



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

V ESERCITAZIONE DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE  
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica  
PROF. A. PRÁSTARO  
19/12/2012

■ **PROBLEMA.** “Distribuzioni di singolarità di EDP”

Sia data l'equazione:

$$(1) \quad E_2 \subset J_3^2(W) : \{u_t x + u_{xy}u - u_x u_y = 0\},$$

sul fibrato vettoriale triviale  $\pi : W \cong \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, x, y, u) \mapsto (t, x, y)$ .

Rispondere ai seguenti quesiti.

- **1)** È possibile caratterizzare soluzioni di  $E_2$  che siano stabili al finito ?
- **2)** È possibile caratterizzare soluzioni distributive della (1) con il metodo di Theorem 2.181 in Refs. [1] di **Programma** ?

## ■ SOLUZIONE.

1) L'equazione (1) ha un simbolo  $g_2$  di dimensione 5, anche per la parte regolare  $E_2^{(\bullet)} \subset J_3^2(W)$ . (Si fa riferimento alle Esercitazioni III - IV del 10-12-2012 - 14-12-2012, nella quale si era incominciato a studiare la stessa equazione.) Pertanto non può in generale avere soluzioni stabili al finito. Comunque, se consideriamo soluzioni lisce di  $E_2^{(\bullet)} \subset J_3^2(W)$ , queste son necessariamente contenute nel prolungamento infinito  $(E_2^{(\bullet)})_{+\infty} \subset J_3^\infty(W)$ . Questa equazione ha simbolo nullo, e la relativa distribuzione di Cartan  $\mathbf{E}((E_2^{(\bullet)})_{+\infty})$  è 3-dimensionale e tangente ad ogni varietà 3-dimensionale contenuta in  $(E_2^{(\bullet)})_{+\infty}$ , rappresentante una soluzione liscia di  $E_2^{(\bullet)} \subset J_3^2(W)$ . Questa struttura non permette quindi instabilità al finito. Quindi queste soluzioni sono stabili al finito, all'interno di  $(E_2^{(\bullet)})_{+\infty}$ .

2) Consideriamo la "parte singolare" (2) dell'equazione (1), intorno alla singolarità per  $x = 0$ .

$$(2) \quad E_2^{(\circ)(u \neq 0)} \subset J_3^2(W) : \begin{cases} u_{xy}u - u_x u_y = 0 \\ u \neq 0 \end{cases}$$

Soluzioni  $u(t, x, y) = h(y)$  della (2) sono rappresentate da varietà integrali 3-dimensionali  $V \cong \Gamma \times \mathbb{R}^2$ , dove  $\Gamma$  identifica una curva nel piano  $(u, y)$  e  $\mathbb{R}^2$  è parametrizzata da  $(t, x)$ . Caratterizziamo perturbazioni distributive di queste soluzioni. Per questo linearizziamo l'equazione  $E_2^{(\circ)(u \neq 0)}$ , intorno a  $V(2)$ . Otteniamo l'equazione (3).

$$(3) \quad E_2^{(\circ)(u \neq 0)}[V] \subset J_3^2(W) : \nu_{xy}[h(y)] - \nu_x[h'(y)] = 0.$$

Associamo all'equazione (3), l'equazione distributiva (4).<sup>1</sup>

$$(4) \quad E_2^{(\circ)(u \neq 0)}[V] : \Xi_{xy}[h(y)] - \Xi_x[h'(y)] = \delta(t - t_0)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$$

dove  $\Xi = \Xi(t, x, y|t_0, x_0, y_0)$  è una distribuzione su  $M = \mathbb{R}^3$ :

$$\Xi \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \Lambda_3^0 \mathbb{R}^3))'.$$

Consideriamo soluzioni del tipo  $\Xi = T(t|t_0)A(x|x_0)B(y|y_0)$ . Allora l'equazione (4) si può riscrivere nella forma (5).

$$(5) \quad E_2^{(\circ)(u \neq 0)}[V] : TA_x\{B_y[h(y)] - B[h'(y)]\} = \delta(t - t_0)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0).$$

<sup>1</sup>Ricordiamo che ad un operatore differenziale lineare  $\kappa : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ , tra fibrati vettoriali su di una stessa varietà differenziale  $n$ -dimensionale,  $M$ , possiamo associare un operatore distributivo  $\tilde{\kappa} : (C_0^\infty(E'))' \rightarrow (C_0^\infty(F'))'$ , dove  $E' = E^* \otimes \Lambda_n^0 M$  e  $F' = F^* \otimes \Lambda_n^0 M$  sono i *formali aggiunti* di  $E$  e  $F$ , rispettivamente. Inoltre  $\mathbb{D} \in C_0^\infty(F \boxtimes F')' \cong C_0^\infty(F' \boxtimes F)'$  è il *nucleo di Green* di  $F$ , definito da  $\mathbb{D}(f \otimes \alpha) = \int_M \langle f, \alpha \rangle$ ,  $\forall f \in C_0^\infty(F)$ ,  $\alpha \in C_0^\infty(F')$ . Qui si definisce  $F \boxtimes F' = \bigcup_{(x, x') \in M \times M} F_x \otimes (F')_{x'}$ .  $\mathbb{D}$  ammette la rappresentazione locale  $(\mathbb{D}|_U)_i^j(x, x') = \delta_i^j \delta(x, x')$ . In particolare se  $F = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , abbiamo

$$\mathbb{D}(x, x') = \delta(x, x') = \delta(x^1 - x_0^1) \cdots \delta(x^n - x_0^n).$$

(Per ulteriori informazioni vedere anche Ref. [1] in **Programma** e Section 1 in A. Prástaro, *Integral bordism and Green kernels in PDEs*, Cubo Matematica Educacional, **4(2)**(2002), 315-37. (Materiale rilasciato a lezione.))

Questa si spezza nelle tre equazioni riportate in (6).

$$(6) \quad \widetilde{E_2^{(\circ)(u \neq 0)}}[V] : \begin{cases} (1) & B_y[h(y)] - B[h'(y)] = \delta(y - y_0) \\ (2) & A_x = \delta(x - x_0) \\ (3) & T = \delta(t - t_0). \end{cases}$$

Le soluzioni distributive di queste equazioni si possono ottenere applicando Theorem 2.181 in Refs. [1] di **Programma**. Il corrispondente risultato è riportato in (7).

$$(7) \quad \left. \begin{cases} \Xi(t, x, y|t_0, x_0, y_0) = \delta(t - t_0)A(x|x_0)B(y|y_0) \\ A(x - x_0) = \bar{\alpha}H(x_0 - x) + (\bar{\alpha} + 1)H(x - x_0) + \alpha \\ B(y - y_0) = \bar{\beta}h(y)H(y_0 - y) + (\bar{\beta} + \frac{1}{h^2(y_0)})h(y)H(y - y_0) + \beta h(y) \end{cases} \right\}_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}, \text{fixed}}$$

**Osservazione: Distribuzioni di singolarità dell'equazione  $E_2 \subset J_3^2(\mathbf{W})$ .** Perturbazioni distributive del tipo (7) sono quindi una generalizzazione delle perturbazioni che interessano la "parte singolare"  $E_2^{(\bullet)(u \neq 0)}$ , intorno a soluzioni regolari di  $E_2$  che attraversano la singolarità  $x = 0$ . Definiamo tali perturbazioni *distribuzioni di singolarità* dell'equazione  $E_2$ .



## VALUTAZIONI

---

4

(1) DUCROT, Carlo [1347315] .....	<b>22</b>
(2) GRASELLI, Gabriele [1797570] .....	<b>22</b>
(3) LAPENNA, Pasquale E. [1470272] .....	<b>19</b>
(4) LUCANTONI, Cristiano [1314934] .....	<b>20</b>
(5) MIOZZI, Lorenzo [1325451] .....	<b>19</b>
(6) PAIFELMAN, Elena [1326268] .....	<b>27</b>
(7) TINTI, Antonio [1336755] .....	<b>22</b>

---

Roma, 24/12/2012

Prof. Agostino Prástaro