ESERCIZIO SUL MOTO PIANO (07/03/2019) Una pistola ad aria compressa è in grado di sparare proiettili con una velocità, $\vec{v_0}$, dall'origine degli assi, secondo un angolo α fissato nel piano xy. Trascurando l'attrito dell'aria e l'effetto dovuto alla rotazione della terra determinare:

1. Le equazioni del moto lungo gli assi e l'equazione del proiettile rispetto al riferimento Oxy.

2. La gittata, x_G, il tempo di volo, t_v, la quota massima raggiunta, h_{max}, per $|\vec{v_0}| = 100\, m/s$ e $\alpha = 45°$

3. Il modulo e la direzione della velocità a 1/3 del tempo di volo e nel momento in cui il proiettile tocca terra.

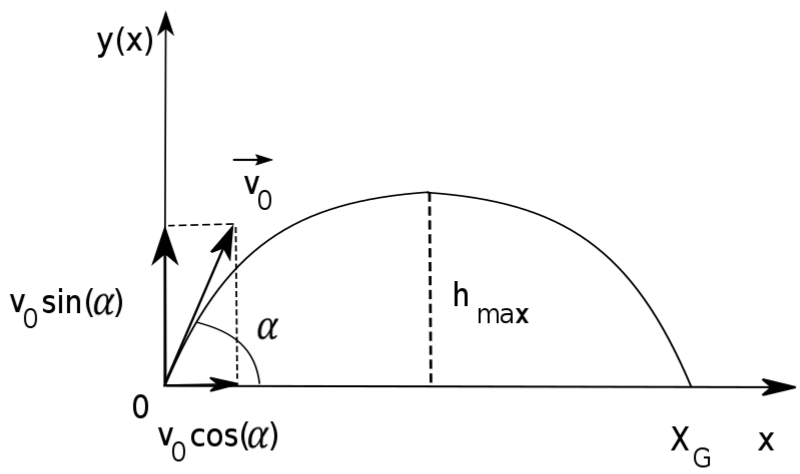

Figura 1: Rappresentazione del moto del proiettile nel piano Oxy

Soluzione

1. Per scrivere le equazioni del moto si può partire dalle componenti dell'accelerazione (solo componente lungo y poiché accelerazione gravitazionale(g)) e quindi per integrazioni successive ricavare la velocità e l'espressione della posizione.

$$
\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = k_1 \\ v_y = \int\limits_0^t -g dt + k_2 = -gt + k_2 \end{cases} \Rightarrow
$$
$$
\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \int\limits_0^t a dt + k_3 = at + k_3 \\ y(t) = \int_0^t (-gt + k_2) dt + k_4 = k_4 + k_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \tag{1}
$$

Per determinare le costanti di integrazione(k_1, k_2...)basta imporre le condizioni iniziali, ovvero la velocità e la posizione del proiettile nell'istante di tempo $t = 0$ ed ottenere:

$$k_1 = v_{0x} = v_0 cos(\alpha) \qquad k_2 = v_{0y} = v_0 sin(\alpha) \tag{2}$$
$$k_3 = x_0 = 0 \qquad k_4 = y_0 = 0 \tag{3}$$

Una volta determinate le costanti si possono riscrivere le componenti della velocità e della posizione (1) nel seguente modo:

$$\begin{cases} v_x = v_0 cos(\alpha) \\ v_y = v_0 sin(\alpha) - gt \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 cos(\alpha))t \rightarrow & \text{moto uniforme} \\ y(t) = (v_0 sin(\alpha))t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow & \text{moto unif.accelerato} \end{cases} \tag{5}$$

Partendo dalle espressioni per le posizioni in (5) ricavare l'equazione della traiettoria:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_0 cos(\alpha)} \\ y = \cancel{v_0} sin(\alpha) \frac{x}{\cancel{v_0} cos(\alpha)} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 cos(\alpha)}\right)^2 \end{cases} \tag{6}$$

che sarà la seguente:

$$\boxed{y = xtg(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 cos^2(\alpha)}x^2} \tag{7}$$

ovvero una traiettoria di tipo parabolico cosi come mostrato in figura(1). Per maggiore chiarezza così come fatto a lezione si riportano in dettaglio le equazioni del moto lungo gli assi e i rispettivi grafici delle diverse componenti delle grandezze fisiche del problema. Si ha:

$$LUNGO\,ASSE\,X : \begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = v_0 cos(\alpha) \\ x(t) = (v_0 cos(\alpha))t \end{cases} \tag{8}$$

I cui andamenti sono riportati in figura (2).

$$LUNGO\,ASSE\,Y : \begin{cases} a_y = 0 \\ v_y = v_0 sin(\alpha) - gt \\ y(t) = (v_0 sin(\alpha))t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{9}$$

I cui andamenti sono riportati in figura (3).

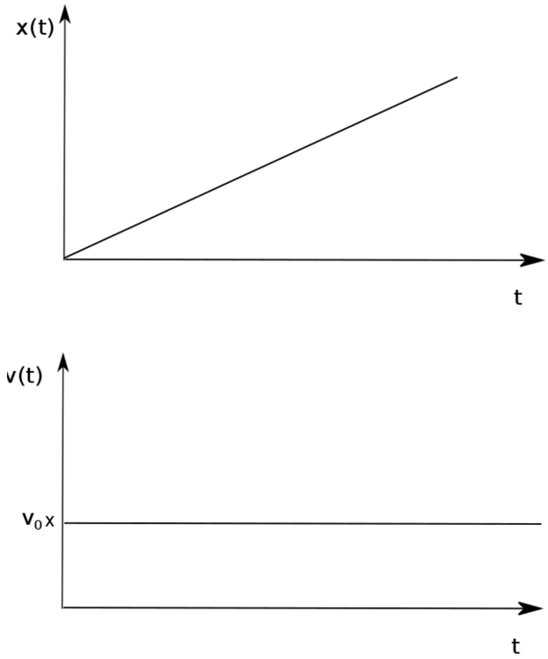

Figura 2: Grafici equazione del moto lungo x e andamento della componente x della velocità.

2. Si definisce *gittata* la massima distanza che un corpo lanciato in aria può raggiungere longitudinalmente ($\overline{OG}$).
   Conoscendo l'equazione della traiettoria(7) è possibile determinare la x_G semplicemente ponendo $y = 0$ ed ottenere

$$x\left(tg(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 cos^2(\alpha)}x\right) = 0 \tag{10}$$

   In cui la prima soluzione ($x_1 = 0$) corrisponde banalmente all'istante di lancio, mentre l'altra, x_2, è esattamente la x_G cercata:

$$x_G = \frac{2v_0^2 tg(\alpha) cos^2(\alpha)}{g} = \frac{2v_0^2}{g}\frac{sin(\alpha)}{\cancel{cos(\alpha)}}\cancel{cos^2(\alpha)} = \frac{2v_0^2}{g} sin(\alpha)cos(\alpha) \tag{11}$$

   Andando a sostituire i dati del problema si ottiene:

$$\boxed{x_G = \frac{2 \cdot 10^4}{9.81}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 1019\, m} \tag{12}$$

   Una volta determinata la gittata avendo anche informazioni sulla velocità iniziale il calcolo del tempo di volo è immediato:

$$t_v = \frac{x_G}{v_0 x} = \frac{2\cancel{v_0^2}}{g}\frac{sin(\alpha)\cancel{cos(\alpha)}}{\cancel{v_0}\cancel{cos(\alpha)}} = \frac{2v_0 sin(\alpha)}{g} \tag{13}$$

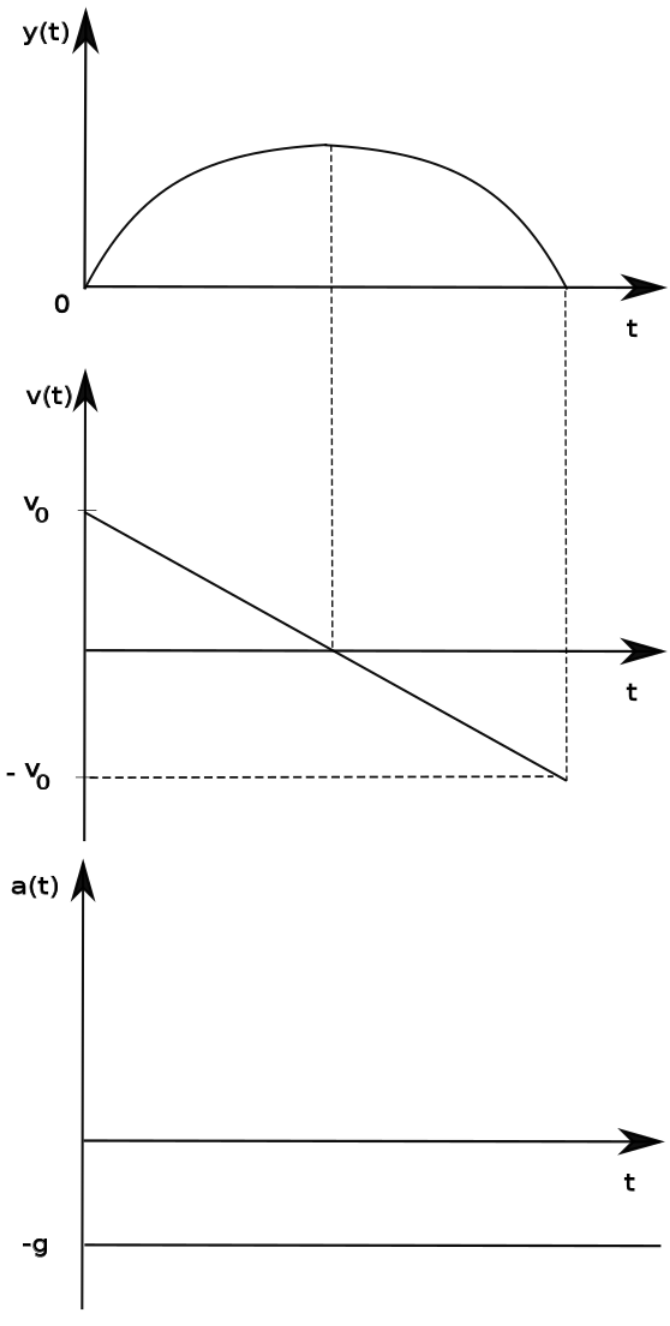

Figura 3: Grafici equazione del moto lungo y e andamento della componente y della velocità e dell'accelerazione.

Andando a sostituire i dati del problema:

$$\boxed{t_v = \frac{2 \cdot 10^2}{9.81} \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 14.4\, s} \tag{14}$$

Per quanto riguarda l'altezza massima raggiunta basta osservare che in corrispondenza di tale posizione si ha una velocità nulla e pertanto:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left((v_0 sin(\alpha))t - \frac{1}{2}gt^2\right) = v_0 sin(\alpha) - gt^* = 0^1 \tag{15}$$

$$\rightarrow t^* = \frac{v_0 sin(\alpha)}{g} \tag{16}$$

Una volta determinato l'istante di tempo che corrisponde all'altezza massima basta sostituire tale valore nell'espressione di $y(t)$ in (5):

$$\begin{aligned} h_{max} = y(t^*) &= (v_0 sin(\alpha))t^* - \frac{1}{2}g(t^*)^2 = \\ &= v_0 sin(\alpha)\left(\frac{v_0 sin(\alpha)}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 sin(\alpha)}{g}\right)^2 \end{aligned} \tag{17}$$

$$h_{max} = \frac{2v_0^2 sin^2(\alpha) - v_0^2 sin^2(\alpha)}{2g} = \frac{v_0^2 sin^2(\alpha)}{2g} \tag{18}$$

Ovvero numericamente:

$$\boxed{h_{max} = \frac{10^4}{2 \cdot 9.81} \cdot \frac{1}{2} \simeq 254.8\, m} \tag{19}$$

3. Per determinare il modulo e la velocità per $t = \frac{t_v}{3}$ si scrivono prima le due componenti:

$$\begin{cases} \boxed{v_x = v_0 cos(\alpha)} \\ \boxed{v_y} = v_0 sin(\alpha) - g(\frac{t_v}{3}) = v_0 sin(\alpha) - \frac{\cancel{g}}{3}\frac{2v_0 sin(\alpha)}{\cancel{g}} = \\ = \frac{3v_0 sin(\alpha) - 2v_0 sin(\alpha)}{3} = \boxed{\frac{v_0 sin(\alpha)}{3}} \end{cases} \tag{20}$$

Pertanto si ha:

$$\left|\vec{v}\left(\frac{t_v}{3}\right)\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 cos^2(\alpha) + \frac{v_0^2 sin^2(\alpha)}{9}} = v_0\sqrt{cos^2(\alpha) + \frac{1}{9} sin^2(\alpha)} \tag{21}$$

[1] Con t^* si è indicato l'istante di tempo che corrisponde all'altezza massima

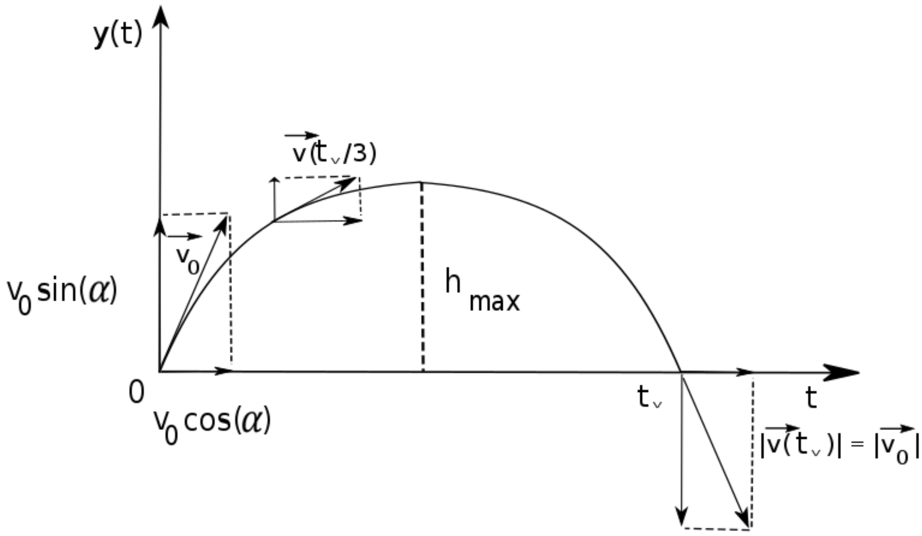

Figura 4: Andamento della velocità in diversi istanti di tempo.

Andando a sostituire i valori numerici si ha:

$$\boxed{\left|\vec{v}\left(\frac{t_v}{3}\right)\right|} = 100\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 100\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}} = \\ 100\sqrt{\frac{9+1}{18}} = 100\sqrt{\frac{\cancel{10}}{\cancel{18}}} = 100\sqrt{\frac{5}{9}} \simeq \boxed{74.5\,\frac{m}{s}} \tag{22}$$

$$Per\, t = t_v \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 cos(\alpha) \\ v_y = v_0 sin(\alpha) - \frac{2\cancel{g} v_0 sin(\alpha)}{\cancel{g}} = -v_0 sin(\alpha) \end{cases} \tag{23}$$

Pertanto il modulo della velocità nell'istante in cui il proiettile tocca terra è:

$$\left|\vec{v}(t_v)\right| = \sqrt{v_x^2(t_v) + v_y^2(t_v)} = v_0\sqrt{cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha)} = v_0 \tag{24}$$