SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

II ESERCITAZIONE DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

PROF. A. PRÁSTARO

03/12/2012

■ PROBLEMA.

Sia data l'equazione singolare

$$E_2 \subset J_2^2(W): \left\{\frac{d^2u}{dx^2}\,x - H(x-t) = 0\right\}, \tag{1}$$

sul fibrato vettoriale triviale $\pi : W \equiv \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,u) \mapsto (x)$. Qui $H(x)$ denota la distribuzione di Heaviside e t è un punto sull'asse delle x. Rispondere ai seguenti quesiti.

• **1)** Caratterizzare geometricamente l'equazione (1) rispetto alla formale integrabilità e alla completa integrabilità .

• **2)** Trovare eventuali soluzioni della (1) che soddisfano la seguente condizione di Cauchy: $\{u(x)\,\text{è continua per}\, x = t\}$.

• **SOLUZIONI.**

• **1)** L'equazione (1) è un'equazione singolare composta da due parti regolari:
(2)

$$E_2=E_2^{(-)}\bigcup E_2^{(-)}\subset JD^2(W):\left\{\begin{array}{ll}E_2^{(-)}\subset JD^2(W) & \{\frac{d^2u}{dx^2}x=0\}_{x<t}\\ & \\ E_2^{(+)}\subset JD^2(W) & \{\frac{d^2u}{dx^2}x-1=0\}_{x>t}\end{array}\right\}_{t>0}.$$

(Per semplicità abbiamo preso $t>0$.) Poichè l'equazione $E_2^{(-)}$ deve essere definita per $x<t$, possiamo riscriverla come $\frac{d^2u}{dx^2}=0$. Allora si vede facilmente che entrambe le componenti $E_2^{(\pm)}$ sono involutive, formalmente integrabili e completamente integrabili. Pertanto per ogni condizione iniziale $q_-\in E_2^{(-)}$ e $q_+\in E_2^{(+)}$ possiamo trovare soluzioni regolari rispettivamente nelle singole componenti $E_2^{(\pm)}$. Possiamo vedere facilmente che E_2 è l'unione di due sottovarietà che non hanno componenti in comune, cioè $E_2^{(-)}\bigcap E_2^{(-)}=\varnothing$. (V. Fig. 1.) Da quanto detto si vede che una soluzione che attraversa il punto di singolarità $x=t$, deve necessariamente essere una soluzione debole, cioè deve essere rappresentata da una curva discontinua in E_2. (V. Fig. 1.)

Notiamo ora che essendo le due componenti regolari di E_2 formalmente integrabili, possiamo considerare il primo prolungamento, $(E_2)_{+1}\subset JD^3(W)$, di E_2, ottenendo l'equazione (3)

$$(3)\qquad (E_2)_{+1}\subset JD^3(W):\left\{\begin{array}{l}\frac{d^2u}{dx^2}x+H(x-t)=0\\ \\ \frac{d^3u}{dx^3}x+\frac{d^2u}{dx^2}-\delta(x-t)=0.\end{array}\right.$$

Essendo l'equazione (3) affine di tipo distributivo, possiamo applicare Theorem 2.181 in Ref. [1] nel Programma, per ottenere soluzioni di tipo distributivo (funzionale), scritte nella forma (4).

$$(4)\qquad u(x|t)=F(x|t)+u(x|c_1,c_2,c_3)$$

dove $u(x|c_1,c_2,c_3)$ è la soluzione generale dell'equazione lineare associata (5).

$$(5)\qquad \frac{d^3u}{dx^3}x+\frac{d^2u}{dx^2}=0.$$

Inoltre, $F(x|t)$ è una soluzione distributiva particolare della (3). Per trovare la soluzione generale della (5) riscriviamo questa equazione nella forma $\frac{d}{dx}(\frac{d^2u}{dx^2}x)=0$. Questa individua l'integrale primo $\frac{d^2u}{dx^2}x=c_1$, che ci permette di scrivere anche $\frac{d}{dx}(\frac{du}{dx})=\frac{c_1}{x}$, dalla quale ricaviamo $\frac{du}{dx}=c_1\log x+c_2$. Integrando ulteriormente si trova l'integrale generale dell'equazione (5) nella forma (6).

$$(6)\qquad u(x|c_1,c_2,c_3)=c_1(x\log x-x)+c_2x+c_3.$$

Prendiamo la soluzione particolare $u(x)=x$ e cerchiamo un'altra soluzione $v_t(x)$ del tipo (6) che soddisfa alla condizione iniziale (7).
(7)

$$\left\{\begin{array}{l}v_t(t)=u(t)=t\\ v_t'(t)=u'(t)=1\\ v_t''(t)=u''(t)+\frac{1}{t}=\frac{1}{t}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}c_1(t\log t-t)+c_2t+c_3=t\\ c_1\log t+c_2=1\\ \frac{c_1}{t}=\frac{1}{t}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}c_3=t\\ c_2=1-\log t\\ c_1=1.\end{array}\right.$$

Quindi possiamo scrivere

$$v_t(x) = (x\log x - x) + (1 - \log t)x + t = x(\log\frac{x}{t}) + t.$$

In fine abbiamo

$$F(x|t) = xH(t - x) + v_t(x)H(x - t).$$

La soluzione distributiva $u(x|t)$ si chiama anche *soluzione fondamentale*.

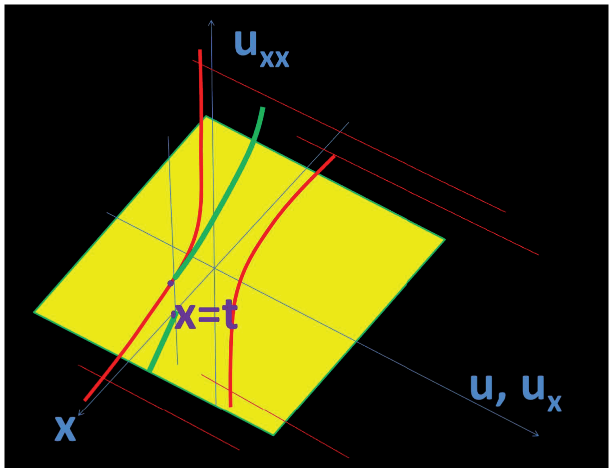

Fig. 1. Rappresentazione grafica dell'equazione singolare $E_2 = E_2^{(-)}\bigcup E_2^{(-)} \subset JD^2(W)$. Il piano giallo (3-dimensionale) rappresenta la componente $E_2^{(-)}$, mentre le due componenti disgiunte (3-dimensionali), identificate dall'iperbole equilatera del piano (x, u_{xx}), sono disegnate in rosso. La curva verde rappresenta una soluzione debole che ha, per $x = t$, una discontinuità.

• **2)** Possiamo risolvere questo problema di Cauchy utilizzando soluzioni regolari delle due componenti $E_2^{(\pm)}$, in modo che si rincollino in W, per $x = t$. Infatti dalle due soluzioni riportate in (8)

$$\left\{ \begin{array}{l} E_2^{(-)} : \{u_{(-)}(x) = ax + b\}_{a,b\in\mathbb{R}} \\ E_2^{(+)} : \{u_{(+)}(x) = x\log x - x + c_2x + c_3\}_{c_2,c_3\in\mathbb{R}}. \end{array} \right. \tag{8}$$

imponendo la continuità per $x = t$, cioè $u_{(-)}(t) = u_{(+)}(t)$, troviamo la condizione (9) sulle costanti $a, b, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

$$c_3 = b - t(\log t - 1 - a + c_2). \tag{9}$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni, che risolvono il problema di Cauchy, è identificabile con $\mathbb{R}^3$. Queste soluzioni rappresentano curve continue in W, con singolarità per $x = t$. Le corrispondenti curve integrali in E_2, invece presentano discontinuità per $x = t$, quindi sono soluzioni deboli del tipo considerato al punto **1)**.
