Analisi Numerica

(A.A. 2014-2015)

Appunti delle lezioni: Equazioni non lineari

Docente Vittoria Bruni

Email: vittoria.bruni@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,
Pal. B, I piano, Stanza n. 16
Tel. 06 49766648

Ricevimento: Martedì 9.30-10.30

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sul sito

http://www.sbai.uniroma1.it/users/bruni.vittoria

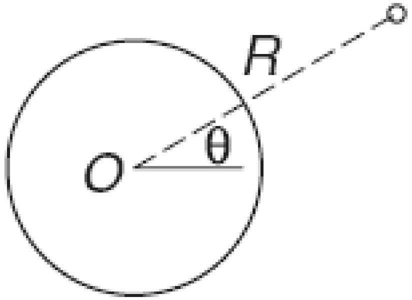
nella pagina dedicata al corso Analisi Numerica

Equazioni non lineari

Problema 1

La traiettoria di un satellite che orbita intorno alla terra è data dalla seguente equazione

$$R(\theta) = \frac{C}{1 + esin(\theta + \alpha)}$$



dove (R, θ) sono le coordinate polari del satellite, C, e ed α sono tre costanti (e è nota come eccentricità dell'orbita).

Sapendo che il satellite è stato osservato nelle seguenti tre posizioni

θ	-30^o	0^o	30^o
$R(km)$	6870	6728	6615

si vuole determinare la distanza minima del satellite dalla terra e l'angolo corrispondente.

Si verifica facilmente che il valore minimo di R è $\frac{C}{1+e}$ e si realizza in corrispondenza dell'angolo $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Per poter determinare il valore minimo di R e l'angolo θ è quindi necessario determinare il valore delle tre costanti C, e, α usando le tre posizioni del satellite note, cioè

$$\begin{cases} \frac{C}{1+esin(\alpha-30)} = 6870 \\ \frac{C}{1+esin(\alpha)} = 6728 \\ \frac{C}{1+esin(\alpha+30)} = 6615 \end{cases}$$

che risulta essere un **sistema di equazioni non lineari** nelle tre incognite C, e ed α. Infatti, risulta

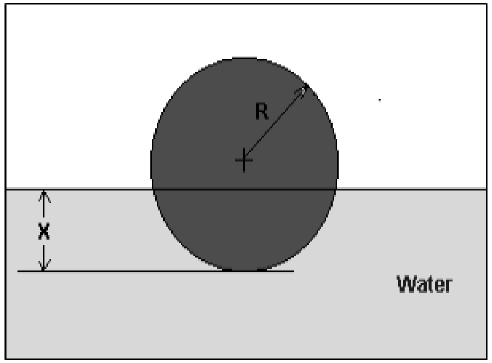
$$\frac{dR}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow -\frac{ecos(\theta+\alpha)}{(1+esin(\theta+\alpha))^2} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

per $sin(\theta+\alpha) \neq -\frac{1}{e}$. Da cui $R(\frac{\pi}{2}) = \frac{C}{1+e}$.

Problema 2

Un altro esempio:

Si vuole determinare la parte sommersa di una boa sferica di raggio $R = 0.055\text{m}$ e densità $\rho_B = 0.6 \text{ Kg/m}^3$



Indicando con F_p la spinta idrostatica, con M_B la massa della boa sferica, g l'accelerazione di gravità e $\rho_w = 1$ la densità dell'acqua, si ha

$$M_B g = F_p$$

e quindi

$$4/3\, \pi\, R^3\, \rho_B = \pi x^2 (R - x/3)\, \rho_w g$$

da cui

$$x^3 - 3x^2 R + 4\, R^3\, \rho_B = 0$$

per calcolare il valore di x è necessario risolvere un'equazione non lineare

L'equazione da risolvere è la seguente

$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \cdot 10^{-4} = 0.$$

Problema 3

La **crescita di una popolazione** può essere modellata, su un periodo di tempo piccolo, assumendo che la popolazione abbia un tasso di crescita proporzionale al numero di individui presenti in ciascun istante. Se $N(t)$ indica il numero di individui al tempo t e λ è il fattore di crescita della popolazione, allora $N(t)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t),$$

la cui soluzione è $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$, dove N_0 indica la popolazione all'istante di tempo iniziale, cioè $N_0 = N(t_0)$.

Questo modello è valido solo quando la popolazione è isolata e non c'è immigrazione dall'esterno. Se si suppone che ci sia una immigrazione a un tasso costante ν, il modello differenziale diventa

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + \nu$$

la cui soluzione è $N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$.

Supponendo che la popolazione iniziale sia di un milione di individui, che la comunità cresca di 435˙000 immigrati il primo anno e che 1˙564˙000 individui siano presenti alla fine del primo anno, determinare il tasso di crescita λ della popolazione.

E' necessario risolvere l'**equazione non lineare**

$$N|_{t=1\,\text{anno}} = N_0 e^{\lambda} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

nell'incognita λ, con $N|_{t=1\,\text{anno}} = 1^{\cdot}564^{\cdot}000$, $N_0 = 1^{\cdot}000^{\cdot}000$, $\nu = 435^{\cdot}000$.

$$\Rightarrow \quad f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

Problema 4

Le frequenze naturali ω_i di una trave uniforme a sbalzo, di massa m e lunghezza L, sono legate agli zeri β_i della seguente funzione

$$f(\beta) = cosh(\beta)cos(\beta) + 1,$$

dove

$$\beta_i = (2\pi\omega_i)\frac{mL^3}{EI}$$

E rappresenta il modulo di elasticità mentre I è il momento di inerzia della sezione trasversale.

Determinare le due frequenze più basse di una trave di acciaio lunga $0.9m$ e avente una sezione trasversale rettangolare larga $25mm$ e alta $2.5mm$. La densità di massa della trave è $7850Kg/m^3$ e il modulo di elasticità è $200GPa$

Sistemi di equazioni non lineari

Un sistema di equazioni non lineari può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

La **soluzione** del sistema è il vettore $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]^T$ le cui componenti **annullano simultaneamente** le n equazioni del sistema.

Supporremo che le funzioni $f_i : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, i = 1, \ldots, n,$ siano almeno **continue** in D

Oss: Nel **Problema 1**, $n = 3$ e $[x_1, x_2, x_3]^T = [C, e, \alpha]^T$.

Nei **Problemi 2,3, 4**, $n = 1$ e si ha rispettivamente $[x_1]^T = [x]^T$, $[x_1]^T = [\lambda]^T$ e $[x_1]^T = [\beta]^T$.

Caso $n = 1$: equazioni non lineari

Un' **equazione non lineare** è un'equazione del tipo

$$f(x) = 0$$

Le **soluzioni** ξ dell'equazione, cioè quei valori tali che

$$f(\xi) = 0,$$

vengono chiamati **radici** dell'equazione non lineare o **zeri** della funzione f.

Ci limiteremo al caso di **radici reali**.

Separazione delle radici

Prima di utilizzare un metodo numerico bisogna sapere:

- **quante** sono le radici (reali);
- **dove** si trovano approssimativamente;
- se ci sono delle **simmetrie**.

Per rispondere a queste domande si può ricorrere alla **tabulazione** o al **grafico** della funzione f.

Problema 3: separazione grafica delle radici

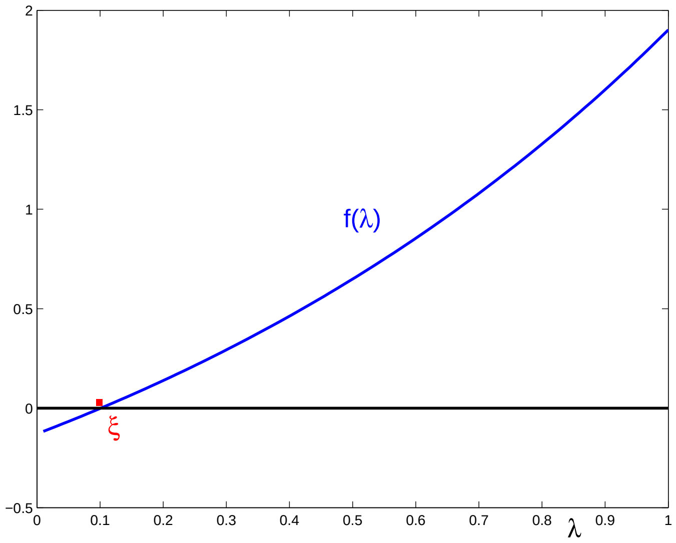
$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

Separazione grafica: si traccia il **grafico della funzione** e si individuano gli intervalli in cui la funzione **interseca l'asse delle ascisse.**

In questo caso, la funzione f risulta definita e continua in $\mathbf{R} - \{0\}$. Inoltre, da uno studio preliminare di f nel semiasse positivo, si ha

- $lim_{\lambda \to 0} f(\lambda) < 0$
- $lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = +\infty$
- $f'(\lambda) > 0$, cioè la funzione è **monotona crescente**

e quindi si può concludere che f ha un unico zero ξ nel semiasse positivo.



Osservando il grafico tracciato è possibile individuare un intorno di ξ; per esempio

Intervallo di separazione: $I = [a, b] = [0.05, 0.15]$

$$\Rightarrow f(a) = -0.0667, f(b) = 0.0672 \Rightarrow f(a)f(b) < 0$$

Problema 3: separazione delle radici - tabulazione

$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0$$

Si valuta la funzione in corrispondenza di valori equidistanti della variabile λ in un certo intervallo e si osserva il segno dei valori ottenuti:

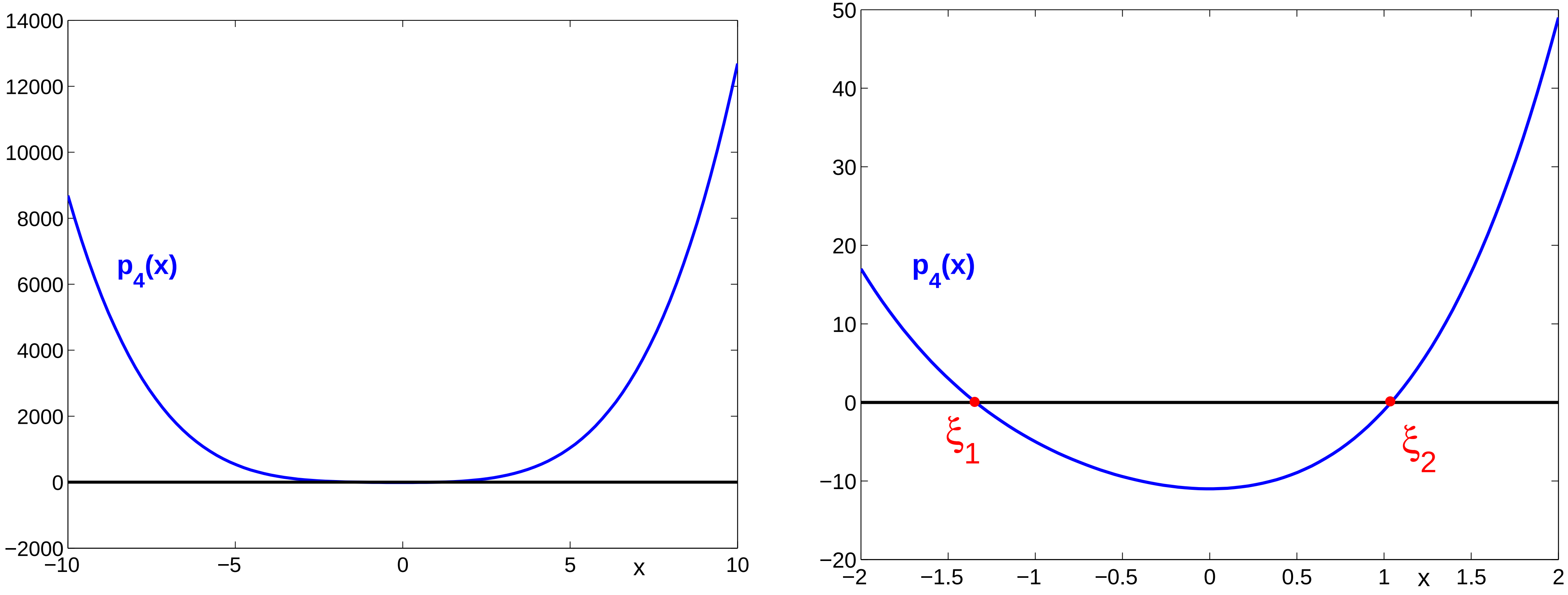
λ	$f(\lambda)$
0.10	-0.00133558829528
0.12	0.02567293855461
0.14	0.05319595959218
0.16	0.08124355150079
0.18	0.10982599066618
0.20	0.13895375715854

Intervallo di separazione: $I = [a, b] = [0.10, 0.12]$

$$\Rightarrow f(a) = -0.0013, f(b) = 0.0257 \Rightarrow f(a)f(b) < 0$$

Separazione delle radici: esempio 1

Equazioni polinomiali: $p_4(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 11 = 0$



Restringendo l'intervallo di osservazione si identificano meglio le due radici reali

Delle **4 radici** di $p_4(x)$ **due** sono **reali**, $\xi_1 \in [-1.5, -1]$ e $\xi_2 \in [0.75, 1.25]$, mentre **due** sono **complesse coniugate**.

Separazione delle radici: esempio 2

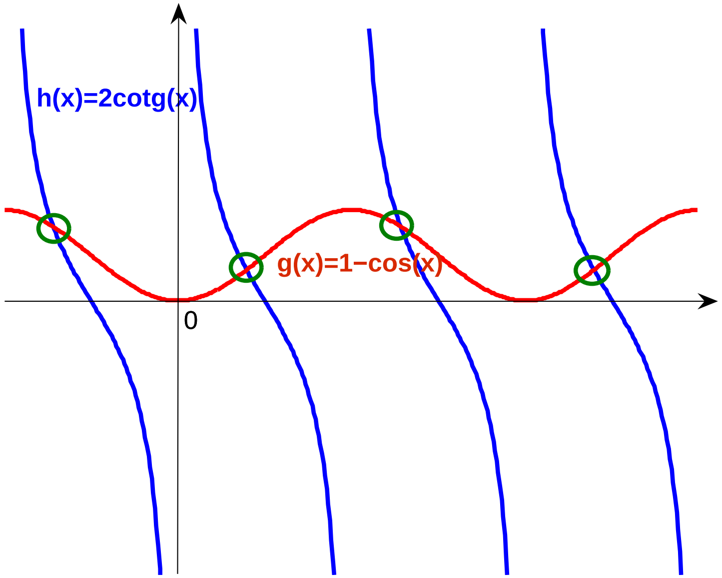
Equazione trascendente: $f(x) = tgx(1 - \cos x) - 2 = 0$

L'equazione $f(x) = 0$ si può riscrivere come $1 - cosx = 2cotgx.$

In questo modo è possibile risolvere il problema equivalente

$$h(x) = g(x)$$

corrispondente a determinare i punti di intersezione delle funzioni $h(x) = 2cotgx$ e $g(x) = 1 - cosx$



Esistono **infinite soluzioni**
$\xi_k \in (k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}), \quad k \in \mathbf{Z}$

Separazione delle radici: esempio 3

Equazione trascendente: $f(x) = \cos x \cosh x - 1 = 0$

La funzione $f(x)$ è **simmetrica** rispetto all'origine

$\Rightarrow$ se ξ è **radice** lo è anche $-\xi$

$\Rightarrow$ si considera il caso $x > 0$ ($\xi = 0$ è radice banale)

Nota $cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

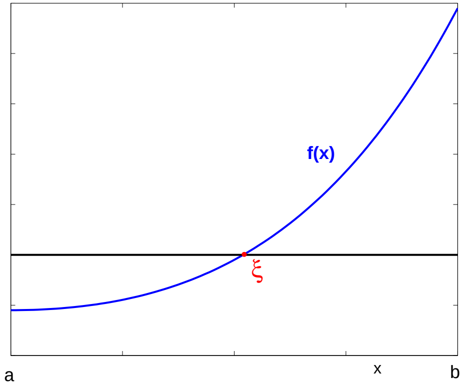
Metodo di bisezione (o metodo dicotomico)

Il **metodo di bisezione** è un metodo molto **semplice**:

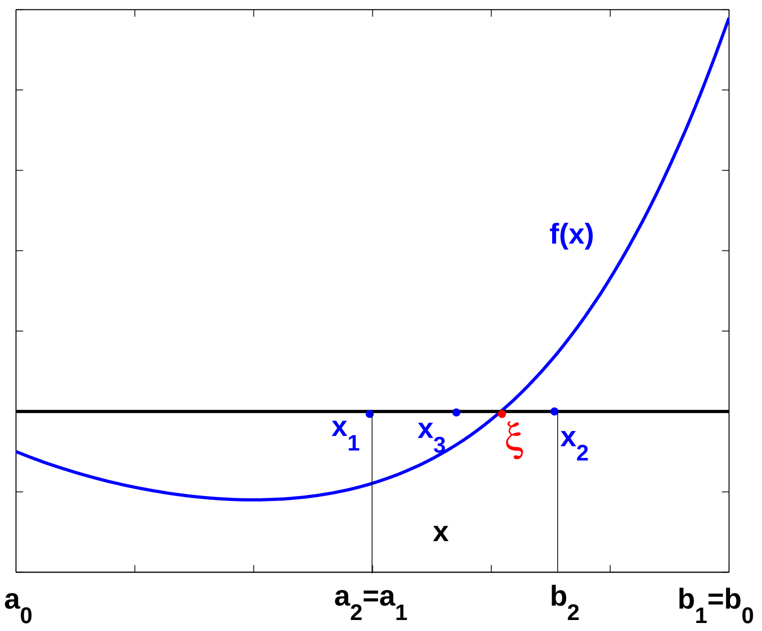
una volta individuato un intervallo di separazione in cui si trova **una sola** radice, permette di costruire una **successione** $\{x_k\}$ di **approssimazioni** di ξ.

Ipotesi di applicabilità :

- è stato **separato** un intervallo $I = [a, b]$ in cui c'è un'**unica radice** ξ;
- la funzione f è **continua** in I: $f \in C^0[a, b]$;
- $f(a)f(b) < 0$.



Metodo di bisezione: algoritmo



Si genera una **successione** di approssimazioni $\{x_k\}$ con $x_k \in [a_{k-1}, b_{k-1}]$ e $\xi \in [a_{k-1}, b_{k-1}]$.

Algoritmo:

```
$a_0 = a, \quad b_0 = b$
per $k = 1, 2, 3, \ldots$
    $x_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$          (punto medio di $[a_{k-1}, b_{k-1}]$)
    se $f(x_k) = 0$, allora stop
    se $f(a_{k-1})f(x_k) < 0$, allora $[a_k, b_k] = [a_{k-1}, x_k]$
    se $f(x_k)f(b_{k-1}) < 0$, allora $[a_k, b_k] = [x_k, b_{k-1}]$
```

Convergenza del metodo di bisezione

Errore di troncamento: $e_k = \xi - x_k$

è l'errore che si commette approssimando la radice ξ con il k-esimo elemento della successione costruita usando l'algoritmo descritto precedentemente.

Il procedimento iterativo converge alla radice ξ se la successione $\{x_k\}$ converge a ξ per $k \to +\infty$

Convergenza: $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} |e_k| = 0$

Per il **metodo di bisezione** si ha

Alla $k - esima$ iterazione $\xi \in [x_k, b_{k-1}]$ oppure $\xi \in [a_{k-1}, x_k]$.

Ne segue che $|e_k| < \frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}$.

Inoltre, considerando che l' ampiezza dell' intervallo $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ è pari alla metà dell'ampiezza dell'intervallo $[a_{k-2}, b_{k-2}]$ costruito all'iterazione precedente, si ha

$$|e_k| < \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = \cdots = \frac{b - a}{2^k}$$

e quindi

$$0 \leq \lim_{k \to \infty} |e_k| < \lim_{k \to \infty} \frac{b - a}{2^k} = 0$$

Ordine di convergenza

Sia $\{x_k\}$ una **successione di approssimazioni convergente** a ξ. La successione ha **ordine di convergenza** p e **fattore di convergenza** C, se esistono due reali $p \geq 1$ e $C > 0$ tali che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$$

Nota. La convergenza si dice **lineare** se $p = 1$,

quadratica se $p = 2$.

Metodo di bisezione: ordine di convergenza

Per $k \to \infty$ si ha $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^1} \simeq \frac{\frac{b-a}{2^k}}{\frac{b-a}{2^{k-1}}} = \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}.$

$\Rightarrow$ **Ordine di convergenza**: 1 (**lineare**)

Fattore di convergenza: $\frac{1}{2}$

La convergenza è **lenta**, in quanto ad ogni passo l'**errore** viene **dimezzato**, cioè ad ogni passo si guadagna una **cifra binaria**

$\Rightarrow$ poiché $2^{-4} < 10^{-1} < 2^{-3}$, per guadagnare una **cifra decimale** servono 3-4 **iterazioni**.

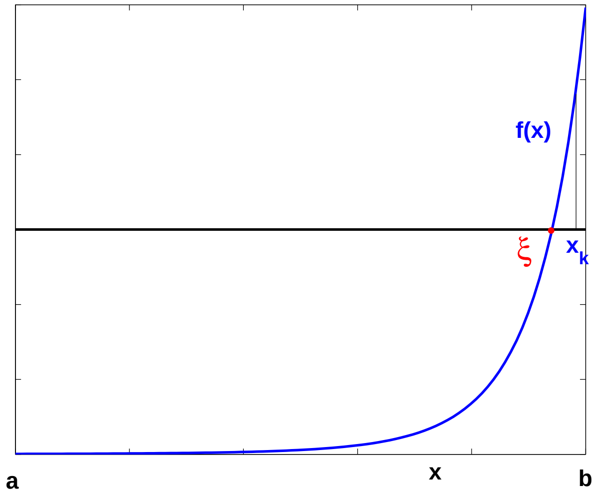
Metodo di bisezione: criteri di arresto

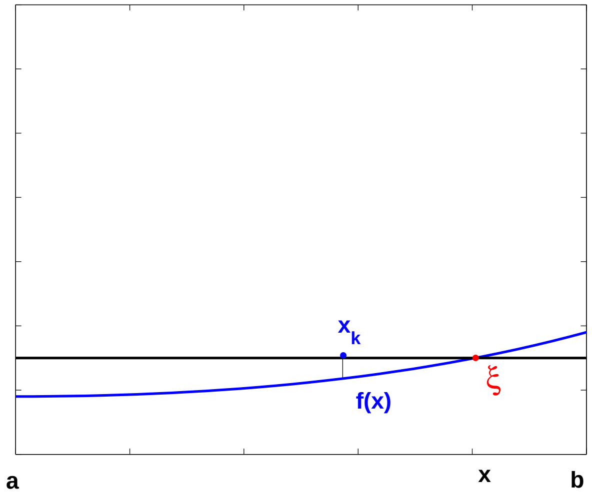
Nella pratica, a causa degli **errori di arrotondamento** e degli **errori di troncamento** non si verifica **mai** che $f(x_k) = 0$. Quando si arrestano le iterazioni?

Criteri di arresto a posteriori $\begin{cases} |e_k| \simeq |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \\ |f(x_k)| < \varepsilon \end{cases}$

Criteri di arresto a posteriori: esempi

$|e_k| \simeq |x_k - x_{k-1}| < \epsilon$ oppure $|f(x_k)| < \epsilon$





$f(x_k)$ è "*grande*" anche se x_k è "*vicino*" a ξ

$f(x_k)$ è "*piccolo*" anche se x_k è "*lontano*" da ξ

Criterio di arresto a priori:

Usando l'espressione dell'errore di troncamento, è possibile dare una **stima a priori** del numero di iterazioni K necessario per ottenere un **errore minore** di ε. Infatti, risulta

$$|e_k| < \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \quad \Rightarrow \qquad K > \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log 2}$$

Oss.: Poichè K deve essere un numero intero positivo, può essere posto uguale all'intero più grande e più vicino alla quantità a secondo membro dell'ultima disequazione.

Soluzione Problema 3

Si vuole usare il metodo di bisezione per calcolare la radice dell'equazione

$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0 \quad \text{in} \quad I = [a, b] = [0.05, 0.15]$$

k	a_{k-1}	b_{k-1}	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$	$\lvert f(x_k)\rvert$
1	0.05000000000000	0.15000000000000	0.10000000000000	10.00000000000000	10.00000000000000
2	0.10000000000000	0.15000000000000	0.12500000000000	0.02500000000000	0.03250506973938
3	0.10000000000000	0.12500000000000	0.11250000000000	0.01250000000000	0.01548498364220
4	0.10000000000000	0.11250000000000	0.10625000000000	0.00625000000000	0.00704990930651
5	0.10000000000000	0.10625000000000	0.10312500000000	0.00312500000000	0.00285098217571
6	0.10000000000000	0.10312500000000	0.10156250000000	0.00156250000000	0.00075615469668
7	0.10000000000000	0.10156250000000	0.10078125000000	0.00078125000000	0.00029010206821
8	0.10078125000000	0.10156250000000	0.10117187500000	0.00039062500000	0.00023292996053
9	0.10078125000000	0.10117187500000	0.10097656250000	0.00019531250000	0.00002861013771
10	0.10097656250000	0.10117187500000	0.10107421875000	0.00009765625000	0.00010215388987
11	0.10097656250000	0.10107421875000	0.10102539062500	0.00004882812500	0.00003677037077

Dalla tabella è possibile osservare che se si sceglie $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$ e si usa come criterio di arresto $|f(x_k)| < \varepsilon$, il procedimento iterativo si interrompe quando $k = 9$.

Scegliendo come criterio di arresto $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, il procedimento iterativo si arresta quando $k = 11$.

E' possibile osservare che per $k = 11$ è soddisfatta anche la condizione $|f(x_k)| < \varepsilon$.

Usando, invece, il criterio di arresto a priori, si ha

$$K > log_2(0.10) - log_2(0.5 \cdot 10^{-4}) \approx 10.9658$$

cioè $K \geq 11$,

Esercizio 1

La lunghezza d'onda di uno tsunami L, per una certa profondità dell'acqua d soddisfa la seguente **equazione non lineare**

$$L = \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

con a_g e T rispettivamente l'accelerazione di gravità e il periodo. Sapendo che $T = 2880s$ e $d = 4000m$ (valore tipico dell'Oceano Indiano), produrre una stima del valore di L con precisione almeno 10^{-5}.

Esercizio 1: Separazione delle radici

Utilizziamo il **metodo grafico** per stabilire quante sono le radici reali di $f(L)$, con $f(L) = L - \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$.

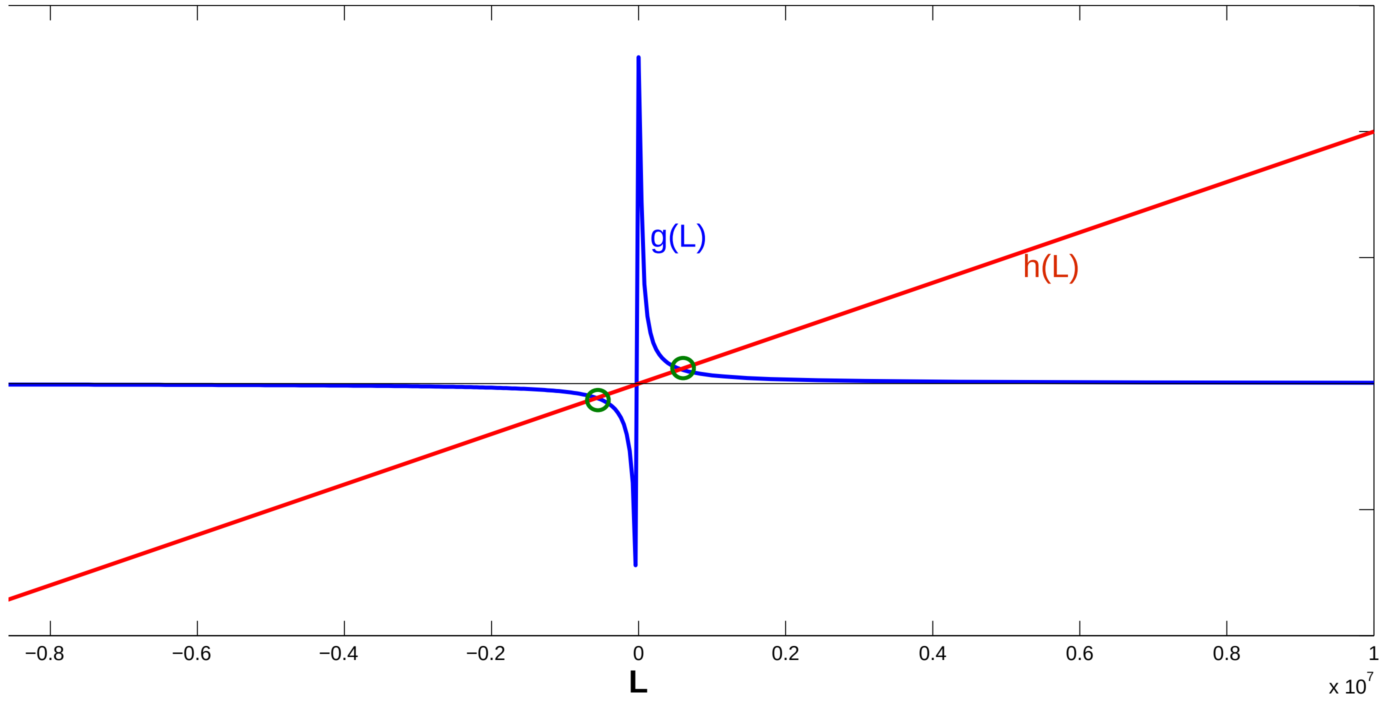
Poniamo

$$h(L) = L \qquad \text{e} \qquad g(L) = \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

e visualizziamo i punti di intersezione tra le due funzioni.

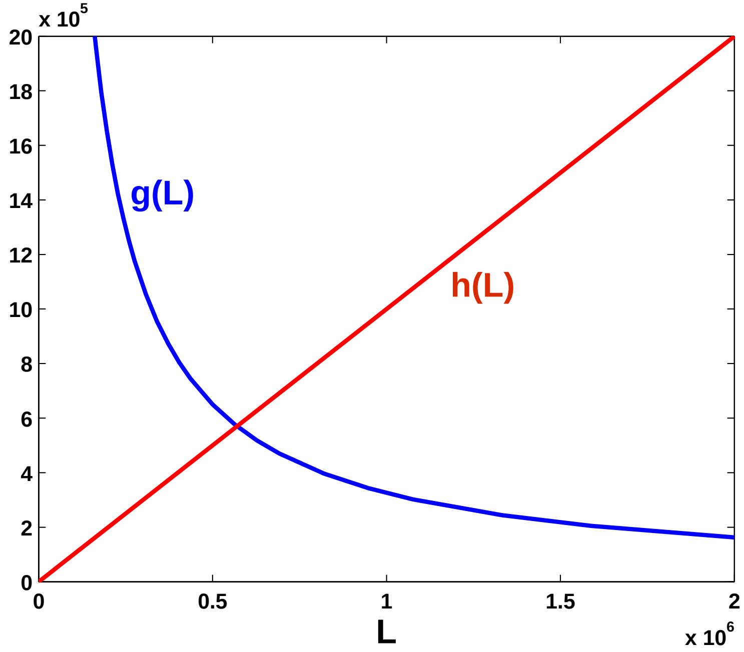
Nota $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Dal grafico si evince che le intersezioni sono due, una positiva e una negativa.



Poichè la lunghezza d'onda deve essere un numero positivo, si scarta la radice negativa.

Restringendo il grafico delle funzioni nell'intervallo $[0 \quad 2 \cdot 10^6]$, si osserva che la radice positiva è contenuta nell'intervallo $[.5{\cdot}10^6 \quad 1{\cdot}10^6]$ $([500,\ 1000]Km)$



Visualizzando le due funzioni per $L \in [0.5 \cdot 10^6, \quad 1 \cdot 10^6]$, si può ridurre ulteriormente l'intervallo in cui cercare la radice dell'equazione non lineare considerata, per esempio $[0.5 \cdot 10^6, \quad 0.6 \cdot 10^6]$

A questo punto è possibile selezionare un metodo numerico per il calcolo della radice di $f(L) = 0$ nell'intervallo $I = [0.5 \cdot 10^6, \quad 0.6 \cdot 10^6]$

Esercizio 1: Metodo di bisezione

Si verifica facilmente che la funzione $f(L) = L - \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$ è una funzione continua in tutto il dominio di definizione ed in particolare nell'intervallo $I = [a, b] = [0.5 \cdot 10^6, \quad 0.6 \cdot 10^6]$. Inoltre risulta

$$f(0.5 \cdot 10^6) = -150396.83597 \qquad \text{e} \qquad f(0.6 \cdot 10^6) = 57863.27995$$

(Oss. $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$)

da cui

$$f(a)f(b) < 0.$$

Quindi, sono soddisfatte le condizioni di applicabilità del metodo di bisezione

Si calcola il punto

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0.5 \cdot 10^6 + 0.6 \cdot 10^6}{2} = 0.55 \cdot 10^6$$

si valuta la funzione f nel punto x_1, cioè $f(x_1) = -41356.18896 < 0$

quindi, si definisce il nuovo intervallo

$$I_1 = [x_1, b] = [0.55 \cdot 10^6,\ 0.6 \cdot 10^6]$$

che contiene la radice positiva di f.

L'errore è

$$e_1 = |x_1 - x_0| = |x_1 - a| = 50000.$$

Si calcola il punto $x_2 = \frac{x_1+b}{2} = \frac{0.55\cdot10^6+0.6\cdot10^6}{2} = 0.575 \cdot 10^6$

si valuta la funzione f nel punto x_2, cioè $f(x_2) = 9321.48847 > 0$.

Il nuovo intervallo è $I_2 = [x_1, x_2] = [0.55 \cdot 10^6,\ 0.575 \cdot 10^6]$

mentre l'errore diventa

$$e_2 = |x_2 - x_1| = 25000.$$

Procedendo in questo modo si ha

$$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0.55\cdot 10^6+0.575\cdot 10^6}{2} = 0.5625 \cdot 10^6$$

$$f(x_3) = -15732.61210 < 0,$$

$$e_3 = |x_3 - x_2| = |0.5625 \cdot 10^6 - 0.575 \cdot 10^6| = 12500$$

e $$I_3 = [x_3, x_2] = [0.5625 \cdot 10^6,\ 0.575 \cdot 10^6]$$

$$x_4 = \frac{x_3 + x_2}{2} = \frac{0.5625 \cdot 10^6 + 0.575 \cdot 10^6}{2} = 0.56875 \cdot 10^6$$

$$f(x_4) = -3136.71786 < 0,$$

$$e_4 = |x_4 - x_3| = |0.56875 \cdot 10^6 - 0.5625 \cdot 10^6| = 6250$$

e $$I_4 = [x_4, x_2]$$

e così via.

Si osserva che l'errore e_k si dimezza ad ogni iterazione, cioè $\frac{e_{k+1}}{e_k} = \frac{1}{2}$.

Quindi, richiedendo un errore almeno pari a

$$\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5},$$

sono necessarie K iterazioni con

$$K > \frac{log(b-a) - log(\varepsilon)}{log(2)} = \frac{log(0.1 \cdot 10^{6}) - log(0.5 \cdot 10^{-5})}{log(2)} \approx 34.2193$$

affinchè il metodo converga alla soluzione con la precisione fissata.

k	estremo inferiore	estremo superiore	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	550000.00000000000	600000.00000000000	575000.00000000000	$25 \cdot 10^3$	9321.48847
2	550000.00000000000	575000.00000000000	562500.00000000000	$12.5 \cdot 10^3$	15732.61210
3	562500.00000000000	575000.00000000000	568750.00000000000	$6.250 \cdot 10^3$	3136.71786
4	568750.00000000000	575000.00000000000	571875.00000000000	$3.125 \cdot 10^3$	3109.31488
5	568750.00000000000	571875.00000000000	570312.50000000000	$1.5625 \cdot 10^3$	9.43440
6	570312.50000000000	571875.00000000000	571093.75000000000	$7.8125 \cdot 10^2$	1551.00265
7	570312.50000000000	571093.75000000000	570703.12500000000	$3.9062 \cdot 10^2$	771.05027
8	570312.50000000000	570703.12500000000	570507.81250000000	$19.5312 \cdot 10^1$	380.87454
9	570312.50000000000	570507.81250000000	570410.15625000000	97.6562	185.73673
10	570312.50000000000	570410.15625000000	570361.32812500000	48.8281	88.15533
11	570312.50000000000	570361.32812500000	570336.91406250000	24.4141	39.36151
12	570312.50000000000	570336.91406250000	570324.70703125000	12.2070	14.96382
13	570312.50000000000	570324.70703125000	570318.60351562500	6.1035	2.76477
14	570312.50000000000	570318.60351562500	570315.55175781250	3.0518	3.33480
15	570315.55175781250	570318.60351562500	570317.07763671875	1.5259	0.28501
16	570317.07763671875	570318.60351562500	570317.84057617187	$7.6 \cdot 10^{-1}$	1.23988
17	570317.07763671875	570317.84057617187	570317.45910644531	$3.8 \cdot 10^{-1}$	0.47744
18	570317.07763671875	570317.45910644531	570317.26837158203	$1.9 \cdot 10^{-1}$	0.09622
19	570317.07763671875	570317.26837158203	570317.17300415039	$9.5 \cdot 10^{-2}$	0.09439
20	570317.17300415039	570317.26837158203	570317.22068786621	$4.8 \cdot 10^{-2}$	0.00091
21	570317.17300415039	570317.22068786621	570317.19684600830	$2.3 \cdot 10^{-2}$	0.04674
22	570317.19684600830	570317.22068786621	570317.20876693726	$1.192 \cdot 10^{-2}$	0.02292
23	570317.20876693726	570317.22068786621	570317.21472740173	$6 \cdot 10^{-3}$	0.01100
24	570317.21472740173	570317.22068786621	570317.21770763397	$3 \cdot 10^{-3}$	0.00505
25	570317.21770763397	570317.22068786621	570317.21919775009	$1.5 \cdot 10^{-3}$	0.00207
26	570317.21919775009	570317.22068786621	570317.21994280815	$7.4 \cdot 10^{-4}$	0.00059
27	570317.21994280815	570317.22068786621	570317.22031533718	$3.7 \cdot 10^{-4}$	0.00017
28	570317.21994280815	570317.22031533718	570317.22012907267	$1.8 \cdot 10^{-4}$	0.00021
29	570317.22012907267	570317.22031533718	570317.22022220492	$9.3 \cdot 10^{-5}$	0.00002
30	570317.22022220492	570317.22031533718	570317.22026877105	$4.7 \cdot 10^{-5}$	0.00007
31	570317.22022220492	570317.22026877105	570317.22024548799	$2.3 \cdot 10^{-5}$	0.00003
32	570317.22022220492	570317.22024548799	570317.22023384646	$1.2 \cdot 10^{-5}$	0.000003
33	570317.22022220492	570317.22023384646	570317.22022802569	$0.6 \cdot 10^{-5}$	0.000009
34	570317.22022802569	570317.22023384646	570317.22023093607	$0.3 \cdot 10^{-5}$	0.000003

Se come criterio di arresto avessimo usato solo

$$|f(x_k)| \leq \epsilon,$$

la soluzione prodotta sarebbe quella corrispondente a $k = 32$ nella tabella precedente.

Infine, si osserva che il metodo di bisezione non converge in modo monotono.

Esercizio 2

Esempio 3.2.1 (*Libro*) Stabilire quante radici ammette l'equazione

$$f(x) = log(x+1) + \sqrt{x+2} - 1 = 0.$$

La funzione è definita e continua nell'intervallo $(-1, +\infty)$.

Inoltre, poichè $f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$, la funzione è monotona nel suo dominio di definizione e quindi ha un unico zero in $(-1, +\infty)$.

Infine, si osserva che $\forall\, x \geq 0 \quad f(x) > 0$, quindi lo zero di f sicuramente appartiene all'intervallo $(-1, 0]$.

Scegliendo come **Intervallo di separazione:** $I = [a, b] = [-1/2, 0]$ e applicando il **metodo di bisezione** si ha

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{-1/2}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a_0) \cong -0.468 \\ f(b_0) \cong +0.414 \\ f(x_1) \cong +0.035 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = a_0 \\ b_1 = x_1 \end{array}$$

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{-1/2 - 1/4}{2} \cong -\frac{3}{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a_1) \cong -0.468 \\ f(b_1) \cong +0.035 \\ f(x_2) \cong -1.268 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_2 = x_2 \\ b_2 = b_1 \end{array}$$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{f(x_k)}$	$\lvert\xi - \mathbf{x_k}\rvert$
1	-0.2500000	0.0351936	0.0203336
2	-0.3750000	-0.1952488	0.1046664
3	-0.3125000	-0.0756553	0.0421664
4	-0.2812500	-0.0192306	0.0109164
5	-0.2656250	0.0082212	0.0047086
6	-0.2734375	-0.0054435	0.0031039
7	-0.2695313	0.0014040	0.0008023
8	-0.2714844	-0.0020160	0.0011508
9	-0.2705078	-0.0003050	0.0001742

Dopo 9 iterazioni, l'approssimazione prodotta produce un errore dell'ordine di 10^{-3}

Il numero di iterazioni K necessarie affinchè la soluzione prodotta sicuramente abbia una certa precisione ε può essere stimato prima di eseguire le iterazioni nel modo seguente:

$$K \geq log_2(b-a) - log_2(\varepsilon)$$

con $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$ da cui

$$K > log_2(0.5) - log_2(0.5 \cdot 10^{-3}) \approx 9.9658$$

cioè $K \geq 10$.

Il valore di K stimato assicura che l'errore tra due approssimazioni successive sia inferiore alla tolleranza fissata. Ovviamente, poichè K deriva da una stima superiore dell'errore di troncamento, può accadere che il metodo raggiunga la precisione richiesta con un numero di iterazioni inferiore al valore K stimato usando la stima a priori.

Esercizio 3

Si consideri

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 5.$$

- Verificare che uno degli zeri di $f(x)$ è contenuto nell'intervallo $I = [a, b] = [0.6, 0.8]$.

- Indicando con ξ lo zero isolato al punto precedente, dare una stima del numero di iterazioni necessarie per avere una approssimazione di ξ con almeno quattro decimali esatti usando il metodo di bisezione.

- Verificare che $\xi \approx 0.7346$.

Soluzione

$f(x)$ è una funzione continua in $\mathbf{R}$.

Si verifica facilmente che $f(0.6) \approx 1.616 > 0$ e $f(0.8) \approx -0.888 < 0$; inoltre $f'(x) = 3x^2 - 20x = x(3x-20) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq \frac{20}{3} > 6$, quindi $f(x)$ è sicuramente monotona decrescente in $I = [0.6, 0.8]$.

Ne segue che esiste una sola radice di f in I.

Per stimare il numero di iterazioni necessarie K si usa il criterio di arresto a priori, cioè

$$K > log_2(b-a) - log_2(\epsilon)$$

In questo caso: $a = 0.6, b = 0.8, \epsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$ e quindi

$$K > log_2(0.2) - log_2(0.5 \cdot 10^{-4}) = log_2\left(\frac{2}{10}\frac{10}{5}10^4\right) \approx 11.9658$$

ovvero $K \geq 12$

Applicando l'algoritmo di bisezione si ha

k	a_{k-1}	b_{k-1}	x_k	$x_k - x_{k-1}$	$f(x_k)$
1	0.6000000000	0.80000000000	0.700000000000	0.100000000000000	0.443000000000001
2	0.7000000000	0.80000000000	0.750000000000	0.050000000000000	0.203125000000000
3	0.7000000000	0.75000000000	0.725000000000	0.025000000000000	0.124828125000001
4	0.7250000000	0.75000000000	0.737500000000	0.012500000000000	0.037931640625001
5	0.7250000000	0.73750000000	0.731250000000	0.006250000000000	0.043753173828126
6	0.7312500000	0.73750000000	0.734375000000	0.003125000000000	0.002986907958984
7	0.7343750000	0.73750000000	0.735937500000	0.001562500000000	0.017453342437745
8	0.7343750000	0.73593750000	0.735156250000	0.000781250000000	0.007228459835052
9	0.7343750000	0.73515625000	0.734765625000	0.000390625000000	0.002119586408138
10	0.7343750000	0.73476562500	0.734570312500	0.000195312500000	0.000433958180248
11	0.7345703125	0.73476562500	0.734667968750	0.000097656250000	0.000842739765532
12	0.7345703125	0.73466796875	0.734619140625	0.000048828125000	0.000204372205189

Esercizio 4

Si consideri

$$f(x;\lambda) = e^{-x} - 2x - \lambda,$$

con $\lambda \in \mathbf{R}$.

- Determinare per quali valori del paramtero λ la funzione $f(x)$ ammette un unico zero nell'intervallo $[0,1]$.

- Posto $\lambda = -1$, dare una stima del numero di iterazioni necessarie per avere un' approssimazione dello zero ξ con almeno tre decimali esatti usando il metodo di bisezione.

Esercizio 5

La velocità v del razzo Saturno V in volo verticale vicino la superficie terrestre può essere approssimata come segue

$$v(t) = u log \frac{M_0}{M_0 - mt} - gt$$

con $u = 2510 m/s$ velocità del razzo al momento del lancio

$M_0 = 2.8 \cdot 10^6 Kg$ massa del razzo al momento del lancio

$m = 13.3 \cdot 10^3 Kg/s$ tasso di consumo di carburante

$g = 9.81 m/s$ accelerazione di gravità

t tempo trascorso dal lancio.

Determinare l'istante di tempo in cui il razzo raggiunge la velocità del suono ($\approx 335 m/s$) con precisione al millesimo di secondo.

Esercizio 6

- Scrivere lo pseudocodice dell’algoritmo di bisezione con criterio stima a priori

- Scrivere lo pseudocodice dell’algoritmo di bisezione con criterio stima a posteriori

Metodi di linearizzazione

Metodo babilonese o Metodo di Erone: fornisce un algoritmo iterativo (formulato già intorno al 1700 a.C.) per il calcolo della radice quadrata di un numero a:

1. scegliere un numero x_0 prossimo a $\sqrt{a}$
2. dividere a per x_0
3. calcolare la media tra a e x_0, cioè $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$
4. ripetere i passi 2 e 3 dopo aver posto $x_0 = x_1$

L'algoritmo si può schematizzare come segue

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), & n \geq 1 \end{cases}$$

Esempio

Si vuole calcolare $\sqrt{2} = 1.41421356237310$ usando il Metodo babilonese

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), & n \geq 1 \end{cases}$$

In questo caso $a = 2$ e si sceglie $x_0 = 1.5$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = \frac{17}{12} = 1.41666667$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1.41666667 + \frac{2}{1.41666667}\right) = 1.41421569$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(1.41421569 + \frac{2}{1.41421569}\right) = 1.41421356$$

Esercizio

E' possibile scrivere un algoritmo per il calcolo del reciproco di un numero c senza eseguire divisioni?

Metodi di linearizzazione

Si approssima la funzione $f(x)$ in un intorno I di ξ con la sua **tangente** o con la sua **secante**, calcolate tramite un opportuno **sviluppo in serie di Taylor**.

- **Metodo di Newton-Raphson o metodo delle tangenti**

- **Metodo delle secanti**

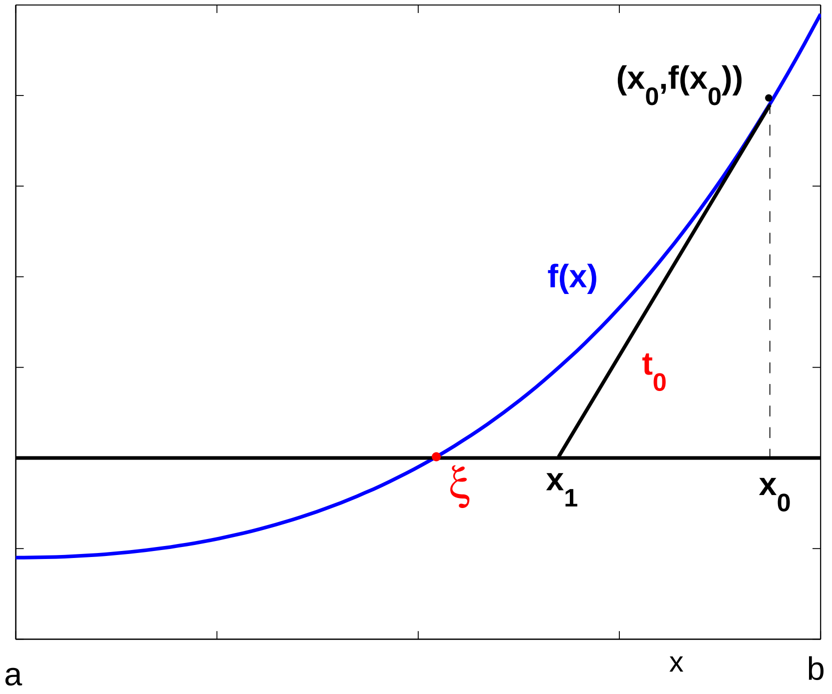
Metodo di Newton-Raphson

Approssimazione iniziale: x_0

Prima iterazione:

t_0 è la **retta tangente** a $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$:

$t_0 \rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



Nuova approssimazione x_1**:**

intersezione tra t_0 e $y = 0$

$$\Rightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \;\; \rightarrow \;\; \boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

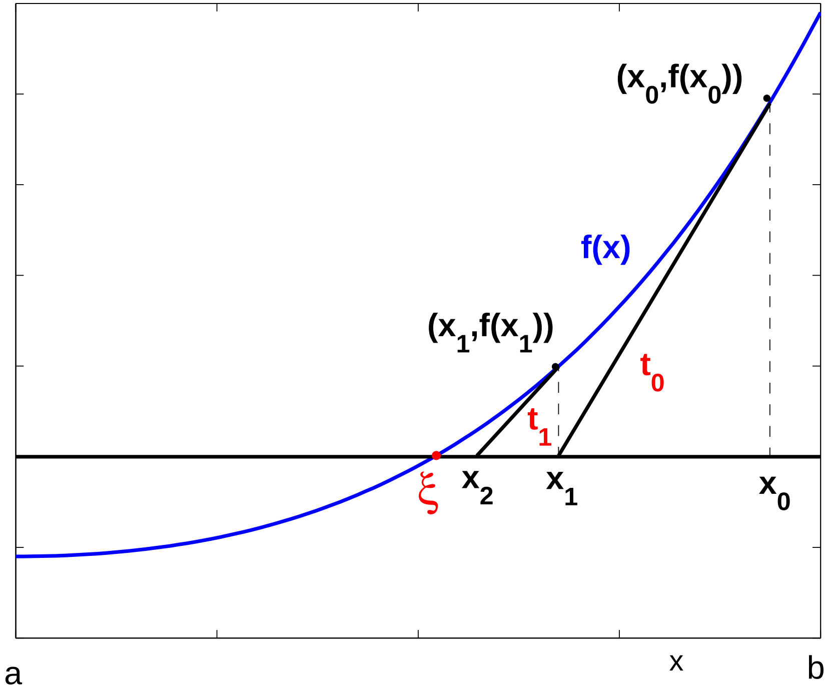
Metodo di Newton-Raphson

Nuova approssimazione: x_1

Seconda iterazione:

t_1 è la **retta tangente** a $f(x)$ nel punto $(x_1, f(x_1))$:

$$t_1 \rightarrow y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

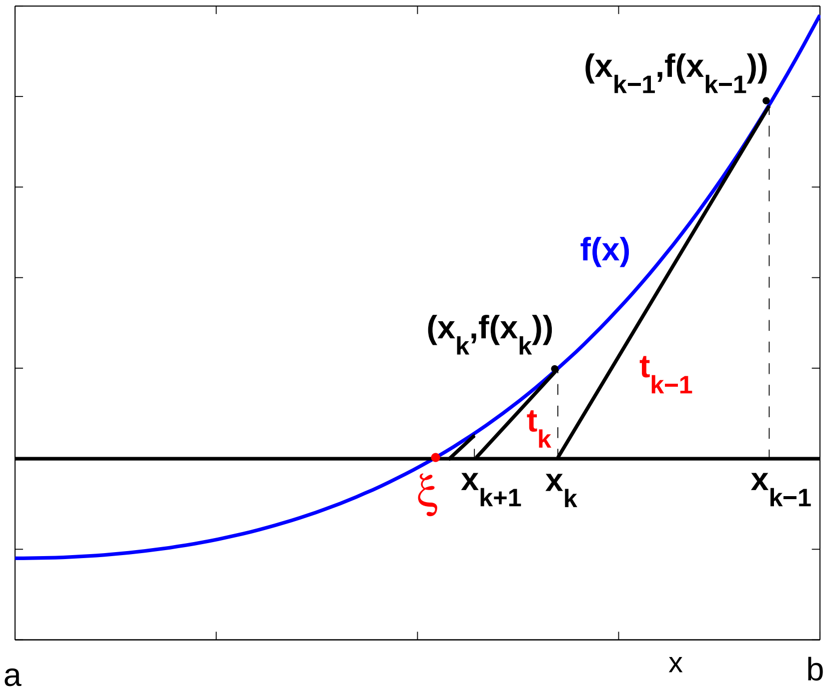


Nuova approssimazione x_2:

intersezione tra t_1 e $y = 0$,

$$\Rightarrow f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$$

Metodo di Newton-Raphson: algoritmo



Ad ogni **iterazione** $k = 1, 2, \ldots$ la **nuova approssimazione** x_k è data dall'**intersezione** tra la **retta** t_{k-1}, **tangente** a $f(x)$ nel punto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, e la retta $y = 0$; cioè

$$t_{k-1} \rightarrow y = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x - x_{k-1})$$

e quindi $$f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(\underset{\downarrow}{x_k} - x_{k-1}) = 0$$

Algoritmo:

$$\boxed{\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}}$$

Metodo di Newton-Raphson: algoritmo

Il calcolo della radice di un numero a è equivalente a trovare gli zeri della seguente funzione

$$f(x) = x^2 - a$$

Se vogliamo calcolare la radice di a mediante il metodo di Newton-Raphson, dobbiamo usare il seguente algoritmo

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{(x_{k-1}^2 - a)}{2x_{k-1}}, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = \frac{1}{2}\left(x_{k-1} + \dfrac{a}{x_{k-1}}\right), & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

che è proprio l'algoritmo corrispondente al metodo babilonese

Metodo di Newton-Raphson: algoritmo

Il calcolo del reciproco di un numero c è equivalente a trovare gli zeri della seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} - c$$

Se vogliamo calcolare il reciproco di c mediante il metodo di Newton-Raphson, dobbiamo usare il seguente algoritmo

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \frac{\frac{1}{x_{k-1}} - c}{-\frac{1}{x_{k-1}^2}}, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_k = x_{k-1}(2 - c x_{k-1}), & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

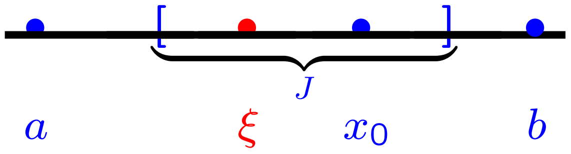
Metodo di Newton-Raphson: convergenza

$$\begin{cases} x_0 \quad \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ipotesi di applicabilità :

- è stato **separato** un intervallo $I = [a, b]$ in cui c'è un'**unica radice** ξ;
- f, f', f'' sono **continue** in I: $f \in C^2[a, b]$;
- $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a, b]$

$\Rightarrow$ esiste un **intorno** $J \subseteq I$ di ξ tale che, se $x_0 \in J$, la **successione delle approssimazioni** $\{x_k\}$ **converge** a ξ.



Oss: il teorema garantisce solo l'esistenza di J

Metodo di Newton-Raphson: ordine di convergenza

Si vuole determinare l'ordine di convergenza del metodo di Newton-Raphson

Ordine di convergenza p: $\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$

L'errore di troncamento alla *k+1-esima* iterazione si può scrivere come segue

$$e_{k+1} = \xi - x_{k+1} = \left(\xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}\right) - \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right) = (\xi - x_k) - \left(\frac{f(\xi)}{f'(\xi)} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)$$

Il valore di $f(x_k)$ si può stimare considernado i primi tre termini dello **sviluppo in serie di Taylor** attorno alla radice ξ, cioè

$$f(x_k) = f(\xi) + f'(\xi)\underbrace{(x_k - \xi)}_{-e_k} + \frac{1}{2}f''(\xi)(x_k - \xi)^2 + \ldots$$

mentre, supponendo che x_k sia molto vicino a ξ, si può assumere che $f'(x_k) \simeq f'(\xi)$

Sostituendo i valori di $f(x_k)$ e $f'(x_k)$ così ottenuti nell'espressione di e_{k+1} si ha

$$|e_{k+1}| \simeq \left| e_k - \frac{f(\xi) - f(\xi) + f'(\xi)e_k - \frac{1}{2}f''(\xi)e_k^2}{f'(\xi)} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)e_k^2}{f'(\xi)} \right|$$

da cui risulta

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} \quad = \quad \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right| \qquad \Rightarrow \boxed{p \geq 2}$$

e quindi, se $f(x) \in C^3[a,b]$ la convergenza è almeno **quadratica**

Efficienza computazionale

Per valutare l'**efficienza** di un metodo iterativo bisogna tener conto sia dell'**ordine di convergenza** che del **costo computazionale**, cioè della quantità di calcoli richiesta ad ogni passo.

Efficienza computazionale: $E = p^{1/r}$

p: **ordine** di convergenza del metodo

r: numero di **valutazioni funzionali** (calcolo di funzioni o derivate) richieste ad ogni passo

Metodo di bisezione: $E = 1$

(ad ogni passo si richiede una sola valutazione funzionale, $f(x_k)$, e quindi $r = 1$)

Metodo di Newton: $E = 2^{1/2}$

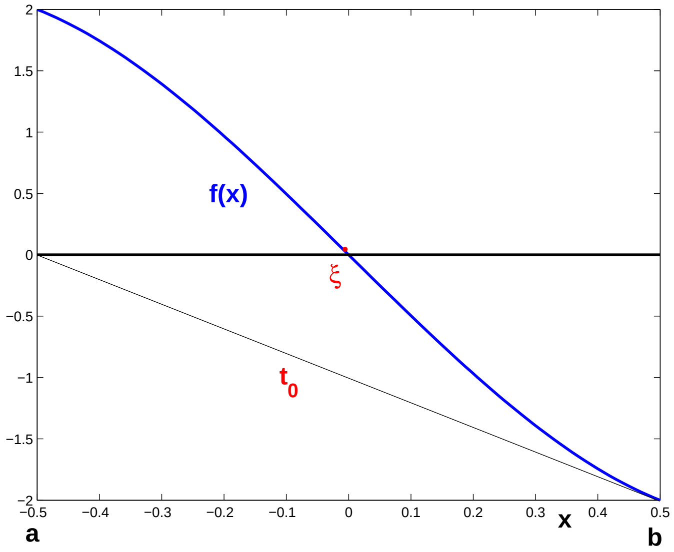
(ad ogni passo si richiedono due valutazioni funzionali, $f(x_k)$ e $f'(x_k)$, e quindi $r = 2$)

Metodo di Newton-Raphson: esempio

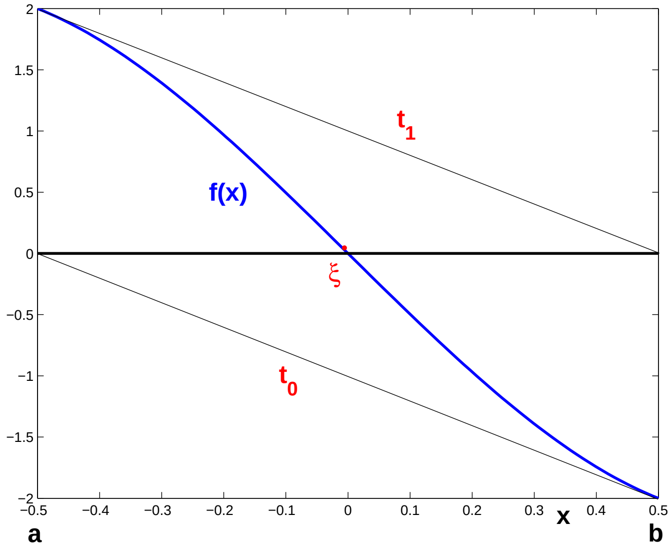
Approssimare la radice $\xi = 0$ dell'equazione

$$f(x) = 4x^3 - 5x = 0$$

con il **metodo di Newton-Raphson** nell'intervallo $I = [-0.5, 0.5]$ e scegliendo come approssimazione iniziale una volta $x_0 = 0.5$ e una volta $x_0 = 0.4$.



$$x_{2k} = 0.5$$



$$x_{2k+1} = -0.5$$

Si verifica facilmente che f verifica le condizioni di applicabilità del **metodo di Newton-Raphson**.

Infatti, $f \in C^2(I)$, $f'(x) = 12x^2 - 5 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} \notin I$.

Scegliendo $x_0 = 0.5$ si ha una *situazione di stallo* e il metodo non converge. Infatti, l'algoritmo di Newton per f è il seguente

$$x_k = x_{k-1} - \frac{4x_{k-1}^3 - 5x_{k-1}}{12x_{k-1}^2 - 5}$$

e quindi

$$x_1 = x_0 - \frac{4x_0^3 - 5x_0}{12x_0^2 - 5} = 0.5 - \frac{2}{-2} = -0.5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{4x_1^3 - 5x_1}{12x_1^2 - 5} = -0.5 + \frac{2}{2} = 0.5$$

Al contrario, scegliendo $x_0 = 0.4$, il metodo converge

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$	$\lvert f(x_k) \rvert$
1	-0.16623376623377	0.56623376623377	0.81279423831355
2	0.00787190837207	0.17410567460584	0.03935759066802
3	-0.00000078059303	0.00787268896510	0.00000390296513
4	0.00000000000000	0.00000078059303	0.00000000000000

Infatti, il teorema di convergenza del metodo di Newton-Raphson assicura la convergenza per ogni scelta dell'approssimazione iniziale in un opportuno intorno J del punto ξ. Scegliendo come approssimazioni iniziali punti che non appartengono all'intorno J, la convergenza non può essere garantita.

Oss: $f''(x) = 24x = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \in I.$

Estremo di Fourier

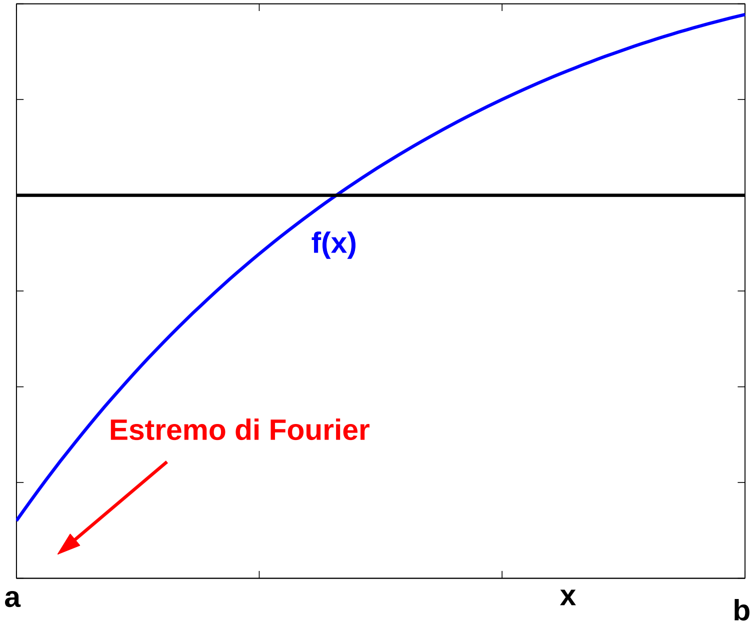
Se $f(x)$ ha **concavità fissa** in un intervallo I, è possibile stabilire un criterio di scelta dell'approssimazine iniziale che garantisce la **convergenza** del metodo.

Estremo di Fourier:

Data una funzione f **continua** e **convessa** in $I = [a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$, si dice **estremo di Fourier** di I l'estremo verso cui f rivolge la convessità .

Se **esiste** f'', allora l'estremo di Fourier è a o b a seconda che $f(a)f''(a) > 0$ oppure $f(b)f''(b) > 0$.

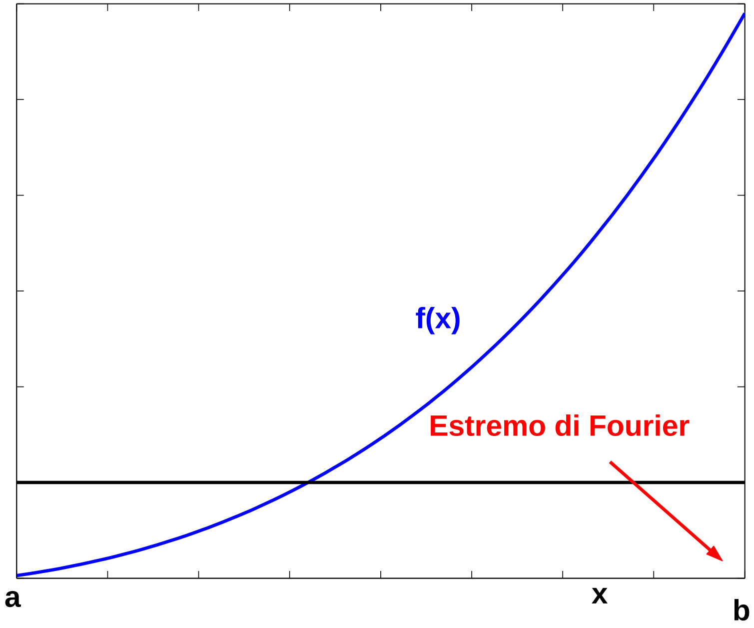
Estremo di Fourier: esempi



$f''(x) < 0$ per $x \in [a,b]$

$$\begin{cases} f(a)f''(a) > 0 \\ f(b)f''(b) < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a$ è **estremo di Fourier**



$f''(x) > 0$ per $x \in [a,b]$

$$\begin{cases} f(a)f''(a) < 0 \\ f(b)f''(b) > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow b$ è **estremo di Fourier**

Metodo di Newton-Raphson: convergenza

Ipotesi di applicabilità :

- $f(a)f(b) < 0$
- f, f', f'' sono **continue** in I: $f \in C^2[a,b]$;
- $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a,b]$;
- $f''(x) \neq 0$ per $x \in [a,b]$ e x_0 è l'**estremo di Fourier** di $[a,b]$.

$\Rightarrow$

1) esiste un'**unica radice** $\xi \in [a,b]$;

2) la **successione delle approssimazioni**

$$\left\{ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \right\} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

è **monotona** e **converge** a ξ;

3) se $f \in C^3[a,b]$, la convergenza è **quadratica**.

Nell'esempio precedente, relativo alla funzione $f(x) = 4x^3 - 5x$, non è soddisfatta l'ipotesi relativa alla derivata seconda. Al contrario, per la funzione $f(x) = x^3 - 10x^2 + 5$, considerando l'intervallo $I = [0.6, 0.8]$, si ha

$$f''(x) = 6x - 20 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{10}{3} \notin I$$

Le ipotesi del teorema sono verificate e, poichè

$$f''(0.6) = \frac{18}{5} - 20 < 0 \quad f''(0.8) = \frac{24}{5} - 20 < 0,$$

mentre

$$f(0.6) > 0 \quad f(0.8) < 0,$$

l'estremo di Fourier è l'estremo $b = 0.8$, che quindi può essere scelto come approssimazione iniziale del metodo di Newton-Raphson, cioè $x_0 = 0.8$.

Esercizio: eseguire le iterazioni e verificare la convergenza monotona.

Problema 3: Soluzione con Metodo di Newton

$$f(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 1.564 = 0 \qquad \lambda \in I = [0.05, 0.15]$$

- Nell'intervallo I è stato separato un unico zero

- f, f', f'' sono **continue** in I

- $f'(x) = e^{\lambda} - \frac{0.435}{\lambda^2}(e^{\lambda} - 1) + \frac{0.435}{\lambda}e^{\lambda} \neq 0$ per $\lambda \in I$

$\Rightarrow$ Lo zero può essere approssimato con il **metodo delle tangenti**

Inoltre $f''(x) = e^{\lambda} + \frac{0.87}{\lambda^3}(e^{\lambda} - 1) - \frac{0.87}{\lambda^2}e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}e^{\lambda} > 0$ in I

$\Rightarrow$ esiste l'**estremo di Fourier** di I:

$$f(0.15)f''(0.15) > 0 \Rightarrow x_0 = 0.15$$

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$	$\lvert f(x_k)\rvert$
0	0.15000000000000	10.00000000000000	0.06715354664030
1	0.10211384134812	0.04788615865188	0.00149497988981
2	0.10099851665312	0.00111532469500	0.00000078594305
3	0.10099792968591	0.00000058696721	0.00000000000022
4	0.10099792968575	0.00000000000016	0.00000000000000
5	0.10099792968575	0.00000000000000	0.00000000000000

Ripetere scegliendo $x_0 = 0.05$

Metodi di linearizzione

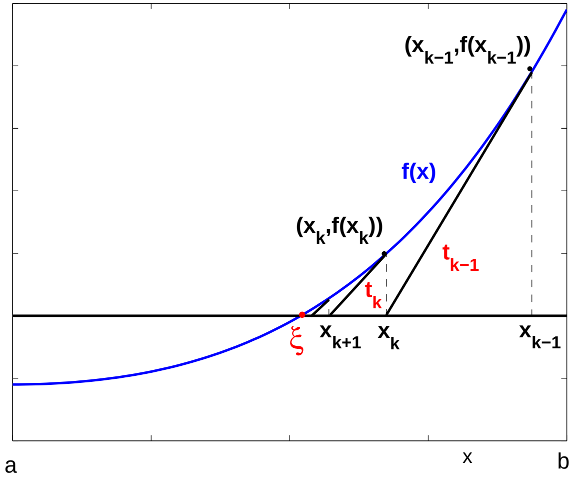
Il metodo di Newton-Raphson richiede la conoscenza della $f'(x)$ che non sempre è di facile valutazione.

Metodi alternativi sono, per esempio,

- il metodo della *tangente fissa*: ad ogni iterazione $f'(x_n)$ è approssimato con $f'(x_0)$
- il metodo delle *secanti con estremi variabili*: $f'(x_n)$ è approssimato con il rapporto incrementale
- il metodo delle *secanti con estremo fisso*: $f'(x_n)$ è approssimato con il rapporto incrementale in cui un punto rimane fisso ad ogni iterazione

Metodi di linearizzione

Metodo di Newton-Raphson

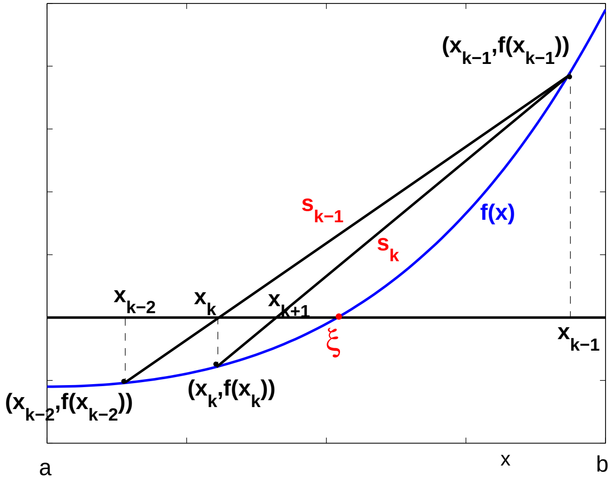


Ad ogni **iterazione** $k = 1, 2, \ldots$ la **nuova approssimazione** x_k è data dall'**intersezione** tra la **retta** t_{k-1}, **tangente** a $f(x)$ nel punto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, e $y = 0$.

Algoritmo:

$$\boxed{\begin{cases} x_0 \quad \text{dato} \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}}$$

Metodo delle secanti con estremi variabili



Ad ogni **iterazione** $k = 2, 3, \ldots$ la **nuova approssimazione** x_k è data dalla **intersezione** tra la **retta** s_{k-1}, **secante** $f(x)$ nei punti $(x_{k-2}, f(x_{k-2}))$ e $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, e $y = 0$.

Algoritmo:

$$\boxed{\begin{cases} x_0, x_1 \quad \text{dati} \\ x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \dfrac{x_{k-1} - x_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}, \quad k \geq 2 \end{cases}}$$

Metodo delle secanti

$$\boxed{\begin{cases} x_0, x_1 \quad \text{dati} \\ x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \dfrac{x_{k-1} - x_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}, \quad k = 2, \ldots \end{cases}}$$

Vantaggi:

- si può usare quando **non si conosce** la derivata di $f(x)$ o quando $f(x)$ è **nota per punti**
- ad ogni passo richiede **una sola** valutazione funzionale

Svantaggi:

- servono **due approssimazioni iniziali** x_0 e x_1
- la scelta di x_0 e x_1 deve essere "**accurata**"

Convergenza del metodo delle secanti

Se

- è stato **separato** un intervallo $I = [a, b]$ **simmetrico** intorno alla **radice** ξ,
- f, f', f'' sono **continue** in I: $f \in C^2[a, b]$,
- $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a, b]$,

$\Rightarrow$ esiste un **intorno** $J \subseteq I$ di ξ tale che, se $x_0, x_1 \in J$, la **successione delle approssimazioni** $\{x_k\}$ **converge** a ξ con convergenza **superlineare**, cioè $1 < p < 2$.

Se $f''(x) \neq 0$ in I, l'**ordine di convergenza** è $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow E = p \simeq 1.62$$

Esercizio: Quale è l'ordine di convergenza del metodo delle secanti se usato per il calcolo dello zero di $f(x) = x^3 - 10x^2 + 5$ contenuto nell'intervallo $I = [0.6, 0.8]$?

Esercizio 1

Data l'equazione non lineare

$$f(x) = x^3 + \alpha - \cos x = 0:$$

1) individuare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ l'equazione non ammette radici positive

2) per $\alpha = \frac{1}{3}$ separare la radice più piccola $\tilde{\xi}$

3) fornire una stima a priori del numero di iterazioni necessarie per approssimare $\tilde{\xi}$ con un errore inferiore a $\epsilon = 10^{-6}$ tramite il metodo di bisezioni;

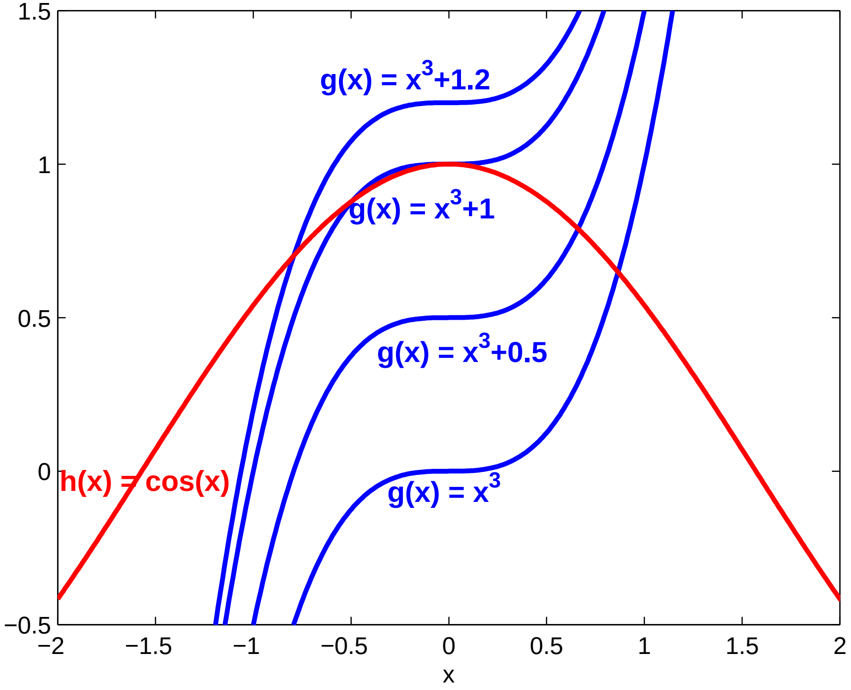
3) quante iterazioni sono necessarie per approssimare con la stessa tolleranza ϵ la radice $\tilde{\xi}$ tramite il metodo di Newton e il metodo delle secanti?

Traccia della soluzione

1) Tracciando **qualitativamente** i grafici delle funzioni

$$y = g(x) = x^3 + \alpha \qquad y = h(x) = \cos x,$$

si deduce che se $\alpha \geq 1$, la funzione $f(x)$ non ha zeri positivi.



2) L'intervallo $[0,1]$ contiene l'**unica** radice positiva dell'equazione

$$f(x) = x^3 + 1/3 - \cos x = 0$$

Infatti

$$f(0) = -2/3 < 0,\ f(1) = 4/3 - cos(1) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(0)f(1) < 0$$

e inoltre

$$f'(x) = 3x^2 + sin(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in (0,1]$$

3) Nell'intervallo $[0, 1]$ sono verificate le **ipotesi di applicabilità** del metodo di bisezioni.

Quindi il numero di iterazioni K per cui $|e_K| \leq \epsilon$ si ricava dalla relazione

$$|e_K| = |\xi - x_K| \leq \frac{b-a}{2^K} \leq \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad K > \frac{\log(b-a) - \log \epsilon}{\log 2}.$$

In questo caso $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 10^{-6}$

$$\Rightarrow K > \frac{\log(1) - \log 10^{-6}}{\log 2} \approx 19.9320 \Rightarrow K \geq 20.$$

4) Nel caso dei metodi di Newton e delle secanti si possono verificare le **ipotesi di applicabilità** nell'intervallo $[0, 1]$:

- nell'intervallo I è stato separato un **unico zero**
- f, f', f'' sono **continue** in I
- $f'(x) = 3x^2 + sin(x) > 0$ per $x \in J \subset I, \quad J = [\delta, 1]$ con $0 < \delta << 1$
- $f''(x) = 6x + cos(x) > 0$ per $x \in I$

$\Rightarrow$ l'estremo $b = 1$ è l'**estremo di Fourier** dell'intervallo J.
Il numero di iterazioni si può calcolare eseguendo le iterate.

k	x_k (bisez.)	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$	x_k (Newton)	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$	x_k (secanti)	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
1	0.500000000		1.		0., 1.	
2	0.750000000	0.25e+0	0.793560583	0.21e+0	0.456715571	0.54e+0
3	0.625000000	0.12e+0	0.742925006	0.51e-1	0.658587384	0.20e+0
4	0.687500000	0.62e-1	0.739971453	0.29e-2	0.775393863	0.12e+0
5	0.718750000	0.31e-1	0.739961685	0.98e-5	0.736625691	0.39e-1
6	0.734375000	0.16e-1	0.739961685	0.11e-9	0.739832822	0.32e-2
7	0.742187500	0.78e-2			0.739962167	0.13e-3
8	0.738281250	0.39e-2			0.739961685	0.48e-6
9	0.740234375	0.19e-2				
10	0.739257812	0.97e-3				
11	0.739746097	0.49e-3				
12	0.739990234	0.24e-3				
13	0.739868164	0.12e-3				
14	0.739929199	0.61e-4				
15	0.739959717	0.30e-4				
16	0.739974976	0.15e-4				
17	0.739967346	0.76e-5				
18	0.739963531	0.38e-5				
19	0.739961624	0.19e-5				
20	0.739962578	0.95e-6				

Esercizio 2

La lunghezza d'onda di uno tsunami L, per una certa profondità dell'acqua d soddisfa la seguente **equazione non lineare**

$$L = \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

con a_g e T rispettivamente l'accelerazione di gravità e il periodo. Sapendo che $T = 2880s$ e $d = 4000m$ (valore tipico dell'Oceano Indiano), produrre una stima del valore di L con precisione almeno 10^{-5}.

Esercizio 2: Metodo di Newton-Raphson

Si osserva che

- $f'(L) = 1 + \frac{a_g T^2 d}{L^2} \frac{1}{cosh^2(\frac{2\pi d}{L})} \neq 0 \quad \forall L \neq 0.$

  Inoltre f' è una funzione continua nello stesso dominio ed in particolare nell'intervallo I in cui è stata isolata la radice positiva di f.

- $f''(L) = a_g T^2 d \left(-\frac{2}{L^3 cosh^2(\frac{2\pi d}{L})} + \frac{2\pi d}{L^4} \frac{sinh(\frac{4\pi d}{L})}{cosh^4(\frac{2\pi d}{L})} \right)$

  é una funzione continua nel dominio di esistenza di f.

  Inoltre è strettamente negativa nell'intervallo I.

  Scegliamo $x_0 = b = 0.6 \cdot 10^6$ come approssimazione iniziale della soluzione.

Calcoliamo ora il punto x_1 tale che

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

cioè

$$x_1 = 0.6 \cdot 10^6 - \frac{57863.27995127568}{1.90250514141390} = 569585.74319106806.$$

L'errore $e_1 = |x_1 - x_0| = 30414.25681 > 0.5 \cdot 10^{-5}$.

Calcoliamo ora il punto x_2 tale che

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

cioè

$$x_2 = 569585.74319106806 - \frac{-1462.944269931060}{2.001268296457646} = 570316.7517582455.$$

L'errore $e_2 = |x_2 - x_1| = 731.008567177457730 > 0.5 \cdot 10^{-5}$.

L'approssimazione ottenuta non ha ancora la precisione richiesta, quindi calcoliamo il punto x_3 tale che

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

cioè

$$x_3 = 570316.7517582455 - \frac{-0.93634280480910}{1.99870815060183} = 570317.2202322469.$$

L'errore $e_3 = |x_3 - x_2| = 0.468474001390859 > 0.5 \cdot 10^{-5}$.

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

cioè

$$x_4 = 570317.2202322469 - \frac{-3.834720700979233 \cdot 10^{-7}}{1.998706513054914} =$$

$$= 570317.22023243876000.$$

L'errore $e_4 = |x_4 - x_3| = 1.918601193287788 \cdot 10^{-7} < 0.5 \cdot 10^{-5}$.

Riassumendo

k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	569585.74319106806	30414.256808931939	1462.9442699310603
2	570316.75175824552	731.00856717745773	0.936342804809101
3	570317.22023224691	0.4684740013908590	0.000000383472070
4	570317.22023243876	0.0000001918524500	0.000000000000000

Dopo 4 iterazioni è stata raggiunta la precisione ϵ richiesta per l'errore!

Dopo 3 iterazioni il valore di f nell'approssimazione alla terza iterazione è molto più piccolo di ϵ!

Poichè

$$f''(a) < 0 \text{ e } f''(b) < 0 \text{ mentre } f(a) < 0 \text{ e } f(b) > 0,$$

a è l'estremo di Fourier dell'intervallo $I = [0.5 \cdot 10^6, 0.6 \cdot 10^6]$

e quindi può essere scelto come approssimazione iniziale della soluzione, cioè $x_0 = a = 0.5 \cdot 10^6$:

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{e_k}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	565429.608054025100000	65429.608054025099000	9811.013667401624800
2	570296.151698269420000	4866.543644244317000	42.110592287266627
3	570317.219844276430000	21.068146007019095	0.000775822554715
4	570317.220232438760000	0.000388162326999	0.000000000000000
5	570317.220232438760000	0.000000000000000	0.000000000000000

Esercizio 2: Metodo delle secanti

La continuità di f, f' e f'' e $f'(L) \neq 0 \quad \forall\ L \quad \in \quad I$, assicurano la convergenza del motodo delle secanti.

Si scelgono gli estremi dell'intervallo I come punti iniziali, cioè

$$x_1 = a = 0.5 \cdot 10^6 \qquad \text{e} \qquad x_2 = 0.6 \cdot 10^6,$$

e si calcola il punto

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} =$$

$$= 0.6 \cdot 10^6 - \frac{57863.27995127568 \cdot 0.1 \cdot 10^6}{57863.27995127568 + 150396.8359693979} =$$

$$= 572215.86106611218$$

L'errore $e_3 = |x_3 - x_2| = 27784.138933887822 > \epsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$

Calcoliamo il punto

$$x_4 = x_3 - f(x_3)\frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} =$$

$$= 572215.86106611218 - \frac{3788.546320179361 \cdot (-27784.138933887822)}{3788.546320179361 - 57863.27995127568} =$$

$$= 570269.26807805535$$

Continuando si ottiene la seguente tabella

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{e_k}$	$\mathbf{f(x_k)}$
1	572215.86106611218	27784.13893388782200	3788.5463201793609
2	570269.26807805535	1946.592988056829200	95.846302395802923
3	570317.29971602384	48.031637968495488	0.1588643480 79078
4	570317.22023577173	0.079480252112262	0.000006661517546
5	570317.22023243876	0.000003332970664	0.000000000000000

Il metodo converge dopo 5 iterazioni

(Oss: la $f(x_5)$ è zero rispetto alla precisione di macchina.)

Esercizio 1.6

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, *Esercizi di Calcolo Numerico*, **II ed.**

Data l'equazione dipendente da un parametro positivo α

$$f(x,\alpha) = \alpha e^{x}\sqrt{x} - 1 = 0$$

determinare i valori di α per i quali f ha una radice in $I = [0.01, 1]$; detto A l'insieme di tali valori, si consideri $\alpha \in A$ e si discuta con quali modalità va applicato il metodo di Newton-Raphson per approssimare detta radice.

Soluzione Il dominio di esistenza di f è dato da $x \geq 0$, $\quad \forall\, \alpha$.

Inoltre, risulta

$$f(0) = \alpha \cdot e^0 \cdot 0 - 1 = -1, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$f'(x) = \alpha \left(e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} \right) = \alpha e^x \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} \right) > 0 \quad \forall x > 0$$

Infatti

$$e^x > 0 \quad \forall x, \qquad \sqrt{x} > 0 \quad \forall x > 0 \quad \text{e} \quad 2x + 1 > 0 \quad \forall x > -\frac{1}{2}$$

Quindi, f è una funzione monotona crescente.

Poichè risulta

$$f(0.01) = \alpha \cdot \frac{e^{0.01}}{10} - 1 \quad \text{e} \quad f(1) = \alpha e - 1$$

affinchè f abbia la sua unica radice in I deve accadere

$$f(0.01) < 0 \quad \text{mentre} \quad f(1) > 0,$$

(f è monotona crescente) cioè

$$\alpha \cdot \frac{e^{0.01}}{10} - 1 < 0 \quad \text{e} \quad \alpha e - 1 > 0$$

da cui deriva

$$\frac{1}{e} < \alpha < \frac{10}{e^{0.01}}$$

Per poter applicare il Metodo di Newton-Raphson e soprattutto per essere certi che il metodo converga alla radice cercata, è necessario che f, f', f'' siano funzioni continue in I, che $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$.

Sicuramente f e f' sono funzioni continue in I, inoltre la monotonia di f garantisce che $f'(x) \neq 0$ in I.

Per quanto riguarda f'', invece, si ha

$$f''(x) = \alpha e^x \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} \right) + \alpha e^x \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} \right) = \frac{\alpha e^x}{2\sqrt{x}} \; \frac{4x^2 + 4x - 1}{2x}$$

che risulta continua in I ma

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

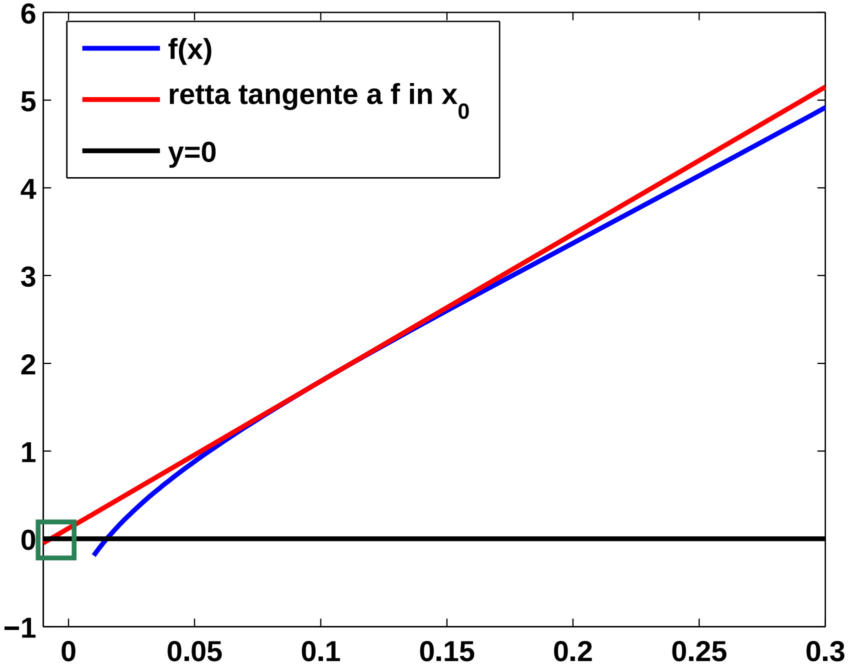
Poichè la soluzione positiva (cioè $x = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$) appartiene all'intervallo I, la convergenza del metodo non è garantita per qualsiasi scelta del punto iniziale x_0.

In questo caso, può accadere che nella successione delle approssimazioni prodotte siano compresi punti che non appartengono all'intervallo I, come, per esempio, scegliendo $x_0 = 0.38$ e $\alpha = 8$.

k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	0.008062568849982	0.371937431150018	0.275850501413549

La tangente alla funzione f nel punto x_0 interseca l'asse delle ascisse nel punto $x_1 = 0.008062568849982 \notin I$

Inoltre, per alcune scelte di α e x_0, come per esempio $\alpha = 8$ e $x_0 = 0.1$, il punto di intersezione può non appartenere al dominio di esistenza della funzione stessa!!! $x_1 = -0.007 < 0$



In questi casi è necessario cambiare la scelta del punto iniziale. Per esempio, si può calcolare l'approssimazione prodotta dal metodo di bisezione dopo poche iterazioni (o quando si raggiunge una certa precisione) e usarla come punto iniziale per il metodo di Newton.

Per esempio, dopo quattro iterazioni del metodo di bisezione ($\epsilon = 0.5 \cdot 10^{-1}$)

k	a_k	b_k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	0.01	0.505000	0.2575000	0.2475000	4.251815163314802
2	0.01	0.257500	0.1337500	0.1237500	2.344442774424002
3	0.01	0.133750	0.0718750	0.0618750	1.304590841882905
4	0.01	0.071875	**0.0409375**	0.0309375	0.686279560806184

si ottiene $x_4 = 0.0409375$ che, usato come punto iniziale nel metodo di Newton produce

k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	0.010137854601102	0.030799645398898	0.186297162576147
2	0.014687723854149	0.004549869253046	0.016111161677858
3	0.015155019259722	0.000467295405573	0.000115181238480
4	0.015158408093962	0.000003388834240	0.000000005864268
5	0.015158408266516	0.000000000172555	0.000000000000000
6	0.015158408266517	0.000000000000000	0.000000000000000

Al contrario, per altre scelte sia di α che del punto iniziale x_0, come per esempio $x_0 = 0.5$ e $\alpha = 1$, il metodo converge alla soluzione in poche iterazioni

k	x_k	e_k	$f(x_k)$
1	0.428881942480353	0.071118057519647	0.005610829411438
2	0.426305773395493	0.002576169084861	0.000006567282834
3	0.426302751011004	0.000003022384489	0.000000000008998
4	0.426302751006863	0.000000000004141	0.000000000000000
5	0.426302751006863	0.000000000000000	0.000000000000000

Osserviamo, infine, che scegliendo

$$\alpha = \frac{1}{e^{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}},$$

la radice di f è il suo punto di flesso (la derivata seconda si annulla in questo punto) e l'ordine di convergenza del metodo di Newton aumenta essendo almeno 3.

Esercizio

Data l'equazione non lineare

$$h(y;\xi) = (\xi - 1)\,\mathrm{e}^{\sqrt{y}} - 1 = 0\,,$$

dove ξ è un parametro reale.

1. Determinare i valori di ξ per cui l'equazione ha una radice nell'intervallo $I = [0.02, 1.02]$;
2. per i valori di ξ individuati al punto precedente, verificare se il metodo delle tangenti è adatto ad approssimare la radice in I. Specificare la scelta dell'approssimazione iniziale e l'ordine di convergenza del metodo.

Soluzione del punto 1)

La funzione è ben definita per $y \geq 0$.

Inoltre si osserva che, poichè

$$e^{\sqrt{y}} > 0 \quad \forall\, y \geq 0$$

l'uguaglinaza

$$(\xi - 1)\, e^{\sqrt{y}} = 1$$

non può essere mai verificata per valori di $\xi \leq 1$

Si osserva anche che, $e^{\sqrt{y}} \geq 1 \quad \forall\, y \geq 0$, e quindi l'uguaglianza

$(\xi - 1)\, e^{\sqrt{y}} = 1$ non è mai verificata per $\xi > 2$.

Infine, per $\xi = 2$, lo zero di $h(y; 2)$ è proprio $y = 0 \notin I$.

Sicuramente gli eventuali valori di ξ per cui la funzione h ammette uno zero in I soddisfano la seguente condizione

$$1 < \xi < 2$$

D'altra parte,

$$h'(x;\xi) = (\xi - 1)\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} > 0, \quad \forall y > 0 \quad \xi > 1,$$

quindi, $h(y;\xi)$ è una funzione monotona crescente per $\forall y > 0 \quad \xi > 1$, e se ammette uno zero in I, questo è anche unico.

Affinchè abbia uno zero nell'intervallo I, deve accadere

$$h(0.02;\xi) < 0 \qquad\qquad h(1.02;\xi) > 0$$

cioè

$$(\xi - 1)\mathrm{e}^{\sqrt{0.02}} - 1 < 0 \qquad\qquad (\xi - 1)\mathrm{e}^{\sqrt{1.02}} - 1 > 0$$

da cui

$$\xi < \frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{0.02}}} + 1 \approx 1.8681 \qquad\qquad \xi > \frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{1.02}}} + 1 \approx 1.3642.$$

Possiamo, dunque, concludere che per $\frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{1.02}}} + 1 < \xi < \frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{0.02}}} + 1$ la funzione $h(y;\xi)$ ammette un unico zero nell'intervallo $I = [0.02, 1.02]$.

Esercizio

Si consideri l'equazione non lineare $log(x) + x^2 - x = 0$.

1. Mostrare che l'equazione ammette un'unica radice e che quest'ultima è contenuta nell'intervallo $I = [0.7, 2.3]$.
2. Applicare, se possibile, due passi del metodo di bisezione.
3. Detta x_0 l'approssimazione prodotta al passo precedente, eseguire, se possibile, un passo dell'algoritmo del metodo di Newton-Raphson e sia x_1 l'approssimazione prodotta.
4. Applicare, se possibile il metodo delle secanti usando x_0 e x_1, determinate ai punti 2) e 3), come approssimazioni iniziali e interrompere l'esecuzione quando la approssimazione prodotta ha 5 decimali esatti.
5. Calcolare la costante asintotica di convergenza del metodo delle secanti.

Esercizi

1. Approssimare la radice negativa più prossima allo zero dell'equazione non lineare $sin(x) - xe^x = 0$ usando il metodo di Newton-Raphson e isolando lo zero in modo che si possa scegliere l'estremo di Fourier come approssimazione iniziale. L'approssimazione prodotta deve avere almeno due decimali esatti.

2. Scrivere lo pseudocodice del metodo di Newton usando le due condizioni di arresto a posteriori.

3. Ripertere l'esercizio precedente per il metodo delle secanti.

Metodi iterativi a un punto (o del punto unito)

Un **metodo iterativo a un punto** in $\mathbb{R}$ ha la forma:

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_n = \varphi(x_{n-1}), \;\; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

La funzione φ è detta **funzione di iterazione**.

Nota. Per il **metodo di Newton** $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Convergenza

Il metodo è **convergente** se la **successione delle approssimazioni** $\{x_n = \varphi(x_{n-1})\}_{n \geq 1}$ verifica

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} |\xi - x_n| = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \xi}$$

Criterio di arresto

Se il metodo è convergente, una **buona approssimazione** di ξ è data dal valore x_N per il quale $\boxed{|x_N - x_{N-1}| \leq \epsilon}$

Metodo del punto unito

Il **metodo del punto unito** consiste nel riscrivere l'equazione non lineare di partenza in una forma equivalente:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \varphi(x)$$

Se ξ è **radice** di f allora è **punto unito** di φ:

$$f(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \varphi(\xi)$$

Nota. Trovare il **punto unito** di φ significa trovare l'ascissa del punto di **intersezione** tra la retta $y = x$ e la curva $y = \varphi(x)$.

Una funzione può avere **più di un punto unito**, **solo uno** o **nessuno**.

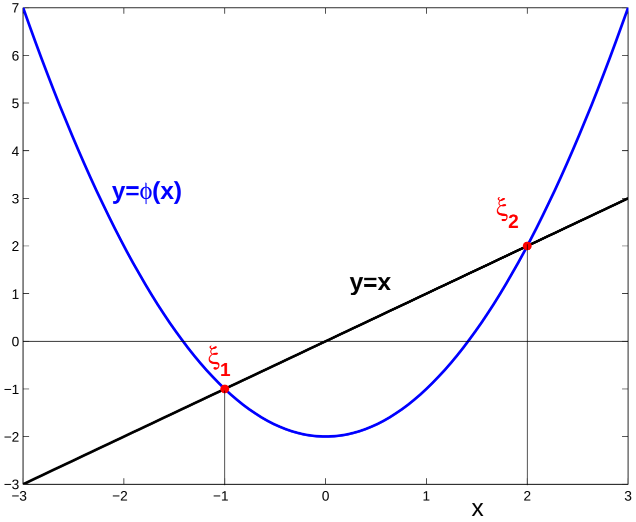
Metodo del punto unito: Esempio 1

Trovare i **punti uniti** della **funzione di iterazione**

$$\varphi(x) = x^2 - 2 \qquad \text{per} \qquad -2 \leq x \leq 3.$$

Si tratta di trovare i valori di x per i quali

$$\varphi(x) = x^2 - 2 = x \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = x^2 - x - 2 = 0$$



Ci sono **due** punti uniti:

$$\xi_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$$
$$\xi_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(2) = (2)^2 - 2 = 2$$

Nota. ξ_1 e ξ_2 sono anche le soluzioni di $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$

Convergenza: condizione necessaria

Teorema 1. Se la successione

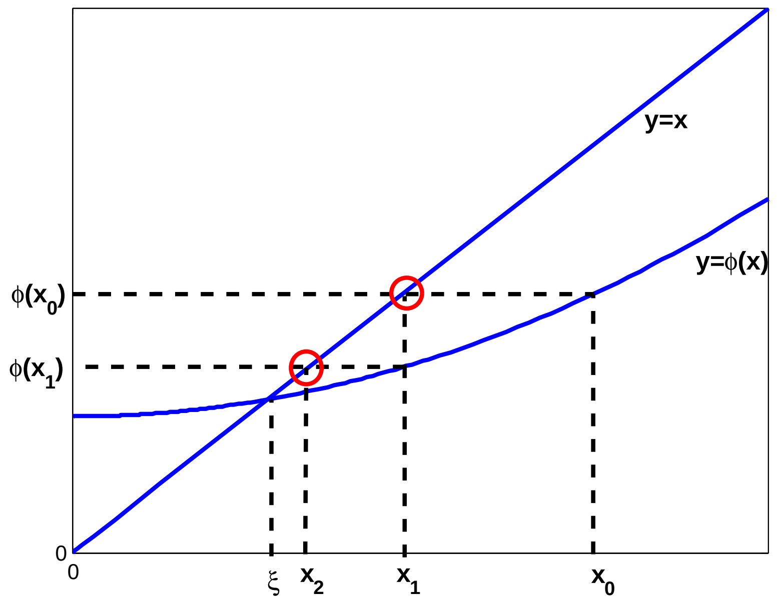
$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_n = \varphi(x_{n-1}), \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

è **convergente** a un valore τ e φ è **continua** in τ $\Rightarrow$ τ è **punto unito** di φ, cioè $\tau = \varphi(\tau)$.

Dimostrazione.

$$\tau \underset{\substack{\downarrow \\ x_n \text{ converge}}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) \underset{\substack{\downarrow \\ \varphi \text{ è continua}}}{=} \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = \varphi(\tau)$$

Interpretazione grafica: metodo del punto unito



x_1 è l'ascissa del punto di intersezione della retta $y = \varphi(x_0)$ con la retta $y = x$

x_2 è l'ascissa del punto di intersezione della retta $y = \varphi(x_1)$ con la retta $y = x$

. . . .

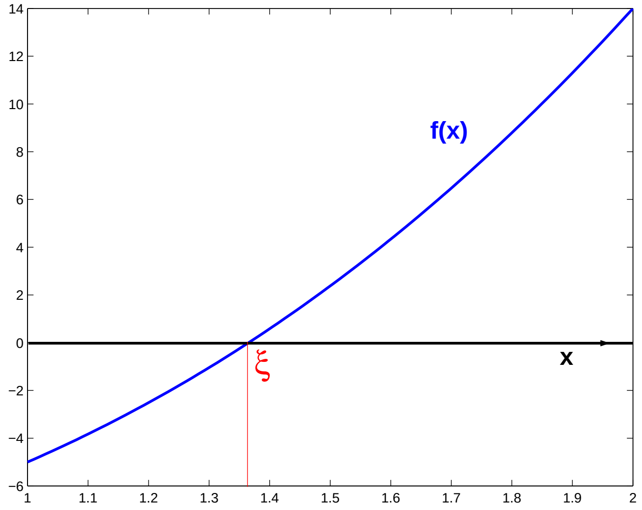
Metodo del punto unito: Esercizio

Verificare che l'equazione $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ ha un'**unica** radice in $[1, 2]$ e trovare un'opportuna **funzione di iterazione** per approssimarla.

Soluzione. $f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$ per $x \in [1, 2]$

$\Rightarrow f(x)$ è **monotona crescente** $\Rightarrow \begin{cases} \min_{1\le x\le 2} f(x) = f(1) = -5 < 0 \\ \max\limits_{1\le x\le 2} f(x) = f(2) = 14 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ **esiste** una radice in $[1, 2]$ e, per la **monotonia**, è **unica**



Esercizio: funzioni di iterazione

Per trovare una funzione di iterazione bisogna operare sull'equazione $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

1)Isolo il termine in x^2

$$x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3) \qquad \Rightarrow \qquad x = +\frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2} = \varphi_1(x)$$

2)Isolo il termine in x^3

$$x^3 = 10 - 4x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = (10 - 4x^2)^{1/3} = \varphi_2(x)$$

3)Aggiungo $-x$ ad ambo i membri

$$x^3 + 4x^2 - 10 - x = -x \qquad \Rightarrow \qquad x = x - x^3 - 4x^2 + 10 = \varphi_3(x)$$

4)Divido per x

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 10}{x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2} = \varphi_4(x)$$

5)Metodo di Newton

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x \qquad \Rightarrow \qquad x = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} = \varphi_5(x)$$

Metodo delle approssimazioni successive

$$\begin{cases} x_0 = 1.5 \\ x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Iter	$x_n = \varphi_5(x_{n-1})$	$x_n = \varphi_3(x_{n-1})$
1	1.50000000000000	1.500000000000
2	1.37333333333333	-0.875000000000
3	1.36526201487463	6.732421875000
4	1.36523001391615	-469.720012001693
5	1.36523001341410	1.03×10^8
6	1.36523001341410	

converge diverge

Iter	$x_n = \varphi_1(x_{n-1})$	$x_n = \varphi_2(x_{n-1})$	$x_n = \varphi_4(x_{n-1})$
1	1.500000000	1.500000000	1.500000000
2	1.286953768	1.000000000	0.816496581
3	1.402540803	1.817120593	2.996908806
4	1.345458374	-1.474794991	0.000000000 − 2.941235061i
5	1.375170253	1.091370196	2.753622388 + 2.753622388i
6	1.360094193	1.736427733	1.814991519 − 3.534528790i
7	1.367846968	-1.272545596	2.384265848 + 3.434388064i
8	1.363887003	1.521542585	2.182771900 − 3.596879228i
9	1.365916733	0.904354471	2.296997587 + 3.574104462i
10	1.364878217	1.887879630	2.256510286 − 3.606561220i
11	1.365410061	-1.62061324	2.279179049 + 3.601936572i
12	1.365137821	-0.79662594	2.271142587 − 3.608371470i
13	1.365277208	1.954082914	2.275631311 + 3.607451621i
14	1.365205850	-1.74063131	2.274039927 − 3.608725567i
15	1.365242384	-1.28446791	2.274928362 + 3.608543344i
16	1.365223680	1.503778436	2.274613384 − 3.608795481i
17	1.365233256	0.984632264	2.274789213 + 3.608759411i
18	1.365228353	1.829353811	2.274726876 − 3.608809311i
19	1.365230863	-1.50164877	2.2747616734 + 3.60880217i
20	1.365229578	0.993357253	2.274749337 − 3.608812048i
...			
25	1.365230029	-1.373190473	2.274754931 + 3.608812641i
...			
30	1.365230013	1.092266409	2.274754877 − 3.608812723i

converge non converge non converge

Convergenza: condizione sufficiente (1)

Teorema 2. Se φ è **derivabile** in $I = [a, b]$ e

$i)$ $\varphi : I \;\rightarrow\; I \Leftrightarrow a \leq \min_{x\in I} \varphi(x) \leq \max_{x\in I} \varphi(x) \leq b$

$ii)$ $\exists\; k \in (0, 1)$ tale che $|\varphi'(x)| \leq k,\;\; x \in I$

$\Rightarrow$ $\alpha)$ esiste un **unico punto unito** $\xi \in I$ di $\varphi(\xi)$

$\beta)$ la successione $x_n = \varphi(x_{n-1})$ è **convergente** a ξ per ogni **approssimazione iniziale** $x_0 \in I$

Dimostrazione dell'esistenza

Poichè $i)$ $\varphi : I \rightarrow I \Rightarrow \varphi(a) \geq a \quad \varphi(b) \leq b$

Se vale una delle uguaglianze

$\Rightarrow \exists$ almeno **un punto unito**

Altrimenti si pone $F(x) := x - \varphi(x)$ con $F \in C(I)$

$\Rightarrow F(a) = a - \varphi(a) < 0$ e $F(b) = b - \varphi(b) > 0$

$\Rightarrow \exists$ almeno uno **zero** di $F(x)$

($\exists\, \xi$: $F(\xi) = 0$, cioè $\xi - \varphi(\xi) = 0$)

$\Leftrightarrow \exists$ almeno un **punto unito** di φ

Dimostrazione dell'unicità

Supponiamo per **assurdo** che esistano **due punti uniti** $\xi_1 \neq \xi_2$

$$\Downarrow$$

$$0 < |\xi_1 - \xi_2| = \underbrace{|\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)|}_{\textbf{punto unito}} =$$

$$= \underbrace{|\varphi'(\sigma)(\xi_1 - \xi_2)|}_{\textbf{Th. di Lagrange}} = |\varphi'(\sigma)|\,|\xi_1 - \xi_2|$$

$$\leq \underbrace{k}_{ii)} |\xi_1 - \xi_2| < |\xi_1 - \xi_2|$$

Dimostrazione della convergenza

$\forall\, x_0 \in I$ accade che

$$0 < |e_n| = |\xi - x_n| = |\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| \leq \; k \; |\xi - x_{n-1}| = k|e_{n-1}|$$

$$\Rightarrow |e_n| \leq \; k \; |e_{n-1}| \leq \; k^2 \; |e_{n-2}| \leq \ldots \leq \; k^n \; |e_0| \leq \; k^n \; (b-a)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |e_n| \leq \lim_{n\to\infty} k^n \; (b-a) \underbrace{=}_{ii)} 0$$

Osservazione

Dalla dimostrazione del teorema precedente si deduce che l'ipotesi di derivabilità della funzione di iterazione φ nell'intervallo I può essere rilassata. Infatti, basta richiedere

$$\exists\, k \in (0,1) : \forall\, x', x'' \in I \Rightarrow |\varphi(x') - \varphi(x'')| < k|x' - x''|,$$

cioè φ deve essere una **contrazione**.

Metodo del punto unito: Esercizio

Tornando all'esercizio proposto precedentemente ($f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$), possiamo osservare che

- la funzione φ_5 genera un procedimento iterativo convergente in quanto sono verificate le ipotesi di applicabilità del metodo di Newton. Infatti, f, f', f'' sono funzioni continue in $I = [1, 2]$, $f'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in I$; inoltre anche $f''(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in I$

- la funzione $\varphi_3(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$, invece, non genera un procedimento iterativo convergente in I in quanto

$$\varphi_3'(x) = 1 - 3x^2 - 8x \quad \text{e quindi} \quad |\varphi_3'(x)| > 1 \quad \forall\, x \in I$$

(osservare che $\varphi''(x) < 0 \quad \forall\, x \in I$)

- la funzione $\varphi_4(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$ non genera un procedimento iterativo convergente in quanto I non è completamente contenuto nel dominio di esistenza D della funzione, infatti $D = [-\infty, -\sqrt{5}/2] \cup (0, \sqrt{5}/2]$

- la funzione $\varphi_2(x) = (10 - 4x^2)^{1/3}$ non genera un procedimento iterativo convergente in quanto $\varphi(I) \notin I$ ($\varphi(2) = \sqrt[3]{-6} \notin I$); inoltre $|\varphi_2'(x)| > 1$ in I (basta osservare che $\varphi_2'(x)$ non è definita in $x = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1.5811$)

- la funzione $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ genera un procedimento iterativo convergente alla radice dell'equazione non lineare anche se non è verificata la prima ipotesi del teorema ($\varphi(1) = 1.5$ mentre $\varphi(2) = \sqrt{2}/2$).

  Tuttavia, poichè

$$\varphi_1'(x) = -\frac{3}{4}\frac{x^2}{\sqrt{10 - x^3}}$$

  è una funzione monotona decrescente in I e sicuramente $|\varphi_1'(x)| < 1$ in $\tilde{I} = [1, 1.7]$, il procedimento iterativo risulta convergente in $\tilde{I}$.

Esempio

La funzione $\phi(x) = x - sin(x)$ ammette più di un punto fisso in quanto $sin(x)$ è una funzione periodica.

$\phi(x) = x - sin(x)$ è stata ottenuta dalla equazione non lineare $f(x) = 0$, con $f(x) = sin(x)$.

Nell'intervallo $I = [0,\ 2\pi]$, gli zeri di f sono $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \pi$, $\xi_3 = 2\pi$.

Tuttavia, la funzione $\phi(x)$ sicuramente non genera un procedimento iterativo convergente a ξ_2 in quanto non è possibile trovare intervalli $J \in I :\ \xi_2 \in J$ per cui sia verificata la condizione $|\phi'(x)| < 1,\ \forall\, x \in J$.

Infatti, $\phi'(x) = 1 - cos(x)$ e pertanto in prossimità di ξ_2 risulta $|\phi'(x)| \approx 2$.

Convergenza: condizione sufficiente (2)

Teorema 3. Se φ è **derivabile** in $I = [a, b]$ e

$$i)\ \varphi(\xi) = \xi \qquad \xi \in (a, b)$$
$$ii)\ \exists\ k \in (0, 1) \text{ tale che } |\varphi'(x)| \le k,\ \ x \in I$$

$\Rightarrow$ esiste un **intorno** di $\xi : \Delta = [\xi - \delta, \xi + \delta] \subseteq I$ tale che

$\alpha)$ ξ è l'**unico punto unito** di $\varphi(\xi)$ in Δ

$\beta)$ la successione $\{x_n = \varphi(x_{n-1})\}$, $n = 1, 2, \ldots$, è **convergente** a ξ per ogni **approssimazione iniziale** $x_0 \in \Delta$

Dimostrazione

Basta osservare che se $\varphi(\Delta) \subseteq \Delta$, allora valgono le ipotesi del teorema precedente e quindi il procedimento converge $\forall\, x_0 \in \Delta$.

Se si pone $\delta = \min(\xi - a, b - \xi) \Rightarrow \xi \in \Delta := [\xi - \delta, \xi + \delta] \subseteq I$

Se $x \in \Delta \Rightarrow$ $|\xi - \varphi(x)| = |\underbrace{\varphi(\xi)}_{i)} - \varphi(x)| =$

$$\underbrace{= |\varphi'(\sigma)|\, |\xi - x|}_{\text{Th.Lagr.}} \underbrace{\leq k|\xi - x|}_{ii)} \leq k \underbrace{\delta}_{x\in\Delta} < \delta$$

$\Rightarrow$ $\varphi(\Delta) \subseteq \Delta$ $\Rightarrow$ Si ricade nelle **ipotesi** del **Teorema 2**

Applicazione al metodo delle tangenti

Teorema 4. Se $I = [a, b]$ è un **intervallo di separazione** di uno zero di f e inoltre

$i)$ f, f', f'' sono **continue** in I: $f \in C^2[a, b]$
$ii)$ $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a, b]$

$\Rightarrow$ esiste un **intorno** $J \subseteq I$ di ξ tale che per $x_0 \in J$ la **successione delle approssimazioni**

$$\left\{ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \right\},\ n = 1, 2, ...,$$

converge a ξ

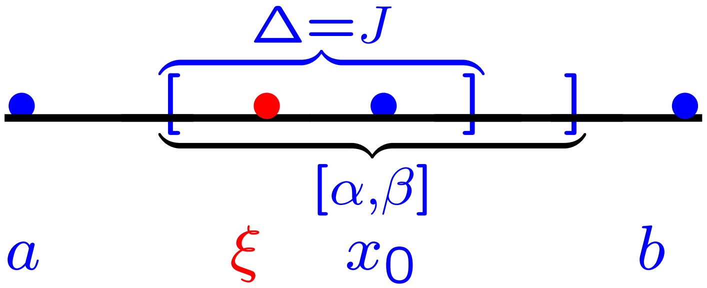
Dimostrazione

Per il **metodo delle tangenti**

$$\boxed{\varphi_T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}} \Rightarrow \varphi'_T(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow \varphi'_T(\xi) = \frac{f(\xi)f''(\xi)}{(f'(\xi))^2} = 0$$

Poiché φ'_T è **continua**, esiste un **intorno** $[\alpha,\beta] \subseteq I$ di ξ tale che $|\varphi'_T(x)| \leq k \in (0,1)$

$\Rightarrow$ si ricade nelle ipotesi del **Teorema 3** con $[a,b] = [\alpha,\beta] \cap I$ e $J = \Delta$

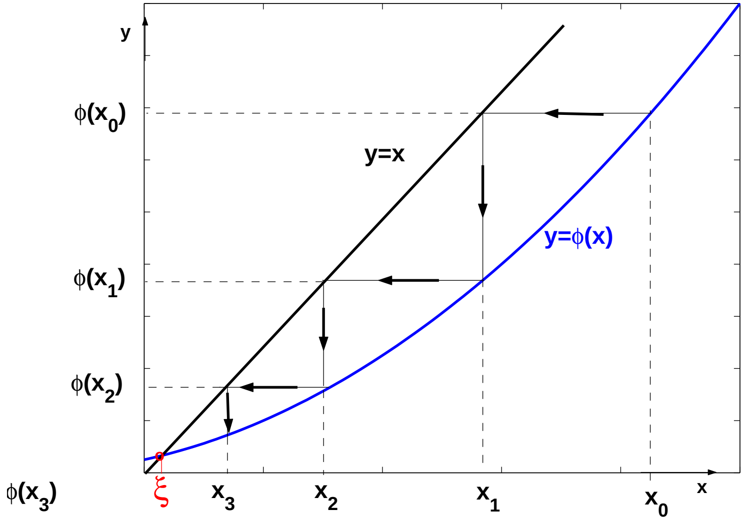


Proprietà della successione delle approssimazioni

Si vuole caratterizzare la successione delle approssimazioni

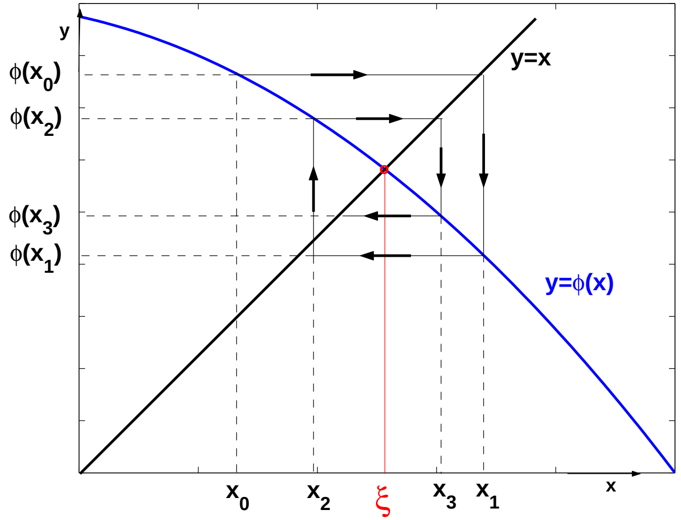
Dal **Teorema di Lagrange** si ha

$$e_n = \xi - x_n = \varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1}) = \varphi'(t_n)(\xi - x_{n-1}) = \varphi'(t_n)e_{n-1} \qquad t_n \in [x_{n-1}, \xi]$$



$$0 \le \varphi'(x) < 1$$

ad ogni iterazione l'errore diminuisce
in valore assoluto e preserva il segno



$$-1 < \varphi'(x) \le 0$$

ad ogni iterazione l'errore diminuisce
in valore assoluto ma non conserva il segno

Proprietà della successione delle approssimazioni

- **Se** $0 \leq \varphi'(x) < 1$ per $x \in I$ la successione $\{x_n = \varphi(x_{n-1})\}$, $n = 1, 2, \ldots$, è **monotona crescente** (se $e_0 > 0$) o **decrescente** (se $e_0 < 0$) $\Rightarrow$ le approssimazioni sono per **difetto** (se $\xi > x_0$) o per **eccesso** (se $\xi < x_0$)
- **Se** $-1 < \varphi'(x) \leq 0$ per $x \in I$ la successione $\{x_n = \varphi(x_{n-1})\}$, $n = 1, 2, \ldots$, **non è monotona** $\Rightarrow$ le approssimazioni sono **alternativamente** per **difetto** e per **eccesso**

Ordine di convergenza

Teorema 5. Se

$i)$ $\varphi \in C^{\mathbf{p}}(I)$ con I intorno di un punto unito ξ di φ

$ii)$ la successione delle approssimazioni $\{x_n\}$ è **convergente**

$iii)$ $\varphi(\xi) = \xi,\ \ \varphi^{(\nu)}(\xi) = 0 \qquad \nu = 1, ..., \mathbf{p} - 1$
$\varphi^{(\mathbf{p})}(\xi) \neq 0$

$\Rightarrow$ il metodo ha **ordine di convergenza** p

Dimostrazione

Sviluppo in serie di Taylor:

$$\varphi(x_n) =$$

$$\varphi(\xi) + \varphi'(\xi)(x_n - \xi) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)(x_n - \xi)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(\xi)(x_n - \xi)^{p-1} + \underbrace{\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(t_n)(x_n - \xi)^p}_{\text{errore nella forma di Lagrange}} =$$

$$\underbrace{=}_{iii)} \varphi(\xi) + \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(t_n)(-e_n)^p \qquad t_n \in [x_n, \xi]$$

$$\Downarrow$$

$$e_{n+1} = \xi - x_{n+1} = \varphi(\xi) - \varphi(x_n) = -\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(t_n)(-1)^p \ (e_n)^p$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}}_{\text{ordine di convergenza}} = \underbrace{\frac{|\varphi^{(p)}(\xi)|}{p!}}_{\text{fattore di convergenza}} = C > 0}$$

Esempi

- **Se** $\varphi'(\xi) \neq 0 \Rightarrow \; p = 1$ la convergenza è **lineare**:

$$C = \varphi'(\xi) \leq k := \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)|$$

coefficiente di contrazione

- **Metodo delle tangenti**: $\boxed{\varphi_T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$

$$\varphi_T'(\xi) = \frac{f(\xi) f''(\xi)}{(f'(\xi))^2} = 0$$

$$\varphi_T''(\xi) = \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \begin{cases} \neq 0 & \textbf{se } f''(\xi) \neq 0 & \Rightarrow p = 2 \\ = 0 & \textbf{se } f''(\xi) = 0 & \Rightarrow p > 2 \end{cases}$$

Se $p = 2$ la convergenza è **quadratica**

Criteri di arresto

Se k è il **coefficiente di contrazione** allora

(1) $$|e_n| = |\xi - x_n| = |\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| \leq k\,|\xi - x_{n-1}|$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} |\xi - x_{n-1}| &= |\xi - x_n + x_n - x_{n-1}| \leq \\ &\leq |\xi - x_n| + |x_n - x_{n-1}| = \\ &= |\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| + |x_n - x_{n-1}| \leq \\ &\leq k\,|\xi - x_{n-1}| + |x_n - x_{n-1}| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\xi - x_{n-1}| \leq \frac{1}{1-k}|x_n - x_{n-1}|$$

Sostituendo questa espressione in (1) si ha

$$\boxed{|e_n| \leq \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|}$$ **Stima a posteriori**

Poichè

$$|e_n| \leq k|e_{n-1}| \leq k^2|e_{n-2}| \leq \ldots \leq k^{n-1}|e_1| \leq k^{n-1}\frac{k}{1-k}|x_1 - x_0|$$

si ha

$$\boxed{|e_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| \leq \frac{k^n}{1-k}(b-a)}$$ **Stima a priori**

da cui è possibile dare una stima del numero di iterazioni N che garantisce $|e_n| < \varepsilon$, con ε fissata, come segue

$$N > \frac{log\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{b-a}\right)}{logk}$$

Esercizio

Stabilire se le funzioni

$$\varphi_1(x) = x^3 + 6x^2 + x - 8, \quad \varphi_2(x) = \sqrt{\frac{8}{x+6}}, \quad \varphi_3(x) = \sqrt{\frac{8-x^3}{6}}$$

generano un procedimento iterativo convergente alla radice dell'equazione non lineare $x^3 + 6x^2 - 8 = 0$ contenuta nell'intervallo $I = [1, 2]$.

Per ognuna di esse caratterizzare la convergenza (ordine, monotonia, scelta dell'approssimazione iniziale).

Soluzione Osserviamo che $\varphi_1(x) = x \Longleftrightarrow x^3 + 6x^2 - 8 = 0$. La stessa condizione è soddisfatta dalle funzioni φ_2 e φ_3.

φ_1 non genera un precedimento iterativo convergente nell'intervallo dato in quanto

$$\varphi_1'(x) = 3x^2 + 12x + 1 > 1 \quad \forall\, x \in I$$

$$\varphi_2'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{(x+6)\sqrt{x+6}} < 0 \quad \forall x \in I$$

ne segue che φ_2 è monotona decrescente in I e quindi

$$\forall\, x \in I, \quad \varphi_2(1) \geq \varphi_2(x) \geq \varphi_2(2)$$

.

Poichè $\varphi_2(1) = \sqrt{8/7} > 1$ and $\varphi_2(2) = 1$, si ha $\varphi_2(I) \subset I$.

Inoltre, si verifica facilmente che $|\varphi_2'(x)| < 1 \quad \forall\, x \in I$.

Possiamo, dunque, concludere che φ_2 genera un procedimento iterativo convergente allo zero di $x^3 + 6x^2 - 8$ nell'intervallo $I = [1,\ 2]$ per ogni scelta dell'approssimazione iniziale $x_0 \in I$.

Inoltre, poichè $\varphi_2' \neq 0\ \forall x \in I$, l'ordine di convergenza è lineare ($p = 1$) e la convergenza non è monotona in quanto $\varphi_2' < 0 \quad \forall\, x \in I$

Cosa si può dire di φ_3?

Mostare che φ_3 non genera un procedimento convergente in I ma lo genera in $I_1 = [1,\ 1.5]$ e la convergenza è lineare e non monotona. Scegliendo $x_0 = 1.5$, stabilire quale tra i procedimenti generati da φ_2 e φ_3 in I_1 converge più velocemente.

Esercizio 1.8

Separare le soluzioni dell'equazione

$$f(x) = (x^2 - 2)cos(x) + 2xsin(x) = 0$$

verificando inoltre se la funzione $\phi(x)$ con

$$\phi(x) = \mathrm{arctan}\left(\frac{2 - x^2}{2x}\right)$$

è adatta per generare un procedimento iterativo convergente, con appropriata scelta di x_0, per approssimare la radice $\xi \in (0, \pi/2)$.

Si osserva che $\phi'(x) = -2\frac{x^2+2}{x^4+4}$ e che

$$|\phi'(x)| < 1 \;\Leftrightarrow\; x < -\sqrt{2} \quad \text{oppure} \quad x > \sqrt{2}$$

mentre la radice $\xi \in (0, \pi/2)$ è $\xi \approx 0.756 \in [0, \sqrt{2}]$,

quindi ϕ non genera un procedimento iterativo convergente.

Verificare che il Metodo di Newton fornisce un procedimento iterativo convergente alla radice $\xi \in (0, \pi/2)$.

Esercizio

Stabilire se la funzione

$$\phi = \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

genera un procedimento iterativo convergente alla radice dell'equazione

$$L - \frac{a_g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) = 0$$

nell'intervallo $I = [2\pi d, \sqrt{a_g d}\, T]$.

Esercizio 7.11

Data l'equazione

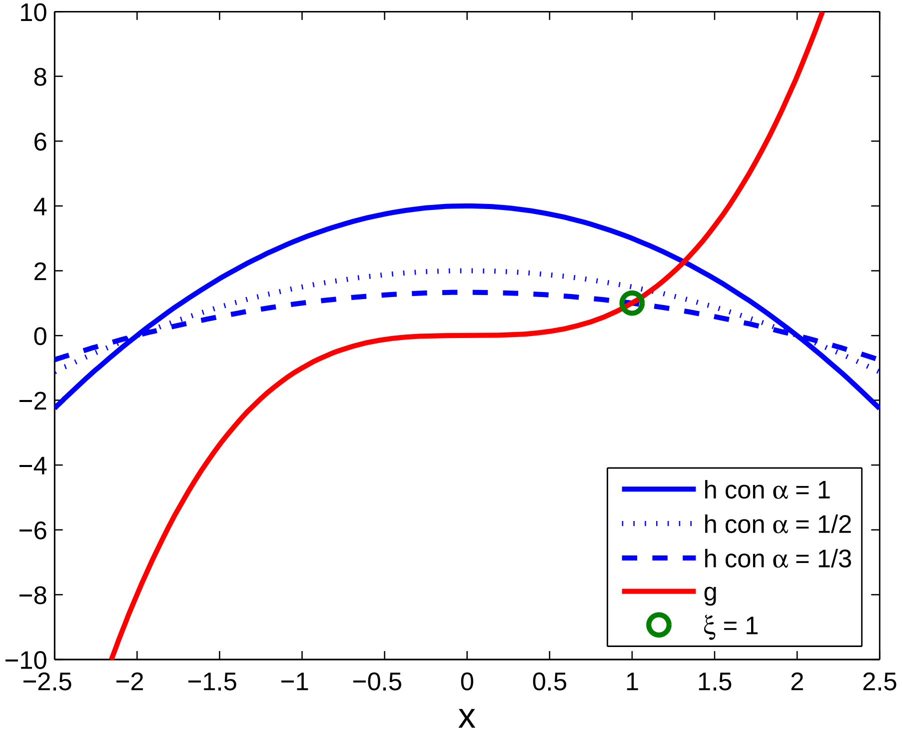
$$\alpha(4 - x^2) = x^3, \quad \alpha > 0$$

1. separare graficamente le soluzioni positive ed individuare per quali valori di α l'equazione ammette una radice $\xi > 1$;
2. posto $\alpha = 1$, introdurre una opportuna funzione di iterazione $x = \phi(x), \quad x \in [1,\ 1.5]$ adatta ad approssimare la radice $\xi > 1$;
3. in base al comportamento di ϕ caratterizzare la successione delle approssimazioni $x_n = \phi(x_{n-1})$ (ordine di convergenza, monotonia, etc.).
4. stimare il numero di iterazioni necessarie affinchè il procedimento iterativo produca un'approssimazione della soluzione con 5 decimali esatti e confrontarlo con il numero di iterazioni realmente necessarie.

Soluzione: Si considerano le funzioni $h(x) = \alpha(4 - x^2)$ e $g(x) = x^3$.

$h(x)$, al variare del parametro α, è una parabola con concavità rivolta verso il basso e vertice $V = (0, 4\alpha)$. Quindi, V si avvicina a 0 man mano che il valore del parametro α decresce.

Inoltre, come mostrato nel grafico, la **radice positiva esiste ed è unica**



Poichè $h(1) = 3\alpha$ mentre $g(1) = 1$, risulta $\xi = 1$ se $\alpha = 1/3$. Ne deduciamo che la radice positiva è maggiore di 1 se $\alpha > \frac{1}{3}$

Se $\alpha = 1$, l'equazione diventa $4 - x^2 = x^3$.

Nell'intervallo $I = [1,\ 1.5]$,

$$x = \phi(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$$

genera un **procedimento iterativo convergente**.

Infatti, ϕ è una funzione continua, derivabile e positiva in I.

Inoltre

$$\phi'(x) = -\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(4 - x^2)^2}} < 0 \quad \forall\, x \in I.$$

Quindi ϕ è decrescente, da cui

$$\phi(1) \geq \phi(1.5).$$

Poichè $\phi(1) = \sqrt[3]{3} \approx 1.44$ e $\phi(1.5) \approx 1.20$, risulta

$$\phi(I) \subset I.$$

Inoltre, si osserva che $|\phi'(x)| = \frac{2}{3}\frac{|x|}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}.$

La funzione a secondo membro è una funzione monotona crescente in I in quanto è il prodotto di funzioni monotone crescenti e positive in I e quindi

$$|\phi'(x)| \leq |\phi'(1.5)| = k \approx 0.69 < 1.$$

Poichè $\phi'(x) < 0 \quad \forall\, x \in I$, il metodo converge, producendo approssimazioni della radice ξ alternativamente per eccesso e per difetto.

Poichè $\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, risulta $\phi'(\xi) \neq 0$

e quindi l'ordine di convergenza del metodo iterativo è $\mathbf{p = 1}$.

Per stimare il numero di iterazioni necessarie si usa la seguente disuguaglianza

$$|e_n| = |x_n - \xi| \leq \frac{k^n}{1-k}(b-a)$$

che nel caso considerato diventa

$$|e_n| = |x_n - \xi| \leq \frac{0.69^n}{1-0.69}(1.5-1)$$

Richiedendo 5 decimali significativi alla approssimazione prodotta, risulta

$$|e_n| < \epsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$$

cioè

$$\frac{0.69^n}{0.31}(0.5) < 0.5 \cdot 10^{-5}$$

da cui

$$n > \frac{log(2 \cdot (0.31) \cdot 0.5 \cdot 10^{-5})}{log(0.69)} \approx 34.18.$$

Considerando le iterate si ha

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$
2	1.407779816636963	0.307779816636963
3	1.263722089604660	0.144057727032303
4	1.339424732696048	0.075702643091388
5	1.301761199775750	0.037663532920298
6	1.321041758493116	0.019280558717367
7	1.311311289649813	0.009730468843303
8	1.316257901162381	0.004946611512568
9	1.313752451659470	0.002505449502911
10	1.315023829271998	0.001271377612529
11	1.314379285273200	0.000644543998798
12	1.314706203444088	0.000326918170888
13	1.314540428132803	0.000165775311285
14	1.314624500689312	0.000084072556509
15	1.314581866160240	0.000042634529072
16	1.314603487493636	0.000021621333396
17	1.314592522800411	0.000010964693225
18	1.314598083302941	0.000005560502530
19	1.314595263428300	0.000002819874641

Infine, si osserva che le funzioni

$$\phi_1(x) = \sqrt{4 - x^3},$$

$$\phi_2(x) = \frac{4}{x^2} - 1$$

$$\phi_3(x) = x^3 + x^2 + x - 4$$

non sono adatte ad approssimare la radice positiva della funzione considerata in quanto per esse non sono verificate le condizioni $\phi(I) \subseteq I$ e $|\phi'(x)| < 1 \quad \forall\, x \in I$.

Esercizio

Si considerino le seguenti funzioni

$$\phi_1(x) = x^2-2; \quad \phi_2(x) = \sqrt{2+x}; \quad \phi_3(x) = -\sqrt{2+x}; \quad \phi_4(x) = 1+\frac{2}{x},\ x \neq 0.$$

1.1) Specificare quante e quali di esse sono adatte ad approssimare almeno uno zero della funzione $f(x) = x^2 - x - 2$ con il metodo delle approssimazioni successive;

1.2) per ognuna delle funzioni individuate al punto precedente, caratterizzare la successione delle approssimazioni successive (scelta dell'approssimazione iniziale, coefficiente di contrazione, monotonia ordine di convergenza);

1.3) proporre, se possibile, una funzione diversa dalle precedenti che sia adatta ad approssimare almeno lo zero positivo di f con il metodo delle approssimazioni successive.

Soluzione:

La ricerca del punto unito delle 4 funzioni è equivalente a risolvere l'equazione non lineare $x^2 - x - 2 = 0$, la quale ha due radici $\xi_1 = -1$ e $\xi_2 = 2$.

La funzione ϕ_1 non può generare procedimenti iterativi convergenti ad uno degli zeri della funzione in quanto risulta $\phi_1'(x) = 2x$ e quindi

$$|2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/2,$$

intervallo di valori che non contiene le due radici.

La funzione ϕ_2, essendo positiva, può convergere solo alla radice positiva $\xi_2 = 2$. Si osserva che

$$\phi_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

è sicuramente minore di 1 per $x \in I = [1, 3]$. In questo intervallo, inoltre, $\phi_2'(x)$ è monotona decrescente, e poichè $\phi_2(1) = \sqrt{3} \in I$ e

$\phi_2(3) = \sqrt{5} \in I$, possiamo concludere che ϕ_2 genera un procedimento iterativo convergente a ξ_2. Inoltre, poichè $\phi_2 > 0$, la convergenza è monotona e l'ordine di convergenza è 1 mentre la costante di contrazione vale $k = max_{x \in I}(|\phi_2'(x)|) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Stesse argomentazioni valgono per la funzione ϕ_3 che genera un procedimento iterativo convergente a $\xi_1 = -1$, per esempio nell'intervallo $I = [-1.5, 0]$.

La funzione ϕ_4 ha come derivata prima la funzione $\phi_4'(x) = -2/x^2$. Ne segue che

$$\frac{2}{x^2} < 1 \Leftrightarrow 2 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2} \wedge x > \sqrt{2},$$

e dunque il procedimento iterativo non può convergere alla radice negativa. Inoltre, poichè $\phi_4' < 0$, ϕ_4 è monotona decrescente e quindi, scelto $I = [1.5, 3]$, risulta $\phi_4(1.5) = 7/3 \in I$ e $\phi_4(3) = 5/3 \in I$.

Concludiamo, dunque, che la ϕ_4 genera un procedimento iterativo convergente a ξ_2 in I, la convergenza non è monotona in quanto $\phi'_4(x) < 0$, l'ordine di convergenza è 1 mentre la costante di contrazione è $k = max_{x \in I} |\phi'_4(x)| = |\phi'_4(1.5)| = 8/9$.

Infine, poichè $f(x), f'(x), f''(x)$ sono funzioni continue in $\mathbf{R}$, $f'(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$ e $f''(x) = 2 > 0, \quad \forall\ x \in \mathbf{R}$, è possibile individuare due intervalli, che non contengono il punto $x = 1/2$, in cui il metodo di Newton genera un procedimento iterativo convergente alle due radici dell'equazione non lineare. L'approssimazione iniziale è l'estremo di Fourier dell'intervallo considerato, la convergenza è monotona e l'ordine di convergenza è $p = 2$.

Esercizio

Si consideri la seguente equazione non lineare dipendente dal parametro reale β :

$$\beta x = e^{-x}, \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

1. Stabilire per quali valori di β l'equazione non lineare ammette un'unica radice reale.

2. Scelto $\beta = 1$ e detta α la radice, determinare se esistono valori del paramtero reale ω, con $\omega > 0$, per cui il procedimento iterativo

$$x_{n+1} = \frac{\omega e^{-x_n} + x_n}{1 + \omega}$$

converge ad α per ogni scelta dell'approssimazione iniziale.

3. Tra i valori di ω determinati al punto precedente, individuare quello per cui la convergenza è massima.

Soluzione Si osserva che la radice corrisponde all'intersezione di una retta passante per l'origine e la funzione esponenziale (funzione positiva e decrescente) e quindi se $\beta = 0$, l'intersezione sicuramente non esiste in quanto la funzione esponenziale non assume mai valore zero.

D'altra parte

$$\lim_{x \to +\infty} (\beta x - e^{-x}) = \pm\infty \quad (+\infty \text{ se } \beta > 0, -\infty \text{ se } \beta < 0)$$

$$\lim_{x \to -\infty} (\beta x - e^{-x}) = -\infty$$

Ne segue che per $\beta > 0$ esiste sicuramente una radice ed è anche unica, mentre non è così per i valori di β negativi. Infatti, $\frac{\partial}{\partial x}(\beta x - e^{-x}) = \beta + e^{-x} = 0 \iff x = -log(-\beta)$, che esiste per $\beta < 0$, mentre per $\beta > 0$ risulta $\frac{\partial}{\partial x}(\beta x - e^{-x}) > 0 \quad \forall\, x$

Prima di tutto si osserva che, quando $\beta = 1$,

$$\frac{\omega e^{-x} + x}{1 + \omega} = x \Longleftrightarrow e^{-x} = x.$$

Ne segue che la successione $x_{n+1} = \frac{\omega e^{-x_n} + x_n}{1+\omega}$, se converge, sicuramente converge ad α.

Inoltre, definita $f(x) = x - e^{-x}$, risulta

$f(0) = -1 < 0$ mentre $f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$,

e quindi l'intervallo $I = [0,\ 1]$ contiene l'unico zero di f.

La funzione

$$\varphi(x) = \frac{\omega e^{-x} + x}{1 + \omega}$$

è una media pesata, con pesi positivi $w_1 = \frac{\omega}{1+\omega} < 1$ e $w_2 = \frac{1}{1+\omega}$

e tali che $w_1 + w_2 = 1$, di funzioni che assumono valori nell'intervallo $[0,\ 1]$, e quindi $\varphi(I) \subseteq I$

Inoltre, poichè

$$\varphi''(x) = \frac{\omega e^{-x}}{1+\omega} > 0 \quad \forall\, x,$$

$\varphi'(x) = \frac{1}{1+\omega}(-\omega e^{-x}+1)$ è monotona crescente e si verifica facilmente che

$$-1 < \frac{1}{1+\omega}(-\omega e^{-x}+1) < 1$$

è vera in I per tutti i valori di $\omega > 0$

Si conclude che la successione $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ genera un procedimento iterativo convergente ad α in $I = [0,\ 1]$.

Infine, si osserva che $\varphi'(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \omega = \frac{1}{\alpha}$, mentre $\varphi''(\alpha) = \frac{1}{1+\omega} \neq 0$

Ne segue che esiste un solo valore di ω ($\omega = \frac{1}{\alpha}$) per cui la convergenza del procedimento iterativo è quadratica. In tutti gli altri casi la convergenza è lineare.

Esercizio

Si consideri il seguente procedimento iterativo dipendente dal parametro reale α:

$$z_{i+1} = f(z_i)$$

con $f(z) = \alpha cos(z), \quad z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

1. Studiarne la convergenza in funzione del parametro α, prima nel caso in cui $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ e poi per $\alpha \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$.

2. In corrispondenza dei valori di α per cui la successione z_i converge, valutare l'ordine di convergenza.

3. Dare, se possibile, una stima del limite con almeno due decimali esatti.

Esercizio

Data la funzione $f(x) = e^{\alpha x - 1} - \frac{x^2}{4}$ con $\alpha \in \mathbf{R}$,

- individuare per quale valore del parametro α la funzione $f(x)$ ammette un'unica radice ξ nell'intervallo $I = [1.5, 2.5]$;

- detto α_o il valore del parametro α per cui $\xi = 2$, stabilire se la funzione $\phi(x) = 2\sqrt{e^{\alpha_o x - 1}}$ genera nell'intervallo I un procedimento iterativo convergente a ξ.

  In caso di risposta affermativa, indicare il coefficiente di contrazione $\mathbf{k}$ e l' ordine di convergenza del metodo ottenuto.

  Inoltre, dare una stima del numero di iterazioni necessarie affinchè l'approssimazione prodotta abbia almeno 3 cifre decimali esatte.

Esercizi d’esame

ESERCIZIO 1

Data l'equazione non lineare

$$f(x;\lambda) = (1 - \sin x)^2 - \lambda\, x^3 = 0\,,$$

dove λ è un parametro reale,

1.1) individuare per quali valori del parametro λ l'equazione ammette un'unica radice nell'intervallo $[0,1]$.

1.2) posto $\lambda = 1/2$, determinare quante iterazioni sono necessarie ad approssimare la radice in $[0,1]$ con il metodo delle tangenti con 3 decimali esatti.

Soluzione

1.1) Si ha $f(0;\lambda) = 1 > 0$ e $f(1;\lambda) = (1 - \sin(1))^2 - \lambda$. Affinché l'equazione abbia una radice nell'intervallo $[0,1]$ deve essere

$$f(1;\lambda) = (1 - \sin(1))^2 - \lambda < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda > (1 - \sin(1))^2 \approx 0.0251$$

Poichè per questi valori di λ si ha

$$f'(x;\lambda) = -2(1 - \sin x)\cos x - 3\lambda x^2 < 0\,, \qquad x \in [0,1]\,,$$

la funzione f è monotona decrescente e la radice è unica.

1.2) Per $\lambda = 1/2$ l'equazione

$$f(x;\lambda) = (1 - \sin x)^2 - \frac{1}{2}x^3 = 0\,,$$

ha un'unica radice nell'intervallo $[0,1]$ (cfr. punto precedente). Inoltre la derivata $f'(x)$ non si annulla in tale intervallo, quindi si può utilizzare il metodo delle tangenti per approssimare la radice.

Il metodo converge per un'opportuna scelta dell'approssimazione iniziale. Utilizzando come approssimazione iniziale il punto medio dell'intervallo, il metodo delle tangenti

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}\,, & \qquad i = 0, 1, 2, \dots\,, \\ x_0 = 0.5\,, \end{cases}$$

da i risultati in tabella

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
0	0.5	
1	0.661790	0.16179
2	0.664688	0.00290
3	0.664687	$0.9 \cdot 10^{-6}$

Sono sufficienti 3 iterazioni per raggiungere l'accuratezza richiesta.

ESERCIZIO 2

Data l'equazione non lineare $g(y;\lambda) = \mathrm{e}^{-y} - 2y - \lambda = 0$, dipendente dal parametro reale λ,

2.1) determinare per quali valori di λ l'equazione ammette un'unica radice nell'intervallo $I = [0,1]$;

2.2) posto $\lambda = -2$, verificare se le funzioni di iterazione

$$\psi_1(y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y} + 1 \qquad \psi_2(y) = y + \frac{\mathrm{e}^{-y} - 2y + 2}{\mathrm{e}^{-y} + 2}$$

sono adatte ad approssimare la radice nell'intervallo $D = [1,2]$ con il metodo delle approssimazioni successive;

2.3) in caso di convergenza, specificare per ciascuna funzione la scelta dell'approssimazione iniziale.

Soluzione

2.1) La funzione $g(y;\lambda)$ è monotona decrescente per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} g(y;\lambda) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(y;\lambda) = -\infty$$

Si deduce quindi che $g(y;\lambda)$ ha un'unica radice $\xi \in \mathbf{R}$.

Si verifica facilmente che $\xi = 0$ per $\lambda = 1$ mentre $\xi = 1$ per $\lambda = \frac{1}{\mathrm{e}} - 2 \approx -1.63$, quindi $\xi \in [0,1]$ per $\frac{1}{\mathrm{e}} - 2 \le \lambda \le 1$.

Si suggerisce di fare lo studio grafico dell'equazione $\mathrm{e}^{-y} = 2y + \lambda$.

2.2) Per $\lambda = -2$ l'equazione diventa

$$g(y;-2) = \mathrm{e}^{-y} - 2y + 2 = 0\,.$$

Si ha $y - \psi_1(y) = y - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y} - 1 = -2\,g(y;2) = 0$,

quindi il punto unito della trasformazione ψ_1 è anche la radice dell'equazione $g(y;2) = 0$.

Per verificare se la funzione ψ_1 è adatta ad approssimare l'unica radice nell'intervallo $I = [1,2]$ bisogna verificare se soddisfa le ipotesi del teorema del punto unito. La funzione ψ_1 è monotona decrescente per cui $\forall\, y \in [1,2]$

$$1 < 1.068 \approx \psi_1(2) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}+1 \leq \psi_1(y) \leq \psi_1(1) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}+1 \approx 1.184 < 2$$

Inoltre $|\psi_1'(y)| = \mathrm{e}^{-y}/2$ è monotona decrescente per cui

$$\max_{y\in[1,2]} |\psi_1'(y)| = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} \approx 0.184 < 1$$

La funzione di iterazione è adatta ad approssimare la radice.

La funzione ψ_2 è la funzione di iterazione del metodo di Newton. La funzione $g(y;-2)$ è infinitamente derivabile, inoltre per ogni $y \in \mathbf{R}$ si ha $g'(y;-2) = -\mathrm{e}^{-y} - 2 < 0$. Quindi il metodo di Newton converge per un'opportuna scelta dell'approssimazione iniziale.

2.3) Il metodo dell approssimazioni successive $y^{k+1} = \psi_1(y^k)$, $k = 0, 1, \ldots$, converge per qualunque $y^{(0)} \in [1, 2]$. Poiché $g''(y; -2) = \mathrm{e}^{-y} > 0$ per ogni $y \in \mathbf{R}$, il metodo di Newton converge sicuramente se si sceglie come approssimazione iniziale l'estremo di Fourier dell'intervallo, cioè l'unico estremo per cui $g(y_0; -2)\, g''(y_0; -2) > 0$. Per la funzione in studio si ha $y_0 = 1$.

Si suggerisce di dare una stima a priori del numero di iterazioni necessarie per approssimare la radice con 3 decimali esatti utilizzando il metodo delle approssimazioni successive e di verificare tale stima eseguendo le iterazioni. Eseguire anche le iterazioni del metodo di Newton. Quale dei due metodi è piú veloce? Perchè ?

ESERCIZIO 3

Data la funzione

$$f(x) = (x^2 + \alpha) cos x + sin x, \quad x \in I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right],$$

dove α è un parametro reale,

- determinare se per $\alpha > 0$ esiste l'estremo di Fourier dell'intervallo I;

- posto $\alpha = -1$, verificare se il metodo delle tangenti è adatto ad approssimare lo zero di modulo massimo specificando, in caso di convergenza, la scelta dell'approssimazione iniziale e l'ordine di convergenza.

Soluzione:

Per $\alpha > 0$ la funzione $f(x)$ è monotona decrescente con $f(\pi/2)f(2\pi/3) < 0$, quindi $f(x)$ ha un unico zero nell'intervallo I.

L'intervallo I ha l'estremo di Fourier se $f''(x) \neq 0$ per $x \in I$. Poichè

$$f''(x) = (2 - x^2 - \alpha)cos(x) - (4x + 1)sin(x)$$

si ha $f''(\pi/2) = -2\pi - 1 < 0$ e $f''(2\pi/3) = (2 - 4\pi^2/9 - \alpha)(-1/2) - (8\pi/3 + 1)(\sqrt{3}/2) \approx -6.93 + \alpha/2$.

Quindi, $f''(2\pi/3) < 0$ se $\alpha < -2(-6.93) \approx 13.86$.

Poichè $f''(x)$ è una funzione convessa in I, per $0 < \alpha < 13.86$, f'' non si annulla in I ed esiste l'estremo di Fourier, cioè $x_0 = 2\pi/3$.

Per $\alpha = -1$ è facile verificare che esiste un unico zero in I che può essere approssimato con il metodo delle tangenti in quanto $f'(x) \neq 0$ per $x \in I$. Il metodo converge sicuramente se si sceglie come approssimazione iniziale l'estremo di Fourier dell'intervallo $x_0 = 2\pi/3$. Poichè $f''(x) \neq 0$ per $x \in I$, il metodo ha ordine di convergenza quadratica.

ESERCIZIO 4

Data la funzione

$$\eta(t) = \frac{\mathrm{e}^{Gt}}{1 + \kappa(\mathrm{e}^{Gt} - 1)} - 4\,,$$

dove G e κ sono due parametri reali non negativi,

4.1) trovare i valori di G e κ per i quali $\eta(t)$ ha un unico zero nel semipiano positivo;

4.2) posto $G = 1$ e $\kappa = 0.1$, individuare un intervallo di separazione e un metodo iterativo adatti ad approssimare lo zero positivo specificando le proprietà della successione delle approssimazioni (approssimazione iniziale, ordine di convergenza, monotonia, etc.).

ESERCIZIO 5

Data la funzione

$$f(x) = \alpha + \beta x^2 - \cos(\pi x)\,,$$

dove α e $\beta \geq 0$ sono due parametri reali,

5.1) trovare i valori di α e β per i quali $f(x)$ ha almeno uno zero nell'intervallo $I = [0, 1]$;

5.2) posto $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, individuare un intervallo di separazione di ampiezza non superiore a 0.25 adatto ad approssimare lo zero positivo con il metodo delle tangenti.

Soluzione

f è una funzione continua per ogni x reale, e lo sono anche f' e f''. Inoltre

$$f(0) = \alpha - 1 \qquad\qquad f(1) = \alpha + \beta + 1$$

Quindi f ha uno zero in $[0,\ 1]$ se

$$(\alpha - 1)(\alpha + \beta + 1) > 0 \Longleftrightarrow -(1 + \beta) < \alpha < 1$$

Poichè per $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ risulta

$$f'(x) = 2x + \pi sin(\pi x) > 0 \quad \forall x \in I$$

lo zero è unico in I.

Per trovare un intervallo contenente lo zero e con ampiezza non superiore a 0.25, si valuta $f(0.5) = 1/4 > 0$ e quindi $f(1/4) = \frac{1-8\sqrt{2}}{16} < 0$. Quindi, l'intervallo cercato è $I_1 = [0.25,\ 0.5]$. Inoltre, pochè $f''(x) = 2 + \pi^2 cos(\pi x) > 0 \forall x \in I_1$, si può scegliere l'estremo di Fourier come approssimazione iniziale del metodo di Newton-Raphson, cioè $x_0 = 0.5$

ESERCIZIO 6

Data la funzione

$$f(x) = log(x+\alpha) + \sqrt{x+4} - 1, \qquad x \in \mathbf{R},$$

dove α è un parametro reale,

6.1) determinare per quali valori di α la funzione $f(x)$ ha almeno uno zero positivo;

6.2) posto $\alpha = 1/e$ (e è il numero di Nepero), verificare se le funzioni di iterazione

$$\phi_1(x) = x - \frac{log(x+e^{-1}) + \sqrt{x+4} - 1}{\frac{1}{x+e^{-1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+4}}}, \qquad \phi_2(x) = (1 - log(x+e^{-1}))^2 + 4$$

sono adatte ad approssimare la radice nell'intervallo $[-0.2, 0.2]$ con il metodo delle approssimazioni successive.

ESERCIZIO 7

7.1 Descrivere dettagliatamente i metodi di punto fisso per la soluzione di equazioni non lineari e dimostrare almeno un teorema di convergenza.

7.2 Considerata la successione

$$\begin{cases} u_k = e^{u_{k-1}} - 0.5u_{k-1}^2 - u_{k-1} - 1, & k \geq 1 \\ u_0 \in [-0.5, 0.5] \end{cases},$$

determinare il valore limite

$$\lambda = \lim_{k \to +\infty} u_k.$$

ESERCIZIO 8

Si consideri la seguente equazione non lineare

$$\sqrt{x-1} - e^{\alpha x} = 0$$

dipendente dal parametro reale α.

8.1 Determinare per quali valori di α l' equazione ammette radici reali.

8.2 Posto $\alpha = -2$, proporre almeno due funzioni di iterazione distinte che generano procedimenti iterativi convergenti, ma con diverso ordine di convergenza, alla radice più piccola mediante il metodo delle approssimazioni successive.

8.3 Per ognuno dei metodi generati al passo precedente, specificare la scelta dell'approssimazione iniziale e il tipo di convergenza.

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: Cap. 3, §§ 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 (escluso metodo di falsa posizione), 3.6, 3.7

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli *Esercizi di Calcolo Numerico*: Es. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.13, 1.14, 1.19, 1.20, 1.21, 1.25, 1.26, 7.11, 7.13, 7.18, 7.20, 7.22, 7.29, 7.36, 7.43, 7.53, 7.54, 7.55, 7.61, 7.62