SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

III - IV ESERCITAZIONE DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica
PROF. A. PRÁSTARO
10/12/2012 - 14/12/2012

■ **PROBLEMA.**

Sia data l'equazione:

$$(1) \qquad E_2 \subset J^2_3(W): \ \{u_t\,x + u_{xy}u - u_xu_y = 0\}\,,$$

sul fibrato vettoriale triviale $\pi : W \equiv \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(t, x, y, u) \mapsto (t, x, y)$.

• **1)** Caratterizzare geometricamente la singolarità dell'equazione (1) nel punto $x = 0$, rispetto alla formale integrabilità e alla completa integrabilità .

• **2)** Trovare eventuali soluzioni della (1) che attraversano il punto di singolarità $x = 0$, e caratterizzarne la stabilità al finito.

• **SOLUZIONI.**

• **1)** L'equazione (1) ammette la decomposizione riportata in (2).

$$E_2 = E_2^{(\bullet)} \bigcup E_2^{(\circ)} \tag{2}$$

dove $E_2^{(\bullet)} = E_2 \bigcap Y_2$ con $Y_2 = x^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset J^2_3(W)$. Y_2 è un aperto di $J^2_3(W)$, quindi ha la stessa dimensione di $J^2_3(W)$: $\dim Y_2 = \dim J^2_3(W) = 13$.

La distribuzione di Cartan $\mathbf{E}_2(Y_2)$ di $Y_2 \subset J^2_3(W)$, è la distribuzione di Cartan $\mathbf{E}_2(W)$ di $J^2_3(W)$, ristretta a Y_2. $\mathbf{E}_2(W)$ è costituita da campi vettoriali ζ del tipo riportato in (3).

$$\left\{\begin{array}{ll} \zeta & = T(\partial t + u_t\partial u + u_{tt}\partial u_t + u_{tx}\partial u_x + u_{ty}\partial u_y) \\ & +X(\partial x + u_x\partial u + u_{xt}\partial u_t + u_{xx}\partial u_x + u_{xy}\partial u_y) \\ & +Y(\partial y + u_y\partial u + u_{yt}\partial u_t + u_{yx}\partial u_x + u_{yy}\partial u_y) \\ & +Z^{tt}\partial u_{tt} + Z^{tx}\partial u_{tx} + Z^{ty}\partial u_{ty} \\ & +Z^{xx}\partial u_{xx} + Z^{yy}\partial u_{yy} + Z^{xy}\partial u_{xy} \end{array}\right\}_{x\neq 0}. \tag{3}$$

con $T, X, Y, Z^{tt}, Z^{tx}, Z^{ty}, Z^{xx}, Z^{yy}, Z^{xy} : J^2_3(W) \to \mathbb{R}$, funzioni arbitrarie. Con questa distribuzione Y_2 diviene una EDP analitica formalmente integrabile e completamente integrabile di $J^2_3(W)$.

Poniamo $X_2 = J^2_3(W) \setminus Y_2$. X_2 risulta quindi un sotto-insieme chiuso di $J^2_3(W)$. X_2 identifica canonicamente una EDP analitica di $J^2_3(W)$, che risulta formalmente integrabile e completamente integrabile. Infatti, X_2 è individuata dall'equazione analitica $x = 0$, rispetto alle coordinate

$$t,\ x,\ y,\ u,\ u_t,\ u_x,\ u_y,\ u_{tt},\ u_{tx},\ u_{ty},\ u_{xx},\ u_{yy},\ u_{xy} : J^2_3(W) \to \mathbb{R}$$

su $J^2_3(W)$. Inoltre X_2 ha la distribuzione di Cartan $\mathbf{E}_2(X_2) = \mathbf{E}_2(W)|_{X_2}$, il cui generico campo vettoriale è riportato in (4).[1]

$$\left\{\begin{array}{ll} \xi & = T(\partial t + u_t\partial u + u_{tt}\partial u_t + u_{tx}\partial u_x + u_{ty}\partial u_y) \\ & +Y(\partial y + u_y\partial u + u_{yt}\partial u_t + u_{yx}\partial u_x + u_{yy}\partial u_y) \\ & +Z^{tt}\partial u_{tt} + Z^{tx}\partial u_{tx} + Z^{ty}\partial u_{ty} \\ & +Z^{xx}\partial u_{xx} + Z^{yy}\partial u_{yy} + Z^{xy}\partial u_{xy} \end{array}\right. \tag{4}$$

Pertanto $X_2 \subset J^2_3(W)$ è un'equazione analitica. Si può dimostrare che X_2 è formalmente integrabile. Infatti $\dim X_2 = 12$, $\dim(X_2)_{+1} = \dim(J^3_3(W)_{x=0} \cong \mathbb{R}^{22}) = 22$, $\dim(g_2(X_2))_{+1} = 10$ e

$$[\dim(X_2)_{+1} = 22] = [\dim X_2 = 12] + [\dim(g_2(X_2))_{+1} = 10].$$

Quindi l'applicazione canonica $\pi_{3,2} : (X_2)_{+1} \to X_2$ è suriettiva. Inoltre siccome $g_2(X_2) = S^0_2(\mathbb{R}^3)$ e $g_2(X_2)_{+1} = S^0_3(\mathbb{R}^3)$, ne viene che X_2 è involutiva.[2]

Poniamo $E_2^{(\circ)} = E_2 \bigcap X_2$. Possiamo identificare $E_2^{(\circ)}$ con la EDP (5).

$$E_2^{(\circ)} \subset J^2_3(W) : \left\{\begin{array}{l} F^1 \equiv u_t\, x + u_{xy}\, u - u_x u_y = 0 \\ F^2 \equiv x = 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

---

[1]Infatti ξ risulta individuato dalla condizione $\zeta.x = 0$, per qualunque ζ riportato in (3). Questa condizione è soddisfatta se e solo se $X = 0$.

[2]Comunque questa proprietà puo essere verificata direttamente. Infatti, abbiamo:

$$[\dim g_2(X_2)_{+1} = 10] = [\dim g_2(X_2) = 6] + [\dim g_2(X_2)^{(1)} = 3] + [\dim g_2(X_2)^{(2)} = 1] + [\dim g_2(X_2)^{(3)} = 0].$$

L'equazione (5) identifica una sottovarietà singolare in X_2, quindi in $J^2_3(W)$. Infatti la matrice jacobiana $(\partial\xi_\alpha.F^k)(q)$, per $q\in E_2^{(\circ)}$ è riportata in (6).
(6)
$$(\partial\xi_\alpha.F^k)(q)|_{q\in E_2^{(\circ)}}=\begin{pmatrix} 0 & u_t & 0 & u_{xy} & 0 & -u_y & -u_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$
Questa ha rango 2 se det $\begin{pmatrix} u_t & u\\ 1 & 0\end{pmatrix}=-u\neq 0$. Quindi possiamo decomporre $E_2^{(\circ)}$ nella forma (7).

(7) $$E_2^{(\circ)}=E_2^{(\circ)(u\neq 0)}\bigcup E_2^{(\circ)(u=0)}.$$

Siccome $Z_2\equiv u^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ è un aperto di $J^2_3(W)$, quindi $\dim Z_2=13$. Ne viene che $X_2(Z_2)\equiv X_2\bigcap Z_2$ è una sottovarietà di X_2, di dimensione $\dim X_2(Z_2)=12$. Pertanto $E_2^{(\circ)(u\neq 0)}\subset X_2(Z_2)$ risulta una sottovarietà analitica di dimensione 11 di $J^2_3(W)$. Considerando la distribuzione di Cartan $\mathbf{E}_2(E_2^{(\circ)(u\neq 0)})$ di $E_2^{(\circ)(u\neq 0)}$, ottenuta per restrizione di quella di X_2 a $E_2^{(\circ)(u\neq 0)}$, si identifica $E_2^{(\circ)(u\neq 0)}$ come una EDP di $J^2_3(W)$. Più precisamente $\mathbf{E}_2(E_2^{(\circ)(u\neq 0)})$ è data da campi vettoriali del tipo rioprtato in (8).

(8) $$\left\{\begin{array}{ll}\bar\xi & =T[\partial t+u_t\partial u+u_{tt}\partial u_t+u_{tx}\partial u_x+u_{ty}\partial u_y\\ & -\frac{1}{u}(\frac{u_t}{u}u_xu_y-u_{tx}u_y-u_{ty}u_x)\partial u_{xy}]\\ & +Y(\partial y+u_y\partial u+u_{yt}\partial u_t+u_{yx}\partial u_x+u_{yy}\partial u_y\\ & -\frac{1}{u}(\frac{1}{u}u_xu_y-\frac{1}{u}u_xu_y^2-u_{yy}u_x)\partial u_{xy}]\\ & +Z^{tt}\partial u_{tt}+Z^{tx}\partial u_{tx}+Z^{ty}\partial u_{ty}\\ & +Z^{xx}\partial u_{xx}+Z^{yy}\partial u_{yy}.\end{array}\right.$$

Si può vedere che questa equazione è formalmente integrabile e completamente integrabile. Infatti per il primo prolungamento, riportato in (9),
(9)
$$(E_2^{(\circ)(u\neq 0)})_{+1}\subset J^3_3(W):\left\{\begin{array}{l}F^1\equiv u_t\,x+u_{xy}\,u-u_xu_y=0\\ F^2\equiv x=0.\\ F^1_t\equiv u_{tt}x+u_{txy}u+u_{xy}u_t-u_{tx}u_y-u_xu_{ty}=0\\ F^1_x\equiv u_{xt}x+u_t+u_{xxy}u-u_{xx}u_y=0\\ F^1_y\equiv u_{ty}x+u_{xyy}u-u_xu_{yy}=0\end{array}\right\}_{(u\neq 0)}.$$
Ricaviamo
$$[\dim(E_2^{(\circ)}(u\neq 0))_{+1}=18]=[\dim E_2^{(\circ)(u\neq 0)}=11]+[\dim(g_2(E_2^{(\circ)(u\neq 0)}))_{+1}=7],$$
che dimostra che la sequenza
$$(E_2^{(\circ)(u\neq 0)})_{+1}\xrightarrow{\pi_{3,2}}E_2^{(\circ)(u\neq 0)}\longrightarrow 0$$
è esatta. Non risulta invece involutivo il simbolo di $E_2^{(\circ)(u\neq 0)}$. Infatti abbiamo:
$$\begin{array}{ll}[\dim(g_2^{(\circ)}(u\neq 0))_{+1}=7] & <[\dim g_2^{(\circ)}(u\neq 0)=5]+[\dim(g_2^{(i)}(E_2^{(\circ)(u\neq 0)}))=2]\\ & +[\dim(g_2^{(2)}(E_2^{(\circ)(u\neq 0)}))=1]+[\dim(g_2^{(3)}(E_2^{(\circ)(u\neq 0)}))=0].\end{array}$$
D'altro canto possiamo verificare che risulta suriettiva l'applicazione canonica
$$\pi_{2+r,2+(r-1)}:(E_2^{(\circ)(u\neq 0)})_{+r}\to(E_2^{(\circ)(u\neq 0)})_{+(r-1)}.$$
Poichè, dopo un numero finito di prolungamenti, diciamo s, il simbolo diviene necessariamente involutivo, ne viene che $E_2^{(\circ)(u\neq 0)}$ risulta formalmente integrabile,

quindi essendo analitica, anche completamente integrabile. Sia $\Xi_2 \subset J^2_3(W)$ la sottovarietà di $J^2_3(W)$ definita dalla (10).

$$\Xi_2 = \{q \in J^2_3(W) \,|\, x(q) = 0,\, u(q) = 0\} \subset X_2 \subset J^2_3(W). \tag{10}$$

La caratterizzazione di Ξ_2 come EDP viene fatta tramite la restrizione di Cartan di $J^2_3(W)$. Abbiamo quindi che la distribuzione di Cartan $\mathbf{E}_2(\Xi_2)$ di Ξ_2 è generata da campi vettoriali riportati in (11).[3]

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta & = Z^{tt}\partial u_{tt} + Z^{tx}\partial u_{tx} + Z^{ty}\partial u_{ty} \\ & +Z^{xx}\partial u_{xx} + Z^{yy}\partial u_{yy} + Z^{xy}\partial u_{xy}. \end{array} \right. \tag{11}$$

Quindi $\Xi_2 \subset J^2_3(W)$ è una sottovarietà analitica 11-dimensionale di $J^2_3(W)$, che risulta una EDP completamente degenere di $J^2_3(W)$. Infatti $\ker((\pi_{2,0})_*|_{\mathbf{E}_2(\Xi_2)_q}) = \mathbf{E}_2(\Xi_2)_q$, $\forall q \in \Xi_2$.

Inoltre $E_2^{(\circ)(u=0)}$ viene definita dalla (12).

$$E_2^{(\circ)(u=0)} \subset \Xi_2 \subset J^2_3(W) : \left\{ \begin{array}{l} F^1 \equiv u_t x + u_{xy}u - u_x u_y = 0 \\ F^2 \equiv x = 0 \\ F^3 \equiv u = 0 \end{array} \right\}. \tag{12}$$

La struttura della sotto-varietà singolare 10-dimensionale, $E_2^{(\circ)(u=0)}$, di $J^2_3(W)$ risulta $E_2^{(\circ)(u=0)} \cong \Gamma \times \mathbb{R}^9$, dove $\Gamma = \{u_x u_y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, rappresenta una sottovarietà singolare 1-dimensionale di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^9$ contiene le coordinate

$$\{t, y, u_t, u_{tt}, u_{tx}, u_{ty}, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\}.$$

La distribuzione di Cartan $\mathbf{E}_2(E_2^{(\circ)(u=0)})$ di $E_2^{(\circ)(u=0)}$ si ottiene per restrizione della $\mathbf{E}_2(\Xi_2)$ su $E_2^{(\circ)(u=0)}$. Quindi coincide con la stessa distribuzione di Cartan di Ξ_2. Riassumendo possiamo dire che l'equazione E_2 ammette la decomposizione

$$E_2 = E_2^{(\bullet)} \bigcup E_2^{(\circ)(u\neq 0)} \bigcup E_2^{(\circ)(u=0)}.$$

La parte completamente regolare risulta la $E_2 = E_2^{(\bullet)}$, mentre $E_2^{(\circ)(u\neq 0)} \bigcup E_2^{(\circ)(u=0)}$ è la parte singolare di E_2. Di questa $E_2^{(\circ)(u=0)}$ risulta la parte completamente degenere.

• **2)** Notiamo che per ogni punto $q \in E_2^{(\bullet)}$ passa una soluzione di $E_2^{(\bullet)}$, che risulta pure una soluzione di E_2. In particolare, per ogni punto $q_\infty \in (E_2^{(\bullet)})_{+\infty}$ viene identificata una soluzione analitica passante per $q = \pi_{\infty,2}(q_\infty) \in E_2$.

L'equazione $E_2^{(\circ)(u\neq 0)}$ pur essendo analitica e completamente integrabile, non risulta completamente regolare come sotto-equazione di E_2. Infatti

$$\dim(\pi_{2,0})_*(\mathbf{E}_2(E_2^{(\circ)(u\neq 0)}))_q = 2,$$

con componenti lungo ∂y e ∂u. Questo significa che soluzioni di $E_2^{(\circ)(u\neq 0)} \subset J^2_3(W)$ sono varietà integrali 3-dimensionali, V, necessariamente del tipo $V \cong \Gamma \times \mathbb{R}^2$, dove Γ è una sottovarietà integrale 1-dimensionale regolare di $E_2^{(\circ)(u\neq 0)}$, (parametrizzata da u e y), e $\mathbb{R}^2$ è parametrizzata da t e x. Quindi una possibile soluzione di E_2, passante per la singolarità $E_2^{(\circ)(u\neq 0)}$, è una funzione $u(t,x,y) = h(y)$.

[3] Applicando il campo vettoriale ξ, riportato in (4), all'equazione $u = 0$, otteniamo le condizioni $Tu_t + Yu_y = 0$ che dovendo essere verificate per ogni u_t e u_y, implicano $T = Y = 0$.

Soluzioni che attraversano i punti di singolarità si possono ottenere anche considerando soluzioni stazionarie, cioè contenute nella sotto-EDP $u_t = 0$ di E_2. Questa equazione coincide con l'equazione di d'Alembert $(d'A)$, che nell'aperto $u \neq 0$ è formalmente integrabile e completamente integrabile. Se $V \subset (d'A)$ è una soluzione di questa equazione, localmente rappresentata da $u(x, y)$, allora la $\widetilde{V} = V \times \mathbb{R}$ è una varietà 3-dimensionale integrale che rappresenta una soluzione, $u(t, x, y) = h(x, y)$, di E_2. Se si interseca $\widetilde{V}$ con $E_2^{(\circ)(u\neq 0)}$, si ottiene una varietà integrale 1-dimensionale di $E_2^{(\circ)(u\neq 0)}$. Evidentemente $\widetilde{V}$ attraversa la singolarità $E_2^{(\circ)(u\neq 0)} \subset E_2$. Questo è una conseguenza del fatto che la distribuzione di Cartan di $E_2^{(\circ)(u\neq 0)}$ si rincolla con quella di $E_2^{(\bullet)}$. Questo significa che $\lim_{x\to\infty} \mathbf{E}_2(E_2^{(\bullet)}) \supset \mathbf{E}_2(E_2^{(\circ)(u\neq 0)})$.

Notiamo che per ogni $\bar{q} \in (E_2^{(\bullet)})_{+1}$, abbiamo lo spezzamento

$$\mathbf{E}_2(E_2^{(\bullet)})_{q=\pi_{3,2}(\bar{q})} = L_{\bar{q}} \bigoplus g_2(E_2^{(\bullet)})_q$$

dove $L_{\bar{q}} \subset T_q E_2^{(\bullet)}$ è il piano integrale individuato da $\bar{q}$. Osserviamo che $g_2(E_2^{(\bullet)})_q \subset \mathbf{E}_2(E_2^{(\circ)(u=0)})_q$, or $g_2(E_2^{(\bullet)})_q \subset \mathbf{E}_2(E_2^{(\circ)(u\neq 0)})_q$. Quindi soluzioni singolari di $E_2^{(\bullet)}$ sono anche soluzioni che passano per la parte singolare di E_2.

• Studiare la stabilità di queste soluzioni al finito, significa studiare la stabilità di una soluzione regolare, rispetto al flusso caratteristico che genera la soluzione stessa. Il tempo finito e quello di questo flusso ! La soluziuone si dice stabile se la deformazione generata dalle perturbazioni, lasciano la soluzione deformata in un intorno della soluzione data. Le perturbazioni ammissibili sono soluzioni dell'equazione linearizzata dell'equazione, intorno alla soluzione considerata. Sia $E_2[s] \subset JD^2(E[s])$, questa equazione linearizzata, intorno alla soluzione s, allora s risulta instabile se $E_2[s]$ ammette soluzioni singolari. Infatti queste produrrebbero pertubazioni di s, che provocherebbero deformazioni esplosive. L'esistenza di queste soluzioni singolari è legata alla presenza di un simbolo non nullo per $E_2[s]$. In particolare la linearizzazione di (1) è riportata in (13).

$$\nu_t\, x + [u]_0\nu_{xy} + [u_{xy}]_0\nu - [u_y]_0\nu_x - [u_x]_0\nu_y = 0. \tag{13}$$

Questa equazione ha in generale un simbolo di dimensione 5. Quindi la (1) non può avere soluzioni stabili al finito.