



ESAME DI MECCANICA RAZIONALE
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
PROF. A. PRÁSTARO
21/01/2013

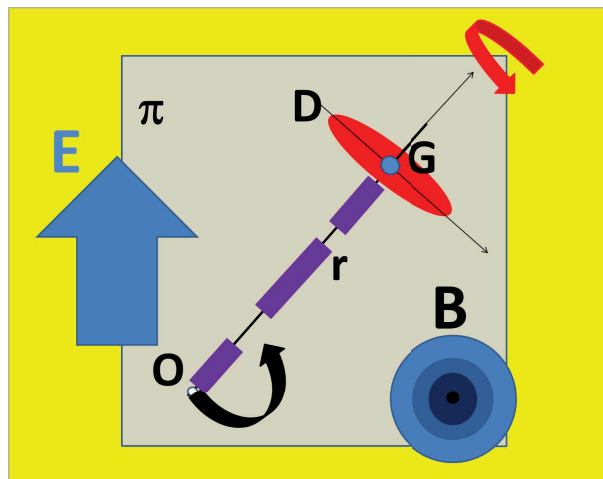


FIG. 1. Disco D , ruotante, con richiamo elastico radiale in un piano verticale π , e portatore di carica elettrica baricentrale, immerso in campo elettrico costante E ed in un campo magnetico costante B , ($B \perp E$, $B \perp \pi$).

• **SISTEMA MECCANICO.** “From non-Poinsot motions to Poinsot motions”

Il sistema meccanico è esattamente lo stesso della V Esercitazione del 21-12-2012. Quindi il sistema meccanico è costituito da un disco D , omogeneo di raggio R , piano del disco ortogonale ad una retta r , passante per il baricentro G di D . La retta r ruota in un piano verticale, π , intorno ad un punto $O \in \pi$. Il baricentro G è portatore di una carica elettrica $q > 0$. Inoltre lungo r è infilata una molla ideale di costante elastica $\kappa > 0$, puntata in O ed applicata a $G \in D$. Tutto il sistema è immerso in un campo elettrico costante E , verticale e diretto verso l’alto ed in un campo magnetico costante B , (orizzontale, $B \perp E$, $B \perp \pi$). I vincoli si considerano lisci e bilateri.

(Vedere Fig. 1.)

• **QUESITI**

1) Assumendo che le equazioni di Lagrange del sistema sono come riportate in (1). (Vedere V Esercitazione del 21-12-2012.)

(1)

$$\begin{cases} (\rho\text{-componente}) & \mu\ddot{\rho} - \mu\rho\dot{\alpha}^2 + (\mu g - q|E|)\cos\alpha + \kappa\rho - \frac{q|B|}{c}\rho\dot{\alpha} = 0 \\ (\alpha\text{-componente}) & (\mu\rho^2 + A)\ddot{\alpha} + 2\mu\rho\dot{\alpha}\dot{\rho} + \frac{q|B|}{c}\rho\dot{\rho} - (\mu g - q|E|)\rho\sin\alpha = 0 \\ (\beta\text{-componente}) & C\ddot{\beta} = 0. \end{cases}$$

dimostrare che esistono configurazioni di stato stazionario di puro spinning, dove la distanza, ρ_0 , di G da O rimane costante e differente da zero.

2) Esistono configurazioni stabili tra quelle del punto 1) ?

3) È possibile raggiungere queste configurazioni partendo dall’equatore ?

• **SOLUZIONE**

1) Dimostriamo che esistono moti di Poincot con $\dot{\beta} \neq 0$. Questi sono configurazioni di stato stazionario e sono riportati in Tab. 1. Infatti soluzioni possibili che rispet-

TAB. 1. Configurazioni di stato stazionario di puro spinning.

$\alpha = \alpha_0$	$\rho = \rho_0$	Condizioni	Hamiltoniana
--	$\rho_0 = 0$	$q E = \mu g$	$H = \frac{C}{2} \dot{\beta}_0^2 = c_2$
$\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	$\rho_0 = 0$	--	$H = \frac{C}{2} \dot{\beta}_0^2 = c_2$
$\alpha_0 = 0$	$\rho_0 = \frac{q E - \mu g}{\kappa} \neq 0$	$q E > \mu g$	$H = \frac{C}{2} \dot{\beta}_0^2 - \frac{1}{2} \frac{(q E - \mu g)^2}{\kappa} = c_2$
$\alpha_0 = \pi$	$\rho_0 = \frac{\mu g - q E }{\kappa} \neq 0$	$q E < \mu g$	$H = \frac{C}{2} \dot{\beta}_0^2 - \frac{1}{2} \frac{(q E - \mu g)^2}{\kappa} = c_2$

tino il moto alla Poincot, sono anche con $\dot{\beta} \neq 0$ e $\dot{\alpha} = 0$. L'equazione di Lagrange per questi casi si riducono al sistema (2).

$$(2) \quad \begin{cases} \mu \ddot{\rho} + (\mu g - q|E|) \cos \alpha_0 + \kappa \rho = 0. \\ \rho [\dot{\rho} \frac{q|B|}{c} - (\mu g - q|E|) \sin \alpha_0] = 0 \end{cases}$$

Si vede allora che le uniche possibili soluzioni sono quelle riportate in Tab. 1, che sono tutte di stato stazionario e di puro spinning, nelle quali la distanza del baricentro G da O non varia e rimane anche costante la posizione dell'asta r passante per il baricentro G . Infatti, una possibile soluzione della seconda equazione in (2) è $\rho = 0$. Allora dalla prima equazione in (2) ricaviamo che si deve avere $\mu g = q|E|$, oppure $\cos \alpha_0 = 0$, quindi $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Se invece si assume l'altra possibilità per soddisfare la seconda equazione in (2), cioè

$$(3) \quad \dot{\rho} = \frac{q|E| - \mu g}{q|B|/c} \sin \alpha_0,$$

dalla prima equazione in (2) ricaviamo

$$(4) \quad \rho = \frac{q|E| - \mu g}{\kappa} \cos \alpha_0.$$

D'altro canto, per integrazione della (3) abbiamo

$$(5) \quad \rho = \left[\frac{q|E| - \mu g}{q|B|/c} \sin \alpha_0 \right] t + \rho_0.$$

Quindi ugualando la (4) con la (5), cioè

$$\rho = \frac{q|E| - \mu g}{\kappa} \cos \alpha_0 = \left[\frac{q|E| - \mu g}{q|B|/c} \sin \alpha_0 \right] t + \rho_0$$

segue necessariamente che deve essere $\left[\frac{q|E| - \mu g}{q|B|/c} \sin \alpha_0 \right] = 0$. Questo può essere realizzato con $q|E| - \mu g = 0$, quindi con $\rho = 0 = \rho_0$, oppure chiedendo che sia $\sin \alpha_0 = 0$, cioè $\alpha_0 = 0, \pi$. In altri termini, la condizione che il moto sia di Poincot, con $\dot{\alpha} = 0$ e $\dot{\beta} \neq 0$, implica necessariamente che il moto sia una configurazione di stato stazionario, cioè con $\dot{\rho} = 0$ e $\rho = \rho_0$ come riportato in Tab. 1.

Osservazione 0.1. Questo risultato è piu forte che cercare semplicemente le soluzioni che sono configurazioni di stato stazionario. Naturalmente la ricerca delle configurazioni di stato stazionario si può anche effettuare imponendo i vincoli: $\{(\partial \rho.L) =$

$0, (\partial\alpha.L) = 0\}$. Infatti β è ignorabile. In questo caso si otterrebbero, comunque, sempre e soltanto le configurazioni riportate in Tab. 1.

Osservazione 0.2. Notare che il contenuto energetico della configurazione di stato stazionario di puro spinning con $\alpha = 0$, coincide con quella a $\alpha = \pi$. È comunque da osservare che queste due configurazioni non sono realizzabili nello stesso sistema meccanico! Infatti dipendono dal parametro $\gamma \equiv q|E|/\mu g$. Esiste la prima (risp. la seconda) configurazione di puro spinning se $\gamma > 1$ (risp. $\gamma < 1$).

2) Lo studio della stabilità delle configurazioni di puro spinning si ottiene linearizzando l'equazione di Lagrange (intorno a queste configurazioni). L'equazione linearizzata è riportata in (6).

$$(6) \quad \begin{cases} (\rho\text{-componente}) & \mu \ddot{\nu}^1 - [(\mu g - q|E|) \sin \alpha_0] \nu^2 + \kappa \nu^1 - \left[\frac{q|B|}{c} \rho_0 \right] \dot{\nu}^2 = 0 \\ (\alpha\text{-componente}) & [\mu \rho_0^2 + A] \ddot{\nu}^2 + \left[\frac{q|B|}{c} \rho_0 \right] \dot{\nu}^1 \\ & - [(\mu g - q|E|) \sin \alpha_0] \nu^1 - [(\mu g - q|E|) \cos \alpha_0 \rho_0] \nu^2 = 0 \\ (\beta\text{-componente}) & C \ddot{\nu}^3 = 0. \end{cases}$$

La terza equazione si integra direttamente ottenendo $\nu^3 = C_1^3 t + C_2^3$, quindi la coordinata β risulta instabile. Per semplicità consideriamo soltanto il caso ($\rho_0 = \frac{q|E| - \mu g}{\kappa}, \alpha_0 = 0$). Il sistema (6), relativo alle prime due componenti, si riduce al sistema (7).

$$(7) \quad \begin{cases} (\rho\text{-componente}) & \mu \ddot{\nu}^1 + \kappa \nu^1 - \left[\frac{q|B|}{c} \rho_0 \right] \dot{\nu}^2 = 0 \\ (\alpha\text{-componente}) & (\mu \rho_0^2 + A) \ddot{\nu}^2 + \left[\frac{q|B|}{c} \rho_0 \right] \dot{\nu}^1 - [(\mu g - q|E|) \rho_0] \nu^2 = 0. \end{cases}$$

La corrispondente equazione caratteristica, $\det(H_j^k[\omega]) = 0$, con

$$(H_j^k[\omega]) = \begin{pmatrix} \mu \omega^2 + \kappa & -\left[\frac{q|B|}{c} \rho_0 \right] \omega \\ \left[\frac{q|B|}{c} \rho_0 \right] \omega & (\mu \rho_0^2 + A) \omega^2 - (\mu g - q|E|) \rho_0 \end{pmatrix}$$

si può riscrivere nella forma (8).

$$(8) \quad \hat{a} \omega^4 + \hat{b} \omega^2 + \hat{c} = 0, \quad \begin{cases} \hat{a} = \left(\frac{\mu}{\kappa} \right)^2 \hat{c} + \mu A > 0 \\ \hat{b} = \hat{c} \left[2 \frac{\mu}{\kappa} + \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{q|B|}{c} \right)^2 \right] + A \kappa > 0 \\ \hat{c} = (q|E| - \mu g)^2 > 0 \end{cases}$$

Quindi abbiamo le soluzioni $\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\xi_1}$, $\omega_{3,4} = \pm \sqrt{\xi_2}$, con $\xi_{1,2} = \frac{-\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 - 4 \hat{a} \hat{c}}}{2 \hat{a}}$. Il calcolo esplicito di $\Delta \equiv \hat{b}^2 - 4 \hat{a} \hat{c}$ dà

$$\Delta = \frac{\hat{c}^2}{\kappa^2} \left(\frac{q|B|}{c} \right)^2 \left[\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{q|B|}{c} \right)^2 + 4 \frac{\mu}{\kappa} \right] + \hat{c} \frac{2A}{\kappa} \left(\frac{q|B|}{c} \right)^2 + A^2 \kappa^2 > 0.$$

Inoltre, risulta $\sqrt{\Delta} < \hat{b}$, quindi $\xi_{1,2} < 0$. Ne segue che le radici $\omega_{1,2,3,4}$ sono tutte immaginarie, pertanto ogni possibile perturbazione delle configurazioni stazionarie, di puro spinning con $\alpha_0 = 0$ e $\rho_0 \neq 0$, sono stabili per la ρ e la α .

3) Al fine di verificare se un moto, soluzione dell'equazione di Lagrange (1), consente di passare da una configurazione ammissibile in $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ad una configurazione di stato stazionario di puro spinning, per $\alpha = 0$, dobbiamo vedere se le leggi di conservazione dell'equazione (1) consentono l'esistenza di un tale moto. Identifichiamo la condizione iniziale corrispondente a $\alpha = \frac{\pi}{2}$ con (0) e quella corrispondente alla configurazione di stato stazionario di puro spinning, per $\alpha = 0$, con (1). La legge di conservazione $p_\beta = c_1$ ci obbliga a richiedere che $\dot{\beta}(0) = \dot{\beta}(1) = \dot{\beta}_0$. Inoltre la conservazione dell'Hamiltoniana, ci richiede che $H(0) = H(1)$. D'altro canto abbiamo:

$$\begin{cases} H(0) = \frac{\mu}{2}(\dot{\rho}_0^2 + \rho^2 \dot{\alpha}_0^2) + \frac{A}{2}\dot{\alpha}_0^2 + \frac{C}{2}\dot{\beta}(1)^2 + \frac{\kappa\rho_0^2}{2} \\ H(1) = \frac{C}{2}\dot{\beta}(1)^2 - \frac{1}{2}\frac{(q|E| - \mu g)^2}{\kappa}. \end{cases}$$

Quindi dobbiamo avere

$$\frac{\mu}{2}(\dot{\rho}_0^2 + \rho^2 \dot{\alpha}_0^2) + \frac{A}{2}\dot{\alpha}_0^2 + \frac{\kappa\rho_0^2}{2} = -\frac{1}{2}\frac{(q|E| - \mu g)^2}{\kappa}.$$

Questa equazione non può essere soddisfatta siccome il termine di sinistra deve essere positivo e quello di destra è invece negativo. In conclusione, qualunque sia la condizione iniziale per $\alpha = \frac{\pi}{2}$, il corrispondente moto, soluzione dell'equazione di Lagrange (1), non potrà mai raggiungere il moto di configurazione di stato stazionario, di puro spinning, a $\alpha = 0$.



Osservazione 0.3 (Moti di Poincot e moti non di Poincot). Vale la pena notare che la distinzione tra moti di Poincot e moti che non sono di Poincot, per le soluzioni dell'equazione di Lagrange (1), è consentita in relazione al fatto che questa equazione, diciamo $E_2 \subset JD^2(W)$, è *determinata*, mentre i moti di Poincot, si ottengono da un'equazione $^{(Poincot)}E_2$ sopra-determinata.¹ In altri termini, l'equazione che identificano i moti di Poincot è una sotto-equazione dell'equazione (1): $^{(Poincot)}E_2 \subset E_2 \subset JD^2(W)$.



Osservazione 0.4 (Soluzioni deboli di Poincot). È anche interessante mettere in evidenza l'esistenza di soluzioni deboli della $^{(Poincot)}E_2$, che permettono di passare da soluzioni periodiche di Poincot a soluzioni di puro spinning di Poincot. Infatti, consideriamo la soluzione periodica caratterizzata dalla condizione iniziale $(\rho_0 = \frac{2}{\kappa}(q|E| - \mu g), \dot{\alpha}_0 \neq 0, \dot{\beta}_0 = 0)$ con contenuto energetico a $\alpha = 0$, $H_0 = \frac{1}{2}\dot{\alpha}_0^2[\mu(\frac{2}{\kappa}(q|E| - \mu g))^2 + A]$. Inoltre consideriamo anche la soluzione di puro spinning a $\alpha = 0$, caratterizzata dalla condizione iniziale $(\rho_S = \frac{q|E| - \mu g}{\kappa}, \dot{\rho}_S = 0, \dot{\alpha}_S = 0, \dot{\beta}_S \neq 0)$. Possiamo allora considerare la soluzione debole, che passa, dopo un periodo, dalla soluzione periodica alla soluzione di puro spinning, per $\alpha = 0$. Questo passaggio determina $\dot{\beta}_S$, imponendo la condizione $H_0 = H_S$. Infatti, questa condizione implica

$$\dot{\beta}_S^2 = \frac{1}{C} \left[\dot{\alpha}_0^2 \left(\mu \frac{4}{\kappa^2} (q|E| - \mu g)^2 + A \right) + \frac{1}{\kappa} (q|E| - \mu g)^2 \right].$$

¹Ricordiamo che un'equazione differenziale si dice *determinata* se il numero di funzioni incognite è eguale al numero di componenti indipendenti. Per esempio l'equazione di Lagrange (1) è determinata essendo formata da tre componenti nelle tre funzioni incognite $\rho(t)$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$. Se invece il numero delle componenti indipendenti è superiore al numero delle funzioni incognite, l'equazione si dice *sopra-determinata*.

Questa soluzione debole, malgrado comporti la conservazione dell'Hamiltoniana, e sia formata da due rami che sono moti alla Poincot, non rispetta globalmente la conservazione del momento angolare $\Omega(G)$. Infatti nel ramo periodico, e nel punto di discontinuità, risulta $\Omega(G)_0 = A \dot{\alpha}_0 e_2$, mentre nel ramo di puro spinning risulta $\Omega(G)_S = C \dot{\beta}_S e_3$. Questa soluzione debole è quindi completamente contenuta in $^{(Poincot)}E_2$, pur non rappresentando un moto alla Poincot.² Soluzioni di questo tipo si possono quindi chiamare *soluzioni deboli di Poincot* dell'equazione di Lagrange E_2 , riportata in (1).

²Notare che la ρ_0 , nella soluzione periodica, è doppia della ρ_S , della soluzione di puro spinning. Pertanto il passaggio dalla soluzione periodica a quella di puro spinning, nella configurazione $\alpha = 0$, avviene con il ricollocamento del baricentro G ad una quota (rispetto ad O) ridotta della metà. Le soluzioni deboli sono molto utili, dal punto di vista ingegneristico. Infatti queste soluzioni danno importanti informazioni per la progettazione di meccanismi interni al fine di realizzare le necessarie discontinuità. Per esempio, in questo caso, si tratta di determinare una variazione $\Delta\Omega(G) = \Omega(G)_0 - \Omega(G)_S = A \dot{\alpha}_0 e_2 - C \dot{\beta}_S e_3$.