Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Esercitazione per il corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria
a cura di Daniela Giachetti

Esercizio 1.

(i) Si dia la definizione di successione delle somme parziali per una serie di funzioni.

(ii) Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{(\cos 2x)^n}{n}-\frac{(\cos 2x)^{n+1}}{n+1}\Big]$$

si costruisca la successione delle somme parziali, se ne calcoli il limite (somma della serie) e si specifichi dove la convergenza della serie é uniforme.

Soluzione:
(ii) La successione delle somme parziali é:

$$S_n(x)=\cos 2x-\frac{(\cos 2x)^{n+1}}{n+1}.$$

Il limite della successione delle somme parziali é il seguente:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\cos 2x.$$

La convergenza é uniforme su tutto $\mathbb{R}$, infatti:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|S_n(x)-\cos 2x|=\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|(\cos 2x)^{n+1}|}{n+1}\to 0 \quad \text{per} \quad n\to\infty.$$

Esercizio 2. Si calcoli $f^{(6)}(0)$, dove

$$f(x)=\log\Big(\frac{1-2x}{3}\Big).$$

Soluzione:
Ricordando le proprietá del logaritmo e lo sviluppo in serie di potenze del logaritmo, si ha:

$$f(x)=\log\Big(\frac{1-2x}{3}\Big)=\log(1-2x)-\log 3=-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\log 3.$$

Dalla relazione che lega i coefficienti di uno sviluppo in serie di una funzione alle derivate della funzione, si ha che:

$$a_6=\frac{f^6(0)}{6!}\Longrightarrow f^6(0)=a_6\cdot 6!=-\frac{2^6}{6}6!=-5!2^6$$

Esercizio 3. Si determini una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ che abbia come parte reale la funzione

$$u(x,y)=e^{1-2x}\cos 2y.$$

Soluzione:
Una funzione olomorfa in A é per definizione una funzione derivabile in ogni $z_0\in A$, dove A é un aperto connesso contenuto nell'insieme di definizione della funzione. In particolare é differenziabile in z_0, ovvero valgono le condizioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

dove $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono rispettivamente parte reale e parte immaginaria della funzione cercata.
Ne segue che

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-2e^{1-2x}\cos 2y\to v(x,y)=-\sin 2ye^{1-2x}+g(x)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2e^{1-2x}\sin 2y\to v(x,y)=-\sin 2ye^{1-2x}+h(y)$$

Ponendo $g(x)=h(y)=C$, con C costante arbitraria, si ottiene la funzione

$$f(x,y)=e^{1-2x}\cos 2y-ie^{1-2x}\sin 2y=e^{1-2x}(\cos 2y-i\sin 2y).$$

Dunque $f(z)=e^{1-2z}$.

Esercizio 4.

(i) Definizione di punto singolare per $f(z)$. Classificazione dei punti singolari.

(ii) Data la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)(z+4i)},$$

svilupparla in serie di Laurent di centro $2i$ nella regione $0 < |z-2i| < 6$ (intorno forato di centro $2i$ e raggio 6).

(iii) In quale altra regione del piano la funzione é sviluppabile e qual é il suo sviluppo?

Soluzione:
(ii) Decomponendo in fratti semplici f si ha:

$$f(z) = \frac{\frac{1}{6i}}{z-2i} - \frac{\frac{1}{6i}}{z+4i} = A + B$$

Sviluppando il termine B si ottiene:

$$B = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \frac{(z-2i)^n}{(6i)^{n+2}},$$

in definitiva si ottiene il seguente sviluppo di Laurent per la funzione f nella regione $0 < |z-2i| < 6$:

$$f(z) = \frac{1}{6i(z-2i)} + \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \frac{(z-2i)^n}{(6i)^{n+2}}$$

(iii) La funzione é sviluppabile in serie di Laurent anche nella regione $|z-2i| > 6$ e presenta il seguente sviluppo:

$$f(z) = \frac{1}{6i(z-2i)} + \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \frac{(6i)^{n-1}}{(z-2i)^{n+1}} = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(6i)^{n-1}}{(z-2i)^{n+1}}$$

Esercizio 5. Calcolare con i metodi della variabile complessa il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2x}}{x^3+8i} dx$$

Soluzione:
L'estensione della funzione integranda in campo complesso é data da

$$f(z) = \frac{e^{i2z}}{z^3+8i},$$

e sia γ la curva chiusa (percorsa nel verso usuale) ottenuta concatenando una semicirconferenza γ_R nel semipiano $Im z > 0$ ed il segmento $[-R, R]$ dell'asse reale.
Le singolaritá di f sono $z_0 = \sqrt{3} - i, z_1 = 2i, z_2 = -\sqrt{3} - i$.
L'unica singolaritá interna a γ é z_1. Per il teorema dei residui si ha:

$$\int_\gamma \frac{e^{i2z}}{z^3+8i} dz = 2\pi\, i\, res(f, 2i) = -\frac{\pi}{6} i e^{-4}$$

da cui,

$$-\frac{\pi}{6} i e^{-4} = \int_\gamma f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{-R}^{+R} f(x) dx.$$

Per il lemma di Jordan il primo integrale nel membro di destra tende a zero per $R \to \infty$, e quindi si conclude che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = -\frac{\pi}{6} i e^{-4}.$$

Esercizio 6. Calcolare il seguente integrale di funzione di variabile complessa

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{\big(3(z-1)+i\big)^2} dz$$

dove γ é il bordo dell'insieme $\mathcal{T}$ definito da

$$\mathcal{T} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \le y \le 0\}$$

Soluzione:
L'unica singolaritá per $f(z) = \frac{e^{z^2}}{\left(3(z-1)+i\right)^2}$ é $z_0 = 1 - \frac{i}{3} \in \mathcal{T}$, che é un polo di ordine 2. Ne segue che

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi\, i\, res(f, z_0).$$

Essendo

$$res(f, z_0) = lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\Big((z-z_0)^2 f(z)\Big) = \frac{2}{9}e^{(1-\frac{i}{3})^2}(1-\frac{i}{3}),$$

si ottiene infine che

$$\int_\gamma f(z)dz = \frac{4}{9}\pi i e^{(1-\frac{i}{3})^2}(1-\frac{i}{3}).$$

Esercizio 7.

(i) Provare che una funzione olomorfa in un aperto semplicemente connesso ammette primitiva in tale aperto.

(ii) Trovare una primitiva esplicita della funzione $\frac{1}{z}$ nell'insieme $\mathbb{C} - \{x + iy : x \le 0, y = 0\}$.

Soluzione:
(i) E' una semplice conseguenza del Teorema integrale di Cauchy. Infatti, sia $f : A \to \mathbb{C}$, A aperto semplicemente connesso. Per definizione di aperto semplicemente connesso, per ogni curva γ semplice, chiusa e regolare a tratti contenuta in A, l'aperto limitato che ha γ come frontiera é interamente contenuto in A. Sia D tale aperto. Ma allora per il Teorema integrale di Cauchy $\int_\gamma f(z)dx = 0$, quindi per la condizione necessaria e sufficiente sull'esistenza della primitiva di f, quest'ultima condizione mi implica che esiste una primitiva di f.
(ii) La primitiva cercata é $F(z) = Log z$.

Esercizio 8. Trovare i punti singolari della seguente funzione $f(z)$, classificarli e calcolare il residuo

$$f(z) = \frac{1}{e^z - i\pi}$$

Soluzione:
I punti singolari sono $z_k = \log(i\pi) = \log(\pi) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
Tali punti sono poli semplici per $f(z)$, in quanto $(e^z - i\pi)' \ne 0$ sempre.
Per il calcolo del residuo si ha:

$$res(f, z_k) = \frac{1}{e^{z_k}} = \frac{1}{i\pi}.$$

Esercizio 9. Data la serie di Laurent definita da

$$\sum_{n=-\infty}^{3} \frac{1}{(z-1)^n}|n-4|^{n-1}$$

(i) individuare l'insieme di convergenza;

(ii) individuare i punti singolari della sua somma $f(z)$ e classificarli;

(iii) calcolare il residuo nei punti singolari.

Soluzione:
(i)Riscriviamo la serie di Laurent nel modo seguente:

$$\sum_{n=-\infty}^{3} \frac{1}{(z-1)^n}|n-4|^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(z-1)^n}|n-4|^{n-1} + \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{(z-1)^n}|n-4|^{n-1} = A + B$$

dove A e B rappresentano rispettivamente la parte regolare e la parte singolare della serie assegnata. Attraverso un cambio di variabili ($m = -n$), riscriviamo la parte regolare nel seguente modo:

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} (z-1)^m (m+4)^{-m-1}$$

mentre B é esplicitamente data da:

$$B = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3}$$

Affinché la serie di partenza converga, occorre che le singole parti (regolare e singolare) convergano.
Per quanto riguarda A, si ha che converge su tutto $\mathbb{C}$ (basta calcolare il raggio di convergenza col criterio della radice e osservare che é infinito). La parte singolare B é una somma finita di termini definita per $z \neq 1$. Si conclude che l'insieme di convergenza della serie di Laurent é $\mathbb{C} - \{1\}$.
(ii)L'unico punto singolare é $z = 1$, polo di ordine 3.
(iii) Il residuo é dato da $c_{-1} = 1$.

Esercizio 10. Calcolare con i metodi della variabile complessa il seguente integrale (a valor principale)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-1)(x^2+i)} dx$$

Soluzione:
La funzione integranda non é integrabile in $x = 1$.
L'estensione della funzione integranda in campo complesso é data da

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1)(z^2+i)}$$

dove γ é la curva chiusa (percorsa nel verso usuale) ottenuta concatenando una semicirconferenza di raggio $R > 1$ nel semipiano $Imz > 0$, il segmento $[-R, 1-\epsilon]$, la semicirconferenza γ_ϵ definita da $|z-1| = \epsilon$ contenuta nel semipiano $Imz > 0$ ed il segmento $[1+\epsilon, R]$.
Le singolaritá di f sono $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 1$ e sono tutti poli semplici.
L'unica singolaritá interna a γ é $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Per il teorema dei residui si ha:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\, res(f, z_1)$$

Utilizzando il lemma di Jordan ed il lemma del polo semplice si trova che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-1)(x^2+i)} dx = 2\pi i\, res(f, z_1) + \pi i\, res(f, z_2).$$

Esercizio 11. Calcolare il seguente integrale di funzione di variabile complessa

$$\int_\gamma \frac{\cos(z-1)}{(z-i)^3} dz$$

dove γ é il bordo dell'insieme $\mathcal{T}$ definito come

$$\mathcal{T} = \{z \in \mathbb{C} : -2 \leq Re(z) \leq 2,\ Re(z) - 2 \leq Im(z) \leq Re(z) + 2\}.$$

Disegnare la regione $\mathcal{T}$.
Soluzione:
Analogo all'esercizio 6.
R= $-2\pi i$.

Esercizio 12. Si calcoli

$$\int_\gamma |z-1| sinz dz,$$

dove la curva γ é:

$$\gamma(t) = 1 + 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Soluzione:
Si osservi che la funzione integranda non é olomorfa nell'insieme di cui γ é il bordo. D'altra parte si ha che:

$$\int_\gamma |z-1| \sin z dz = 2 \int_\gamma \sin z dz = 0,$$

per il teorema integrale di Cauchy ($\sin z$ é olomorfa e γ é una curva chiusa contenuta nell'insieme di olomorfia).

Esercizio 13. Trovare i punti singolari della seguente funzione $f(z)$, classificarli e calcolare il residuo

$$f(z) = \frac{1}{e^{iz} - \frac{\pi}{2}}$$

Soluzione:
Analogo all'esercizio 8.
Punti singolari: $z_k = \frac{1}{i}\log(\frac{\pi}{2}) = -i(\log(\frac{\pi}{2}) + i(2k\pi)), k \in \mathbb{Z}$, poli semplici.
Residuo: $res(f, z_k) = \frac{2}{i\pi}$.

Esercizio 14. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{(\sin(z+i))^2}{4(z+i)^3} dz$$

dove γ é il bordo dell'insieme $\mathcal{T}$ definito come

$$\mathcal{T} = \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq Re(z) \leq 1, (Re(z))^2 - 2 \leq Im(z) \leq 0\}$$

Disegnare la regione $\mathcal{T}$.
Soluzione:
Analogo agli esercizi 6 e 11.
R=$\frac{\pi}{2}i$.

Esercizio 15. Calcolare, con i metodi della variabile complessa, il seguente integrale (a valor principale)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^3 + 8i)(x-2)} dx.$$

Soluzione:
Analogo all'esercizio 10.
R=$2\pi i \frac{-1}{24(i-1)} + \pi i \frac{1}{8(i+1)}$.