SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME DI MECCANICA RAZIONALE
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
PROF. A. PRÁSTARO
20/06/2013

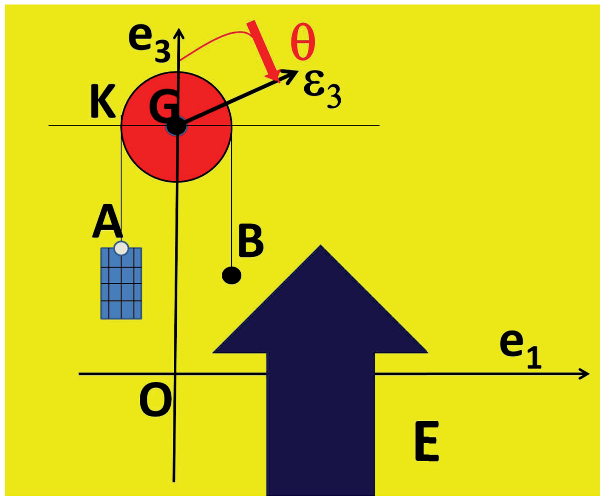

FIG. 1. Sistema montacarichi a gabbia di Faraday con sistema di blocco.

• **SISTEMA MECCANICO**. "*Farady elevator and ... singular solutions ...*"
Il sistema meccanico è costituito da una gabbia metallica G_0, che a pieno carico ha una massa μ, e che è appesa all'estremo A di una fune ideale, lunga l, avvolta zenza strisciamento su di una carrucola di raggio R. Il baricentro G della carrucola è fisso ad una distanza d dal suolo. All'altro estremo B della fune è appesa una massa puntiforme $\mu_B = \mu$. G_0 è portatrice di una carica elettrica $q > 0$. (Per semplicità si consideri questa carica come applicata nel baricentro di G_0.) Tutto il sistema è immerso in un campo elettrico costante E, verticale. (La sua polarità, (verso) può essere fatta variare.)
(Vedere Fig. 1.)

• **QUESITI**

1) Determinare l'equazione di Lagrange del sistema meccanico, rispetto ad un osservatore inerziale solidale con il baricentro G della carrucola, ed assumendo che il campo elettrico E è diretto verso l'alto.
2) Calcolare il tempo $t_{arrivo} > 0$, impiegato da G_0 per giungere al livello $A = K$, partendo dal suolo, in stato di quiete. (V. Fig. 1.)
3) Esiste un sistema completo di integrali primi ?
4) Se all'istante t_{arrivo} si spegne il campo elettrico, ($E = 0$), quale reazione vincolare bisogna inserire in K perchè G_0 rimanga in quiete in quella posizione ?
5) Qual'e l'equazione dinamica singolare che consente un moto come quello descritto al punto **4)** ?

• SOLUZIONE

1) Prendiamo un sistema di riferimento affine inerziale come indicato in Fig. 1. Indichiamo con z_A la z-coordinata di A, con $\theta = \widehat{e_3 \epsilon_3}$, dove (G, ϵ_k) è un riferimento affine solidale con la carrucola ed avente ϵ_1 ed ϵ_3 nel piano della carrucola. Infine sia Z_B la z-coordinata della massa in B. Il sistema ha pertanto 3 gradi di liberta: $(q^k) = (z_A, z_B, \theta)$. Dalle condizioni di non-strisciamento, si ricavano anche i vincoli anolonomi $\dot{\theta} = \dot{z}_A/R$ e $\dot{z}_B = -\dot{z}_A$. Inoltre esprimendo che la fune è lunga l ricaviamo anche il vincolo olonomo $z_B = 2d + \pi R - l - z_A$. (Notiamo che la sua derivata permette di ritrovare il vincolo anolonomo $\dot{z}_B = -\dot{z}_A$.) Le forze attive sono tutte conservative e permettono di esprimere il potenziale totale nella forma $f = -zq|E| + a$, dove $z = z_A$ e $a = \mu g[2d + \pi R - (l + \frac{h}{2}] + q|E|\frac{h}{2} \in \mathbb{R}$. Inoltre l'energia cinetica totale risulta $\mathcal{T} = b\dot{z}^2$, con $b = \frac{B}{2R^2} + \mu \in \mathbb{R}$, essendo B il momento d'inerzia centrale della carrucola, rispetto all'asse centrale individuato da ϵ_2. In conclusione la Lagrangiana del sistema meccanico risulta $L = b\dot{z}^2 + zq|E| - a$, e la corrispondente equazione di Lagrange è riportata in (1).

$$2b\ddot{z} - q|E| = 0. \tag{1}$$

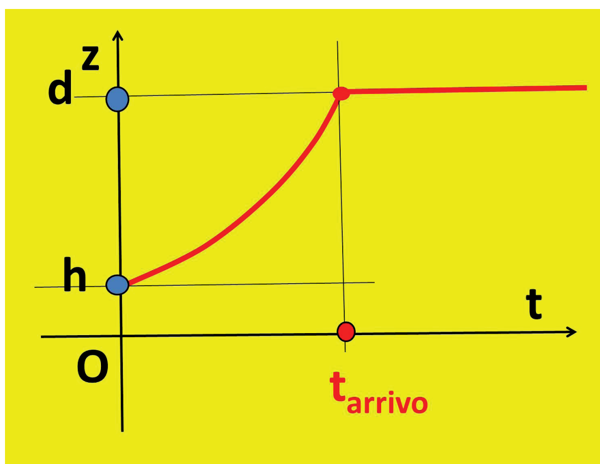

FIG. 2. Moto singolare della gabbia metallica G_0, che partendo dal suolo in una configurazione di quiete, arriva al livello K (distante d dal suolo), ancora in una posizione di quiete.

2) L'integrale generale della (1) è riportato in (2).

$$z(t) = \frac{q|E|}{4b}t^2 + \dot{z}_0 t + z_0. \tag{2}$$

Imponendo la condizione iniziale $(t = 0, z_0 = h, \dot{z}_0 = 0)$, otteniamo il moto (3).

$$z(t) = \frac{q|E|}{4b}t^2 + h. \tag{3}$$

Dalla (3) ricaviamo che il tempo di arrivo risulta:

$$t_{arrivo} = \sqrt{\frac{(d-h)4b}{q|E|}}.$$

Dai parametri implicati in questa formula si capisce dove si può agire per ottenere il tempo di arrivo desiderato.

3) Il sistema completo di integrali primi è dato dalla sola Hamiltoniana:

$$H = \mathcal{T} + f = b\dot{z}^2 - zq|E| + a = const.$$

4) Se al tempo $t = t_{arrivo}$ si spegne il campo elettrico, si ottiene che l'equazione di Lagrange si riduce alla seguente equazione $2b\ddot{z} = 0$. La soluzione di questa equazione, per $t > t_{arrivo}$, che si raccorda con continuità con la soluzione precedente, per $t < t_{arrivo}$, risulta $z(t) = (\dot{z})_{t_{arrivo}}(t - t_{arrivo}) + d$, $t > t_{arrivo}$. È allora evidente che per ridurre in quiete questo moto, non basta aver eliminato il campo elettrico, ma bisogna imporre un vincolo aggiuntivo (uno stop) in K. Questo equivale a realizzare una variazione di quantità di moto $-\mu(\dot{z})_{t_{arrivo}}e_3$, che rappresenta anche la sollecitazione alla quale lo stop è sottoposto. Qui $(\dot{z})_{t_{arrivo}} = \sqrt{q|E|(\frac{d}{h} - 1)}$.[1]

Osservazione 0.1. Vale la pena notare che per il calcolo della reazione vincolare agente sullo stop, non si può considerare che G_0 si muove di moto uniformemente accelerato, cioè con $\ddot{z}$ come dato in (1). Infatti questa equazione non tiene conto che a $t = t_{arrivo}$, viene spento il campo elettrico, quindi il moto di G_0, per $t > t_{arrivo}$ evolve secondo un'altra equazione, cioè $\ddot{z} = 0$. Le soluzioni di questa equazione si possono raccordare con quelle della (1) solo al primo ordine, cioè assumendo che la velocità di arrivo sia uguale alla velocità di partenza delle soluzioni dell'equazione $\ddot{z} = 0$. Per ridurre in quiete una soluzione di questo tipo quindi si deve fare riferimento alla variazione della quantità di moto necessaria e non all'accelerazione $\ddot{z}$ che è invece sempre ridotta a zero, quando si spegne il campo elettrico !

5) Il moto realizzato al punto **4)** non è quindi un moto regolare, ma rappresenta un moto singolare (o debole) come disegnato in Fig. 2. L'equazione dinamica che codifica un tale moto si può ottenere direttamente dall'equazione di Lagrange (1) utilizzando la funzione distributiva di Heaviside $H(t - t_0)$.[2] Questa equazione è riportata in (4).

$$2b\ddot{z} - q|E| = H(t - t_{arrivo})[2b\ddot{z} - q|E| - (z - d)]. \tag{4}$$

[1] Non è forse inutile sottolineare che la discontinuità del moto rappresentato in Fig. 2, avviene a $t = t_{arrivo}$, già al primo ordine di derivazione. Infatti $\dot{z} \neq 0$ per $t \in [t_{arrivo} - \epsilon, t_{arrivo}[$, con ϵ sufficientemente piccolo, mentre $\dot{z} = 0$ per $t > t_{arrivo}$. Quindi un tale moto non può essere descritto dall'equazione (1).

[2] Questa distribuzione e rappresentata dalla funzione scalino $H(t - t_0) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , t < t_0 \\ 1 & , t > t_0. \end{array} \right.$ (Per ulteriori informazioni vedere il libro citato in [1] nel `Programma`.)