SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

I ESERCITAZIONE DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica
PROF. A. PRÁSTARO
19/11/2012

• PROBLEMA SU EDP DEL SECONDO ORDINE: PROBLEMI DI CAUCHY DEGENERI E SOLUZIONI INVILUPPO.

Do envelop solutions represent ghost solutions ?

Sia data l'equazione differenziale riportata in (1)

$$E_2 \subset JD^2(W): \ u_t + uu_{xy} - u_x u_y = 0 \tag{1}$$

sul fibrato vettoriale triviale $\pi : W \equiv \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(t, x, y, u) \mapsto (t, x, y)$.
Rispondere ai seguenti quesiti.
1) L'equazione nonlineare (1) è formalmente integrabile ? L'equazione (1) è completamente integrabile ?
2) Si può costruire una soluzione passante per un dato di Cauchy N identificato da un disco D^2 di raggio R, contenuto nel piano $\mathbb{R}^2 = W_{t=0,y=0} \subset W$?

• **SOLUZIONE**.
1) L'equazione (1) si può chiamare *equazione del calore di d'Alembert* perchè contiene la sotto-equazione $uu_{xy} - u_x u_y = 0$, che è appunto la nota *equazione di d'Alembert*. Inoltre contenendo il termine u_t, permette di considerare l'equazione (1) una variazione nonlineare dell'equazione del calore di Fourier. L'equazione (1) è una sottovarietà analitica (algebrica) $E_2 \subset JD^2(W)$ e tale risulta anche il suo primo prolungamento $(E_2)_{+1} \subset JD^3(W)$ riportato in (2).

$$
(2) \qquad (E_2)_{+1} \subset JD^3(W) : \left\{ \begin{array}{l} u_t + uu_{xy} - u_x u_y = 0 \\ u_{tt} + u_t u_{xy} + uu_{xyt} - u_{xt} u_y - u_x u_{yt} = 0 \\ u_{tx} + u_x u_{xy} + uu_{xyx} - u_{xx} u_y - u_x u_{yx} = 0 \\ u_{ty} + u_y u_{xy} + uu_{xyy} - u_{xy} u_y - u_x u_{yy} = 0 \end{array} \right.
$$

L'applicazione canonica $\pi_{3,2} : (E_2)_{+1} \to E_2$ risulta suriettiva. Infatti, $(\dim(E_2)_{+1} = 19) = (\dim E_2 = 12) + (\dim(g_2)_{+1} = 7)$, con g_2 il simbolo di E_2 e $(g_2)_{+1}$ il simbolo di $(E_2)_{+1}$. Il simbolo g_2 non risulta involutivo. Infatti abbiamo

$$
(\dim(g_2)_{+1} = 7) < (\dim g_2 = 5) + (\dim(g_2)_{(1)} = 2) + (\dim(g_2)_{(2)} = 1) + (\dim(g_2)_{(3)} = 0).
$$

D'altro canto possiamo verificare subito che le applicazioni canoniche $\pi_{2+s,2+(s-1)} : (E_2)_{+s} \to (E_2)_{+(s-1)}$ sono fibrati affini, per $s \geq 1$. Pertanto tenendo conto che dopo un numero finito di prolungamenti, diciamo r, risulterà sicuramente $(g_2)_{+r}$ involutivo, possiamo concludere che l'equazione (1) è formalmente integrabile. Poichè E_2 risulta un'equazione analitica (reale) ne viene che è pure completamente integrabile. Quindi per ogni punto $q \in E_2$, passa una soluzione locale della E_2.
2) Per rispondere a questa domanda si deve innanzi tutto verificare che possiamo rappresentare D^2 come una sottovarietà 2-dimensionale integrale di $(E_2)_{t=0,y=0}$. Per questo sfruttando il fatto che $JD^2(W)$ è un aperto di $J^2_3(W)$, possiamo interpretare E_2 come un'equazione per sottovarietà 3-dimensionali di W. Questo ci permette di rappresentare D^2 come una sottovarieta N di $(E_2)_{t=0,y=0}$, che si proietta diffeomorficamente su $D^2 \subset W_{t=0,y=0}$, tramite l'applicazione $\pi_{2,0} : E_2 \to W$. Si tratta però di verificare che la varietà 2-dimensionale N risulta anche integrale. Questo si ottiene considerando la distribuzione di Cartan, $\mathbf{E}_2 \subset TE_2$, di E_2, ristretta a N. Allora se $\dim(\mathbf{E}_2|_N) = 2$, possiamo affermare che $D^2 \subset W_{t=0,y=0}$ identifica, anche se non-canonicamente, un dato regolare di Cauchy di $E_2 \subset J^2_3(W)$. Ora la distribuzione di Cartan di E_2 è 8-dimensionale, i.e., $\dim(\mathbf{E}_2)_{q \in E_2} = 8$, con vettori base $\{\zeta_k(q)\}_{1 \leq k \leq 8}$ riportati in (3).

(3)
$$
\left\{ \begin{array}{ll} \zeta_1(q) & = \partial t + u_t \partial u + u_{tt} \partial u_t + u_{tx} \partial u_x + u_{ty} \partial u_y + u_{txy} \partial u_{xy} \\ \zeta_2(q) & = \partial x + u_x \partial u + u_{tx} \partial u_t + u_{xx} \partial u_x + u_{xy} \partial u_y + u_{xxy} \partial u_{xy} \\ \zeta_3(q) & = \partial y + u_y \partial u + u_{ty} \partial u_t + u_{yx} \partial u_x + u_{yy} \partial u_y + u_{yxy} \partial u_{xy} \\ \zeta_4(q) & = \partial u_{tt},\ \zeta_5(q) = \partial u_{tx},\ \zeta_6(q) = \partial u_{ty},\ \zeta_7(q) = \partial u_{xx},\ \zeta_8(q) = \partial u_{yy} \end{array} \right\}_{\bar{q} \in (E_2)_{+1}}
$$

Notiamo che i vettori base in (3) danno uno spezzamento $(\mathbf{E}_2)_{q \in E_2} = L_{\bar{q}} \bigoplus (g_2)_{q \in E_2}$, con $\bar{q} \in (E_2)_{+1}$, tale che $\pi_{3,2}(\bar{q}) = q$ e $L_{\bar{q}} \subset \mathbf{E}_2)_{q \in E_2} \subset T_q E_2$ il piano-integrale determinato dal punto $\bar{q} \in (E_2)_{+1}$. Si verifica subito che $\dim(\mathbf{E}_2|_N) = 1$. Questo permette di affermare che N è un dato di Cauchy di tipo degenere. Quindi non può essere utilizzato per identificare soluzioni regolari (o singolari) di E_2.

• *Esempio: soluzioni rigide.* Per esempio noi possiamo trovare *soluzioni rigide* dell'equazione (1), cioè soluzioni che non dipendono dal tempo.[1] Queste soluzioni esistono perchè l'equazione (1) è invariante per traslazioni temporali. Possiamo allora scrivere queste soluzioni nella forma $u(t,x,y) = f(x,y)$, dove $f(x,y)$ è una qualunque soluzione dell'equazione di d'Alembert $uu_{xy} - u_x u_y = 0$. Una possibile espressione per $f(x,y)$ potrebbe essere $f(x,y) = a(x)b(y)$. allora abbiamo

$$u(t = 0, x, y = 0) = a(x)b(0),$$

quindi non può soddisfare la condizione di Cauchy richiesta al punto **2)**. Notiamo comunque che se non richiediamo che il disco D^2 sia necessariamente nel piano (x,u), possiamo vedere che la soluzione triviale $u(x,y) = c$ dell'equazione di d'Alembert con la limitazione $-R \leq x, y \leq R$, $x^2 + y^2 \leq R^2$, identifica un disco e quindi $V \cong D^2 \times \mathbb{R}$, rappresenta una soluzione regolare (rigida) del problema di Cauchy passante per D^2.

• *Topologia algebrica di EDP: Soluzioni inviluppo (o soluzioni viscosità).* Soluzioni che soddisfano dati di Cauchy degeneri sono del tipo *soluzioni inviluppo* (anche chiamate *soluzioni viscosità*). Infatti $D^2 \cong N$ può scriversi come unione di 1-catene integrali

$$N = \bigcup_{0 \leq \epsilon \leq R} \Gamma_\epsilon$$

dove Γ_ϵ è un cerchio di raggio ϵ, avente in ogni punto lo spazio tangente 1-dimensionale, contenuto nella distribuzione di Cartan di E_2. Ciascuno di questi cerchi identifica varietà integrali tipo-tempo di dimensione 2, che ammettono come inviluppo una varietà tipo-tempo 3-dimensionale V. Sono appunto queste varietà V che possono essere chiamate soluzioni inviluppo (o viscosità) del problema di Cauchy degenere, identificato da N. La verifica che le soluzioni inviluppo non sono soluzioni proprie della (1) si può effettuare facilmente. Infatti tali soluzioni si possono scrivere come sottovarietà 3-dimensionali $V \subset E_2$, che ammettono la seguente decomposizione $V = \bigcup_{0 \leq \epsilon \leq R} V_\epsilon$, dove V_ϵ sono 2-catene integrali per $\epsilon \neq 0$, e V_0 è una 1-catena integrale. Per esempio, possiamo prendere $V_\epsilon \cong \Gamma_\epsilon \times \mathbb{R}$ che rappresenta la propagazione rigida del cerchio integrale $\Gamma_\epsilon \subset (E_2)_{t=0,y=0}$, quindi V_ϵ rappresenta una varietà integrale 2-dimensionale. Se si considera la restrizione $\mathbf{E}_2|_V$ della distribuzione di Cartan di E_2 alla varietà 3-dimensionale V, si ottiene una distribuzione 2-dimensionale ! In altre parole la "terza dimensione" (quella lungo ϵ) di V non risulta integrale. Quindi la risoluzione di problemi di Cauchy completamente degeneri, porta necessariamente a soluzioni inviluppo. Queste soluzioni potrebbero essere considerate, per così dire, soluzioni virtuali o meglio *ghost solutions*. Infatti pur essendo rappresentate da sottovarietà di E_2, aventi la giusta dimensione (in questo caso la loro dimensione è 3), e di tipo-tempo, cioè propaganti nel tempo una sottovarietà 2-dimensionale tipo-spazio, non soddisfano la condizione di regolarità. Questo è causato dal fatto che la sottovarietà 2-dimensionale tipo-spazio risulta completamente degenere, mancando della dimensione lungo la coordinata y ! Va comunque sottolineato che queste soluzioni sono somma di 2-catene integrali tipo-tempo V_ϵ, che possono essere chiamate *soluzioni di bassa-dimensione*. Non c'è dubbio che queste soluzioni di bassa dimensione non sono virtuali e quindi anche se il loro inviluppo $V = \bigcup_{0 \leq \epsilon \leq R} V_\epsilon$ non rappresenta una vera soluzione di E_2, non rappresentando una varietà integrale 3-dimensionale di E_2, hanno pur sempre

[1] Queste soluzioni si possono anche chiamare di *stato stazionario*.

un significato geometrico preciso, quindi una interpretazione fisica precisa. Infatti, possiamo considerare come dati di Cauchy regolari $\Gamma_\epsilon \times I$, con $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$, intervallo compatto dell'asse y, quindi $\widehat{V} \equiv V \times I \cong \bigcup_{0\le\epsilon\le R} V_\epsilon \times I \equiv \bigcup_{0\le\epsilon\le R} \widehat{V}_\epsilon$, interpreta una 3-catena, somma di 3-catene, $V_\epsilon \times I$, soluzioni regolari della E_2. Quindi $\widehat{V}$ può essere considerata come una soluzione regolare della E_2. Poichè ciascuna delle soluzioni $\widehat{V}_\epsilon$ rappresenta la propagazione di un disturbo localizzato soltanto lungo la coordinata x, ne viene che anche $\widehat{V}$ puo essere considerata come un soluzione regolare, in quanto sovrapposizione di opportune soluzioni regolari. (Notare che questo risultato si può ottenere soltanto considerando soluzioni regolari di E_2 tramite l'interpretazione di soluzioni di E_2 come p-catene integrali.)

• Notiamo pure che quanto detto per l'equazione (1) si può estendere ad analoghe generalizzazioni dell'equazione del calore. Per esempio, se consideriamo la EDP riportata in (4),

$$\widetilde{E}_2 \subset JD^2(W): \ u_t + u_{xy} - u_x u_y = 0 \tag{4}$$

possiamo verificare che il dato di Cauchy in **2)** deve essere considerato completamente degenere anche per (4). Quindi anche in questo caso soluzioni che soddisfano questo dato di Cauchy degenere, sono necessariamente soluzioni di tipo inviluppo (o viscosità).

Notiamo che per l'equazione (4) una soluzione rigida risulta necessariamente una soluzione del tipo $u(t,x,y) = c \in \mathbb{R}$. Quindi se inizialmente il dato di Cauchy è un disco contenuto nel piano $u = c$ di $W_{t=0} \cong \mathbb{R}^3$, la corrispondente soluzione V risulterà regolare: $V \cong D^2 \times \mathbb{R}$. Ma se il dato di Cauchy è un disco nel piano (x,u), allora questo dato di Cauchy risulta degenere ma la corrispondente soluzione inviluppo rigida può ugualmente essere costruita considerando la decomposizione del disco in 1-catene costituite da segmenti di lunghezza 2ϵ, $0 \le \epsilon \le R$, paralleli all'asse delle x, centrati sull'asse delle u, a $\pm(R-\epsilon)$.