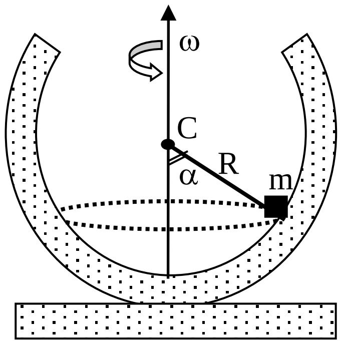
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
4° TUTORAGGIO 30 marzo 2023

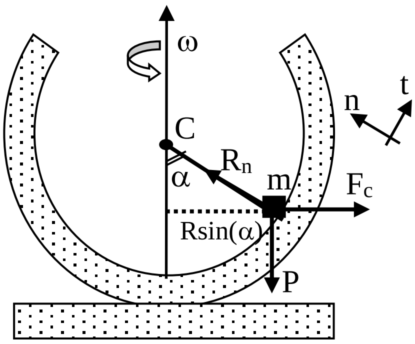
FORZA CENTRIFUGA –EQUIVALENTE PENDOLO CONICO

1. Un blocco di massa m=500g è inizialmente posizionato sul fondo di una ciotola liscia a forma sferica di raggio R=2m. La ciotola viene messa in rotazione intorno ad un asse verticale per il suo centro a velocità angolare costante ω=5rad/s. Il blocco dopo un breve transitorio tende a posizionarsi stabilmente ad una certa altezza dal fondo ben caratterizzata dall'angolo α in figura, descrivendo un moto circolare uniforme. Calcolare l'angolo α, e la reazione normale opposta dalla ciotola.



1. STUDIO DELLE FORZE

Una volta raggiunta la posizione di equilibrio la forza peso **P**, la forza centrifuga $\mathbf{F_c}$ e la reazione della ciotola $\mathbf{R_n}$ si equilibrano. Scomponendo le forze lungo gli assi normale (n) e tangenziale (t) si ottiene il sistema di equazioni



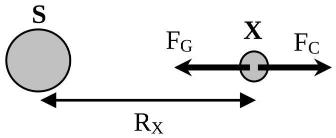
$$\begin{matrix} n) \\ t) \end{matrix} \begin{cases} R_n - P\cos\alpha - F_c \sin\alpha = 0 \\ -P\sin\alpha + F_c\cos\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{ove } P=mg,\ F_c=m\omega^2 R\sin\alpha$$

La seconda equazione è verificata se $P\sin\alpha = F_c\cos\alpha$ ossia $mg\sin\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha\cos\alpha$

da cui $\alpha = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right) = \mathbf{78°42'}$ $R_n = m\left(g\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha\right)\mathbf{=25N}$

2. Nel sistema solare i due pianeti Terra e Venere descrivono un moto di rivoluzione intorno al Sole su traiettorie approssimabili a circonferenze di raggio rispettivamente $R_{TS}=150\cdot10^6$ km e $R_{VS}=108\cdot10^6$ km, che giacciono sul medesimo piano come descritto in figura (in realtà le due orbite sono inclinate di 3.4°). Sapendo che dalla Terra gli astronomi hanno osservato un transito di Venere sul disco solare il giorno 8 giugno 2004 (vedi figura), calcolare in quale giorno si è successivamente verificata una nuova congiunzione fra Venere e Terra (minima distanza fra i due pianeti). Dati [Periodo di rivoluzione terrestre T=365 giorni, $G=6.67\cdot10^{-11}$ Nm^2/kg^2]. **Facoltativo:** dare una stima della massa del Sole.

2. Calcolo del periodo di rivoluzione dei pianeti del sistema solare
Nel sistema di riferimento non inerziale solidale al generico pianeta X, la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal Sole (F_G) equilibra la forza centrifuga (F_C) che tenderebbe a fare allontanare il pianeta dal Sole.

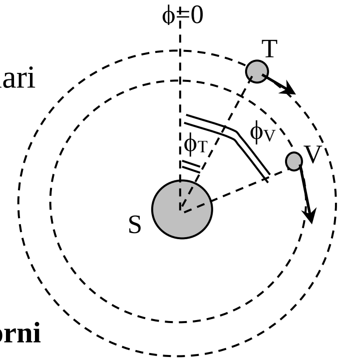


$$F_C = F_G \quad \text{ossia} \quad m_X \omega^2 R_x = G\frac{M_S m_X}{R_x^2}$$

da cui $\omega = \sqrt{\frac{GM_S}{R_x^3}}$ ed **il periodo di rivoluzione** $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_x^3}{GM_s}}$

Il rapporto fra i periodi di rivoluzione di Venere e Terra è $a = \frac{T_V}{T_T} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{R_{VS}^3}{GM_s}}}{2\pi\sqrt{\frac{R_{TS}^3}{GM_S}}} = \sqrt{\frac{R_{VS}^3}{R_{TS}^3}} = \mathbf{0.611}$

Calcolo della nuova congiunzione
I moti di entrambi i pianeti sono circolari uniformi descritti dalle relazioni angolari
per la Terra: $\varphi_T(t) = \omega_T t$,
per Venere: $\varphi_V(t) = \omega_V t$ dove per entrambi si è assunto inizialmente $\phi=0$ per $t=0$



I due pianeti sono di nuovo in congiunzione quando

$$\varphi_V(t) - \varphi_T(t) = 2\pi \quad \text{ove} \quad t = \frac{2\pi}{\omega_V - \omega_T} = \frac{1}{\frac{1}{T_V} - \frac{1}{T_T}} = \frac{T_V T_T}{T_T - T_V} = \frac{a}{1-a}T_T = \mathbf{573\ giorni}$$

che corrisponde al **2 gennaio 2006**.

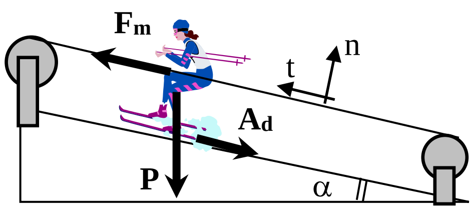
Facoltativo: dal periodo di rivoluzione della Terra $T_T = 2\pi\sqrt{\frac{R_{TS}^3}{GM_s}} = \mathbf{365\ giorni}$

si ottiene la stima della **massa del Sole** $M_S = \frac{4\pi^2 R_{TS}^3}{T_T^2 G} = \mathbf{2 \cdot 10^{30}\ kg}$

LAVORO ed ENERGIA

3. Una sciovia è installata su un pendio di 20° rispetto all'orizzontale ed a pieno carico trascina 80 sciatori che vengono ritenuti di una massa media di 80 kg. Calcolando un coefficiente di attrito dinamico degli sci di 0.06 e trascurando tutte le altre forze passive, calcolare la potenza del motore necessaria se si vuole una velocità di risalita di 2 m/s. **Facoltativo**: calcolare la potenza dissipata per gli attriti.

3. Le forze agenti sul singolo sciatore durante la risalita sono: la forza motrice trainante $\mathbf{F_m}$ esercitata attraverso la fune avente la direzione del moto lungo il pendio, la forza peso **P** dello sciatore, l'attrito dinamico $\mathbf{A_d}$ fra sci e neve in senso



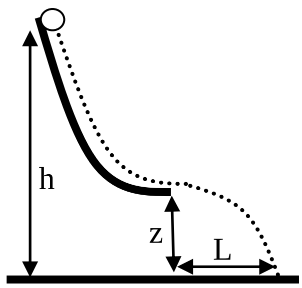
opposto al moto, la reazione normale di sostegno **R_n**.
Proiettando le forze lungo gli assi n, t:

$$\begin{cases} \hat{n} & R_n - P\cos\alpha = ma_n = 0 \\ \hat{t} & F_m - P\sin\alpha - A_d = ma_t = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \hat{n} & R_n = P\cos\alpha \\ \hat{t} & F_m = P(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha) \end{cases}$$

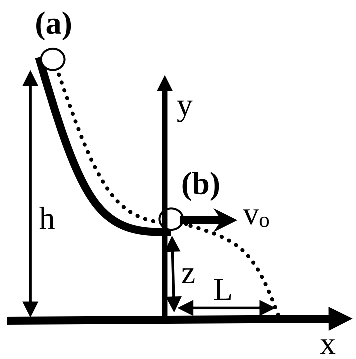
dove a_t=0 perché il moto è rettilineo uniforme

La potenza del motore necessaria per trascinare il singolo sciatore risulta quindi: $P_m = \vec{F}_m \bullet \vec{v} = F_m v = mgv(\sin\alpha + \mu_d \cos a)$
Ripetendo il ragionamento per un numero N=80 di sciatori da trasportare la potenza totale diviene: $P_{tot} = N \cdot P_m = Nmgv(\sin\alpha + \mu_d \cos a) =$ **49.98 kW**

Facoltativo: potenza dissipata per gli attriti: $P_A = N\vec{A}_d \bullet \vec{v} = -NA_d v = -Nmgv\mu_d \cos\alpha =$ **- 7.07 kW**
Il segno della potenza è negativo perché la forza di attrito è dissipativa e compie un lavoro negativo



4. Una particella partendo da ferma da una altezza incognita h scende lungo una guida priva di attrito, l'abbandona in direzione orizzontale ad una quota z=125cm, e finisce al suolo, come mostrato in figura dopo un volo di L=100cm (vedi figura). Determinare l'altezza incognita h.



4. Il valore della velocità di lancio v_o nel punto di abbandono della guida si ottiene imponendo la conservazione dell'energia meccanica fra (a) e (b):

$$mgh = mgz + \frac{1}{2}mv_o^2 \quad \text{da cui} \quad v_o = \sqrt{2g(h-z)}$$

dopo il lancio la particella, non più vincolata alla guida, descrive una traiettoria parabolica i cui moti componenti sono:

lungo l'asse x $\begin{cases} x = v_o t \\ v_x = v_o \\ a_x = 0 \end{cases}$ e lungo l'asse y $\begin{cases} y = z - gt^2/2 \\ v_y = -gt \\ a_y = -g \end{cases}$.

Il tempo di volo t_v, a partire dal lancio, si ottiene imponendo $y(t_v)=0$ da cui $t_v = \sqrt{2z/g}$
In quell'istante la distanza percorsa L sull'asse x sarà
$L = x(t_v) = v_o t_v = \sqrt{2g(h-z)} \cdot \sqrt{2z/g} = 2\sqrt{z(h-z)}$

da cui si ricava facilmente il valore della quota iniziale $h = z + L^2/4z = 1.45$ m