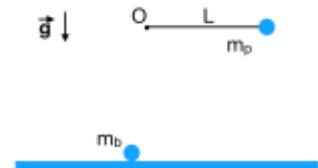




Prova d'esame del 3 luglio 2017 – Il appello A.A. 2016-17

Risolvere, prima analiticamente e poi numericamente, gli esercizi seguenti.

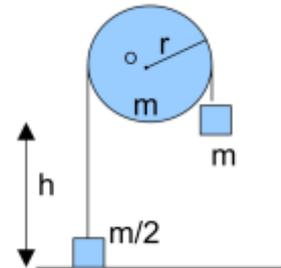
1. Una palla di massa $m_p = 1$ kg, attaccata ad una fune lunga $L = 1.2$ m, è lasciata cadere quando la fune è orizzontale. Quando la fune è verticale, la pallina urta centralmente ed elasticamente un corpo di massa $m_b = 2.5$ kg fermo su un piano orizzontale liscio. Entrambi i corpi sono assimilabili a punti materiali.



a) Determinare la velocità di m_b dopo l'urto.

b) Determinare se la massa m_p compia oscillazioni isocrone o meno dopo l'urto, motivando la risposta.

2. Due masse, rispettivamente di massa pari ad m ed $m/2$ sono collegate fra loro utilizzando una fune inestensibile e di massa trascurabile. La fune è avvolta intorno ad una carrucola di massa m e raggio r . Il sistema è inizialmente in quiete. La fune può mettere in rotazione la carrucola, senza scivolarvi sopra. La carrucola è libera di ruotare senza attrito intorno all'asse passante per il suo centro O. All'istante iniziale il sistema è lasciato libero di muoversi. Calcolare il tempo impiegato dalla massa più leggera per aumentare la sua quota di un tratto $h = 25$ cm.



3. Determinare la velocità con cui va lanciato dalla superficie della terra un satellite che si vuol porre in orbita geostazionaria. Si consideri nulla la resistenza offerta dall'atmosfera e trascurabile ogni effetto dovuto alla rotazione della terra e all'influenza degli altri corpi celesti. (Si ricordi che un satellite in orbita geostazionaria risulta fermo rispetto alla terra).

4. Un recipiente cilindrico con un pistone a tenuta, libero di scorrere senza attrito e di massa nulla, contiene $n = 3$ moli di gas ideale monoatomico. Nella situazione iniziale il gas ha una temperatura $T_1 = 200$ K ed è contenuto in un volume $V_1 = 10$ l. Improvvisamente il fermo meccanico che tiene fermo il pistone viene rimosso e il gas si espande contro la pressione atmosferica esterna, fino a quando non raggiunge un nuovo stato finale di equilibrio in cui il volume del gas è pari a $V_2 = 40$ l. Calcolare il calore scambiato dal gas durante la trasformazione.

5. Un condizionatore assorbe una quantità di energia $L_0 = 360$ kJ in un'ora compiendo $n = 100$ cicli/min. Sapendo che la temperatura esterna alla stanza condizionata (sorgente calda) è $T_c = 30^\circ\text{C}$ e che l'efficienza frigorifera della macchina (rapporto tra il calore che la macchina assorbe dalla sorgente fredda e il lavoro fornito alla macchina dall'esterno) è pari a $\varepsilon = 3$, calcolare la variazione di entropia dell'ambiente esterno dopo 5 h di funzionamento del condizionatore.

Rispondete facoltativamente, con essenzialità e correttezza, alle seguenti domande.

T1 Che relazione esiste tra la seconda legge di Keplero (velocità areolare costante) ed il fatto che la forza di gravitazione universale è una forza centrale?

T2 Discutere la scelta delle sorgenti di temperatura a cui operare una macchina termica reale, approssimabile con buona precisione ad un ciclo termodinamico reversibile, in modo da renderne massimo il rendimento.



Soluzioni della prova d'esame del 3 luglio 2017 – Il appello A.A. 2016-17

1. La palla arriva al momento dell'urto con il blocco con velocità $v_{p,i} = \sqrt{2gL} = 4.85 \text{ m/s}$. Imponendo $m_p v_{p,i} = m_b v_{b,f} + m_p v_{p,f}$; $\frac{1}{2} m_p v_{p,i}^2 = \frac{1}{2} m_b v_{b,f}^2 + \frac{1}{2} m_p v_{p,f}^2$ si ottiene: a) $\mathbf{v_{b,f} = 2m_p / (m_p + m_b) v_{p,i} = 2.77 \text{ m/s}}$. Essendo la velocità della palla dopo l'urto, in modulo, pari a $|v_{p,f}| = 2.07 \text{ m/s}$ la palla si porterà ad una altezza massima di 0.22 m dalla quota minima. Tale quota corrisponde b) **ad un angolo $\vartheta_{\max} = 35^\circ$ [0.62 rad] non compatibile con l'ipotesi di oscillazioni isocrone.**
2. Le equazioni cardinali della dinamica per il sistema si scrivono come: $mg - T_1 = ma$; $-m/2g + T_2 = m/2 a$ e $R(T_1 - T_2) = -l\alpha$. Considerando che $\alpha = -a/R$ e $I = \frac{1}{2} mR^2$ si ottiene, combinando, le due prime equazioni: $m/2g - (T_1 - T_2) = 3/2 ma$. Sostituendo, infine si ottiene $R [1/2mg - 3/2ma] = m/2Ra$ da cui: $a = g/4$. Nel moto uniformemente accelerato h viene percorsa nel tempo: $\mathbf{t = \sqrt{2h/a} = 0.45 \text{ s}}$.

3. Si ha conservazione dell'energia meccanica:

$$E_i = E_f \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_s v_i^2 - G \frac{m_s M_T}{R_T} = \frac{1}{2} m_s v_f^2 - G \frac{m_s M_T}{R_{OG}} = -\frac{1}{2} G \frac{m_s M_T}{R_{OG}} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad v_i^2 = \left[2GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_{OG}} \right) \right]$$

Considerando che un satellite in orbita geostazionaria (circolare di raggio R_{OG}) ha lo stesso periodo di rivoluzione della Terra ($T=24\text{h}$), dalla terza legge di Keplero si ha:

$$\frac{R_{OG}^3}{T^2} = G \frac{M_T}{4\pi^2} \quad \Rightarrow \quad R_{OG} = 4.22 \cdot 10^4 \text{ km} \quad \Rightarrow \quad v_i = 10.76 \text{ km/s}$$

4. La temperatura finale del gas è calcolabile tramite $T_2 = PaV_2/nR = 162\text{K}$ (nota la pressione all'equilibrio). Il lavoro è calcolabile una volta noto il lavoro fatto dall'ambiente a pressione costante: $L = -L_{\text{amb}} = -Pa (V_2 - V_1) = -3.03 \text{ kJ}$. La variazione di energia interna è pari a $\Delta U = nc_v(T_2 - T_1) = -1.42 \text{ kJ}$. Il calore scambiato è dunque $\mathbf{Q = \Delta U + L = -4.45 \text{ kJ}}$.
5. Detto Q_2 il calore assorbito dalla sorgente fredda, si può calcolare tale calore tramite $\varepsilon = \frac{Q_2}{|L|}$, e si ha che $Q_1 = |L| + Q_2$. Il lavoro assorbito dalla macchina in un ciclo è: $|L| = L_0 / (60n) = 60 \text{ J}$. Considerando l'ambiente esterno come sorgente ideale, per ogni ciclo si ha $Q_1 = |L|(1 + \varepsilon) = 240 \text{ J}$. Dopo 5 h di funzionamento: $Q_{\text{tot}} = Q_1 \cdot 5 \times 60 \text{ n} = 7.2 \text{ MJ}$. **La variazione di Entropia dell'ambiente esterno è $\Delta S = Q_{\text{tot}}/T_C = 23.7 \text{ kJ/K}$.**