è un parametro reale.

1. Determinare i valori di ξ per cui l'equazione ha una radice nell'intervallo $I = [0.02, 1.02]$;

2. per i valori di ξ individuati al punto precedente, verificare se il metodo delle tangenti è adatto ad approssimare la radice in I. Specificare la scelta dell'approssimazione iniziale e l'ordine di convergenza del metodo.

Soluzione del punto 1)

La funzione è ben definita per $y \geq 0$.

Inoltre si osserva che, poichè

$$e^{\sqrt{y}} > 0 \quad \forall\, y \geq 0$$

l'uguaglinaza

$$(\xi - 1)\, e^{\sqrt{y}} = 1$$

non può essere mai verificata per valori di $\xi \leq 1$

Si osserva anche che, $e^{\sqrt{y}} \geq 1 \quad \forall\, y \geq 0$, e quindi l'uguaglianza

$(\xi - 1)\, e^{\sqrt{y}} = 1$ non è mai verificata per $\xi > 2$.

Infine, per $\xi = 2$, lo zero di $h(y; 2)$ è proprio $y = 0 \notin I$.

Sicuramente gli eventuali valori di ξ per cui la funzione h ammette uno zero in I soddisfano la seguente condizione

$$1 < \xi < 2$$

D'altra parte,

$$h'(x;\xi) = (\xi - 1)\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} > 0, \quad \forall y > 0 \quad \xi > 1,$$

quindi, $h(y;\xi)$ è una funzione monotona crescente per $\forall y > 0 \quad \xi > 1$, e se ammette uno zero in I, questo è anche unico.

Affinchè abbia uno zero nell'intervallo I, deve accadere

$$h(0.02;\xi) < 0 \qquad\qquad h(1.02;\xi) > 0$$

cioè

$$(\xi - 1)e^{\sqrt{0.02}} - 1 < 0 \qquad\qquad (\xi - 1)e^{\sqrt{1.02}} - 1 > 0$$

da cui

$$\xi < \frac{1}{e^{\sqrt{0.02}}} + 1 \approx 1.8681 \qquad\qquad \xi > \frac{1}{e^{\sqrt{1.02}}} + 1 \approx 1.3642.$$

Possiamo, dunque, concludere che per $\frac{1}{e^{\sqrt{1.02}}} + 1 < \xi < \frac{1}{e^{\sqrt{0.02}}} + 1$ la funzione $h(y;\xi)$ ammette un unico zero nell'intervallo $I = [0.02, 1.02]$.

Esercizio

Si consideri l'equazione non lineare $log(x) + x^2 - x = 0$.

1. Mostrare che l'equazione ammette un'unica radice e che quest'ultima è contenuta nell'intervallo $I = [0.7, 2.3]$.

2. Applicare, se possibile, due passi del metodo di bisezione.

3. Detta x_0 l'approssimazione prodotta al passo precedente, eseguire, se possibile, un passo dell'algoritmo del metodo di Newton-Raphson e sia x_1 l'approssimazione prodotta.

4. Applicare, se possibile il metodo delle secanti usando x_0 e x_1, determinate ai punti 2) e 3), come approssimazioni iniziali e interrompere l'esecuzione quando la approssimazione prodotta ha 5 decimali esatti.

5. Calcolare la costante asintotica di convergenza del metodo delle secanti.

Esercizi

1. Approssimare la radice negativa più prossima allo zero dell'equazione non lineare $sin(x) - xe^x = 0$ usando il metodo di Newton-Raphson e isolando lo zero in modo che si possa scegliere l'estremo di Fourier come approssimazione iniziale. L'approssimazione prodotta deve avere almeno due decimali esatti.

2. Scrivere il diagramma di flusso per il metodo di Newton usando le due condizioni di arresto a posteriori.

3. Ripertere l'esercizio precedente per il metodo delle secanti.

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: Cap. 3, §§3.6 (escluso metodo delle secanti con estremo fisso)

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli *Esercizi di Calcolo Numerico*: Es. 1.1, 1.4, 1.5, 1.8, 1.9, 1.10, 1.13, 1.14, 1.21, 7.29, 7.43, 7.54-7.55, 7.61-7.62