SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME DI MECCANICA RAZIONALE
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
PROF. A. PRÁSTARO
19/02/2013

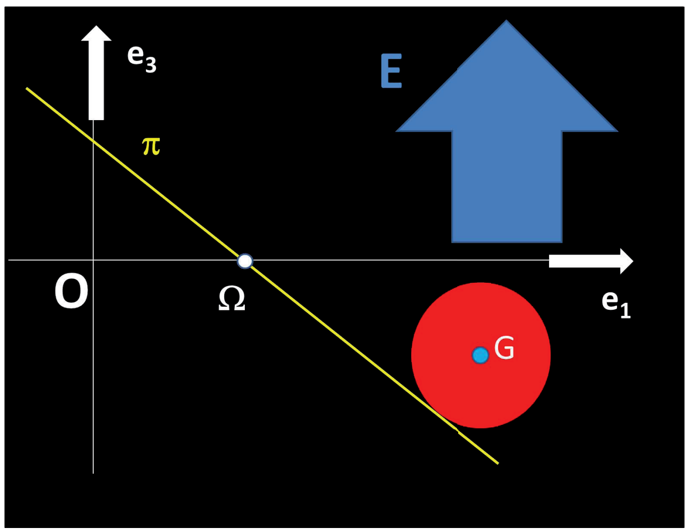

FIG. 1. Disco D, omogeneo, che rotola senza strisciare su di un piano inclinato, π, che trasla con velocità costante orizzontale. Il baricentro G è portatore di una carica elettrica $q > 0$. Tutto il sistema è immerso in un campo elettrico costante e diretto verticalmente verso l'alto.

"*Moving constraints, friction and conservation laws !* "

• **SISTEMA MECCANICO**.
Il sistema meccanico è costituito da un disco D, omogeneo di raggio R, che rotola senza strisciare su di un piano inclinato π. Questo piano inclinato trasla con velocità costante u orizzontale. Il baricentro G del disco è portatore di una carica elettrica $q > 0$. Tutto il sistema è immerso in un campo elettrico costante, E, verticale ed orientato verso l'alto. (Vedere Fig. 1.)

• **QUESITI**
1) Determinare il moto del sistema rispetto ad un osservatore solidale con il campo elettrico E. (Utilizzare la Meccanica Lagrangiana.)
2) Dimostrare che esiste un sistema completo di leggi di conservazione.
3) Calcolare la forza di attrito che il piano inclinato esercita sul disco.

• **SOLUZIONE**

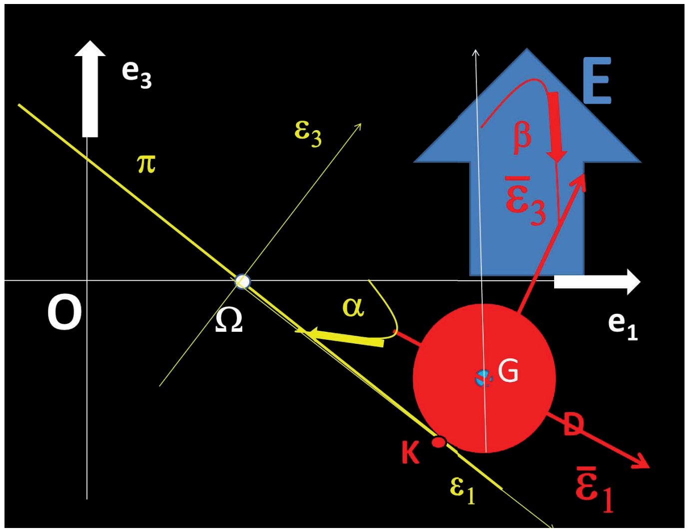

FIG. 2. Riferimenti affini solidali con osservatore inerziale, piano inclinato π e con disco D, rispettivamente.

1) Prendiamo un riferimento affine $\{O,(e_k)_{1\le k\le 3}\}$ solidale con il campo elettrico E, in modo che $E=|E|e_3$ ed il piano inclinato π giace nel piano verticale $P(e_1,e_3)$. (V. Fig. 2.) Inoltre prendiamo un riferimento affine $\{\Omega,(\epsilon_k)_{1\le k\le 3}\}$ con $\Omega=\pi\cap\overline{O,e_1}$, $\epsilon_1\|\pi$ e $\epsilon_3\perp\pi$. Indichiamo con K il punto di contatto del disco con π e poniamo $\xi=\overline{\Omega K}$. Sia inoltre $\{G,(\bar\epsilon_k)_{1\le k\le 3}\}$ un riferimento affine solidale con il disco. Poniamo $\beta=\widehat{e_3\bar\epsilon_3}$. Le coordinate del baricentro G nel riferimento solidale con il piano sono $(\xi^k_G)=(\xi,0,R)$. Le coordinate di Ω nel riferimento inerziale sono $(x^k_\Omega)=(x_\Omega,0,0)$. Per ottenere le coordinate (x^k_G) del baricentro G nel riferimento inerziale, possiamo considerare la trasformazione affine $x^k_G=x^k_\Omega+A^k_j\,\xi^j_G$, con

$$(A^k_j)=\left(\begin{array}{ccc}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{array}\right),\ \alpha\equiv\widehat{e_1\epsilon_1}.$$

Più esplicitamente otteniamo la trasformazione affine riportata in (1).

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x^1_G=\xi\,\cos\alpha+R\,\sin\alpha+x_\Omega\\ x^2_G=0\\ x^3_G=-\xi\,\sin\alpha+R\,\cos\alpha.\end{array}\right.$$

Imponiamo ora la condizione che il piano trasla con velocità costante $u=|u|\,e_1=\dot x^k_\Omega e_k$. Integrando, otteniamo $(x^k_\Omega)=(x_\Omega=|u|\,t,0,0)$. (Abbiamo supposto per semplicità che inizialmente $\Omega=O$.) Tenendo conto questa condizione, possiamo riscrivere la (1) nella (2).

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} x^1_G=\xi\,\cos\alpha+R\,\sin\alpha+|u|\,t\\ x^2_G=0\\ x^3_G=-\xi\,\sin\alpha+R\,\cos\alpha.\end{array}\right.$$

Possiamo, quindi, prendere come coordinate lagrangiane del disco $(q^k) = (\xi, \beta)$. In Tab. 1 sono riportati gli angoli di Euler del disco in relazione alle sue coordinate lagrangiane.

TAB. 1. Angoli di Euler del disco D, rispetto osservatore inerziale.

Angoli di Euler	q^k
ϕ	$\frac{\pi}{2}$
ψ	$-\frac{\pi}{2}$
θ	β

L'asse dei nodi ha versore $N = e_2 = \epsilon_2 = \bar{\epsilon}_2$.

La velocità angolare risulta $\omega = \dot{\beta}\, e_2$. La condizione di non-strisciamento nel punto di contatto K risulta

$$v_{K\in D} = v_{K\in \pi} \Leftrightarrow v_G + \omega \times \overrightarrow{GK} = |u|\, e_1.$$

Tenendo conto che $v_G = e_1[\dot{\xi}\, \cos\alpha + |u|] + e_3[-\dot{\xi}\, \sin\alpha]$, come si vede derivando rispetto al tempo la (2), si ottengono le condizioni (3).

$$(3) \qquad \begin{cases} (\dot{\xi} - \dot{\beta}\, R)\, \cos\alpha = 0 \\ (\dot{\xi} - \dot{\beta}\, R)\, \sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Quindi la condizione di non-strisciamento si riduce al seguente vincolo non-olonomico: $\dot{\xi} = \dot{\beta}\, R$.
La forza peso $F = -\mu g \partial z_G$ ammette il potenziale $f_{peso} = \mu g\, z_G = \mu g\, x_G^3 = \mu g(-\xi \sin\alpha + R\cos\alpha)$. Analogamente si ottiene per la forza di Lorentz, $F_{Lorentz} = q\, \partial z_G$, ed il suo potenziale $f_{Lorentz} = -q\, z_G = -q\, x_G^3 = -q(-\xi\sin\alpha + R\cos\alpha)$. Quindi il potenziale totale risulta $f = f_{peso} + f_{Lorentz} = (\mu\, g - q)(-\xi\sin\alpha + R\cos\alpha)$. Per l'energia cinetica otteniamo

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\mu v_G^2 + \frac{1}{2} I_{ij}^{(G)} \omega^i \omega^j = \frac{1}{2}(\mu + \frac{B}{R^2})\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\mu|u|^2 + \mu|u|\dot{\xi}\cos\alpha.$$

Abbiamo posto

$$(I_{ij}^{(G)}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

In conclusione possiamo scrivere la Lagrangiana $L = \mathcal{T} - f$ nella forma riportata in (4).

$$(4) \qquad L = a\,\dot{\xi}^2 + b\,\dot{\xi} + c\,\xi + d, \left\{ \begin{array}{l} a \equiv \frac{1}{2}(\mu + \frac{B}{R^2}) \\ b \equiv \mu|u|\cos\alpha \\ c \equiv (\mu g - q)\sin\alpha \\ d \equiv -(\mu g - q) R\cos\alpha + \frac{1}{2}\mu|u|^2. \end{array} \right\}.$$

La corrispondente equazione di Lagrange è riportata in (5).

$$(5) \qquad 2a\ddot{\xi} - c = 0.$$

L'equazione differenziale (5) si integra immediatamente ottenendo la funzione $\xi(t)$ riportata in (6).

$$(6) \qquad \xi(t) = \frac{c}{4a}\, t^2 + \dot{\xi}_0\, t + \xi_0$$

dove $\dot{\xi}_0$ e ξ_0 sono costanti arbitrarie.

2) Poichè la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, otteniamo che l'integrale primo riportato in (7).

$$H = (\partial\dot{\xi}.L)\dot{\xi} - L = a\,\dot{\xi}^2 - c\,\xi - d = c_1. \tag{7}$$

Questo costituisce un sistema completo di integrali primi. Possiamo anche verificare a posteriore che $H = c_1$ è equivalente all'equazione di Lagrange (5). Infatti, derivando rispetto al tempo la (7) otteniamo $\dot{\xi}(2a\,\ddot{\xi} - c) = 0$. Ammettendo che $\dot{\xi}$ possa essere arbitraria, riotteniamo l'equazione $2a\,\ddot{\xi} - c = 0$.

Notiamo, che essendo i vincoli, dipendenti dal tempo, l'Hamiltoniana non coincide necessariamente con $\mathcal{T} + f$. Infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{T} + f \quad &= \tfrac{1}{2}(\mu + \tfrac{B}{R^2})\dot{\xi}^2 + \tfrac{1}{2}\mu|u|^2 + \mu|u|\dot{\xi}\cos\alpha + (\mu g - q)(-\xi\sin\alpha + R\cos\alpha) \\ &= a\dot{\xi}^2 + b\dot{\xi} - c\xi - d + \mu|u|^2 \neq H. \end{aligned}$$

Possiamo anche verificare direttamente che $\mathcal{T} + f = c_2$ non può costituire, in generale, una legge di conservazione per l'equazione di Lagrange (5). Infatti, se deriviamo rispetto al tempo $\mathcal{T}+f = c_2$, otteniamo: $\frac{d}{dt}(\mathcal{T}+f) = \dot{\xi}\,(2a\,\ddot{\xi} - c) + b\ddot{\xi} = 0$. Quindi $\mathcal{T} + f = c_2$ è una legge di conservazione dell'equazione di Lagrange se e solo se $b = 0$, cioè se e solo se $|u| = 0$ o $\cos\alpha = 0$. Ma questo significa che $\mathcal{T} + f = c_2$ è una legge di conservazione se e solo se il piano è in quiete, oppure è verticale !

3) La reazione vincolare in K si ottiene dalla prima equazione cardinale, $\mu a_G = F_{peso} + F_{Lorentz} + R_K$, del disco D. Abbiamo

$$a_G = e_k\,\frac{d}{dt}(v_G^k) = \ddot{\xi}(\cos\alpha\,e_1 - \sin\alpha\,e_3) = \ddot{\xi}\,\epsilon_1.$$

Tenendo conto che $F_{peso} = -\mu g(-\sin\alpha\,\epsilon_1 + \cos\alpha\,\epsilon_3)$ e $F_{Lorentz} = q(-\sin\alpha\,\epsilon_1 + \cos\alpha\,\epsilon_3)$, ricaviamo che la reazione vincolare in K è riportata in (8).

$$R_K = R^k\,\epsilon_k, \begin{cases} R^1 = \sin\alpha\,\frac{\mu g - q}{\mu + \frac{B}{R^2}}[1 - \mu - \frac{B}{R^2}] \\ R^2 = 0 \\ R^3 = (\mu g - q)\cos\alpha. \end{cases} \tag{8}$$

La forza di attrito coincide con la reazione vincolare tangente, R_T, al piano inclinato π. $R_K = R_T + R_N$. Quindi ricaviamo che $R_T = R^1\,\epsilon_1$. Ne viene che questa forza di attrito rimane costante qualunque sia il moto ammissibile.

Osservazione 0.1. Notiamo che la condizione che il disco rimanga in contatto con il piano inclinato è espressa dalla condizione che la componente normale della reazione vincolare, sia positiva, cioè $R^3 > 0$. Pertanto se $\alpha = \widehat{e_1\epsilon_1}$, con $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, cioè $\cos\alpha > 0$, deve essere $\mu g - q > 0$. Se invece fosse $\frac{\pi}{2} \le \alpha < 3\frac{\pi}{2}$, allora deve essere $\mu g - q < 0$