



IV ESERCITAZIONE DI MECCANICA RAZIONALE

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

PROF. A. PRÁSTARO

12/12/2012

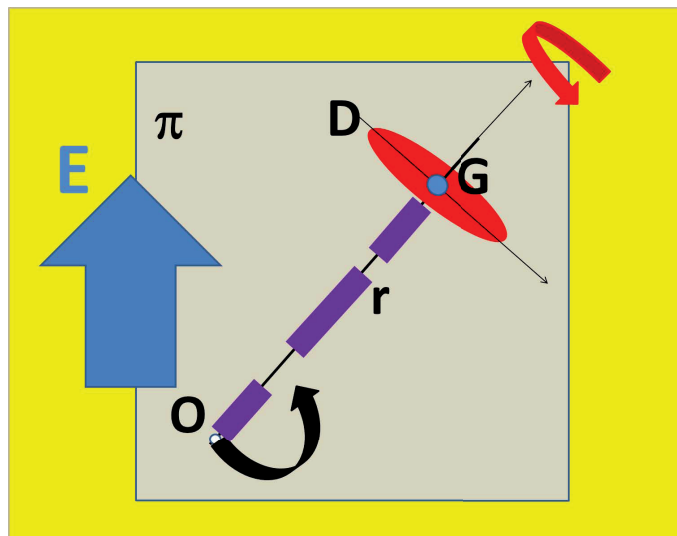


FIG. 1. Disco D , ruotante, con richiamo elastico radiale in un piano verticale π , e portatore di carica elettrica baricentrale, immerso in campo elettrico costante E .

• **SISTEMA MECCANICO.** “*The Conservation Laws Festival*”

Il sistema meccanico è costituito da un disco D , omogeneo di raggio R , piano del disco ortogonale ad una retta r , passante per il baricentro G di D . La retta r ruota in un piano verticale, π , intorno ad un punto $O \in \pi$. Il baricentro G è portatore di una carica elettrica $q > 0$. Inoltre lungo r è infilata una molla ideale di costante elastica $\kappa > 0$, puntata in O ed applicata a $G \in D$. Tutto il sistema è immerso in un campo elettrico costante E , verticale e diretto verso l’alto. I vincoli si considerano lisci e bilateri.

(Vedere Fig. 1.)

• **QUESITI**

- 1) Scrivere la lagrangiana del moto del sistema rispetto ad un osservatore inerziale solidale con π , e calcolare la corrispondente equazione di Lagrange.
- 2) Individuare eventuali integrali primi e vedere se costituiscono un sistema completo.
- 3) Esistono configurazioni di stato stazionario stabili, con il disco disposto sulla verticale, e dal lato superiore rispetto al punto O ? Possono queste configurazioni essere raggiunte da condizioni iniziali che dispongono il disco sulla verticale ma dalla posizione diametralmente opposta rispetto ad O ?
- 4) Calcolare la reazione vincolare in G , per qualunque moto ammissibile del sistema.

• **SOLUZIONE**

1) Chiamiamo $\{O, e_k\}$ il riferimento solidale con il piano π , avente e_3 , verticale, rivolto verso l'alto e e_1 , orizzontale, nel piano π . Inoltre, prendiamo $\{G, \epsilon_k\}$ il riferimento solidale con il baricentro G , avente, $\epsilon_3 \parallel \overrightarrow{OG}$ e ϵ_1 , nel piano π . Prendiamo le coordinate lagrangiane $(q^k) = (\alpha = \widehat{e_3 \epsilon_3}, \beta)$, dove β è l'angolo di rotazione del disco intorno all'asse \overrightarrow{OG} . Sia $\{G, \bar{\epsilon}_k\}$ il riferimento solidale con il disco, avente $\bar{\epsilon}_3 = \epsilon_3$. Gli angoli di Euler del disco rispetto il riferimento e_k sono riportati in Tab. 1.

TAB. 1. Angoli di Euler del disco D , rispetto all'osservatore inerziale.

Angoli di Euler	q^k
ϕ	$\frac{\pi}{2}$
ψ	β
θ	α

L'asse dei nodi ha versore $N = \epsilon_2$.

La velocità angolare del disco è riportata in (1)

$$(1) \quad \omega = \dot{\alpha} \cos \beta \bar{\epsilon}_1 - \dot{\alpha} \sin \beta \bar{\epsilon}_2 + \dot{\beta} \bar{\epsilon}_3 = \bar{\omega}^k \bar{\epsilon}_k.$$

Notiamo che gli angoli di Euler del riferimento baricentrale rispetto a quello inerziale, sono invece riportati in Tab. 2.

TAB. 2. Angoli di Euler del riferimento baricentrale $\{G, \epsilon_k\}$ del disco D , rispetto all'osservatore inerziale.

Angoli di Euler	q^k
ϕ	$\frac{\pi}{2}$
ψ	$-\frac{\pi}{2}$
θ	α

L'asse dei nodi ha versore $N = \epsilon_2 = e_2$.

La velocità angolare del disco può essere anche calcolata considerando il suo moto relativo al riferimento baricentrale. Otteniamo allora l'espressione riportata in (2).

$$(2) \quad \omega = \dot{\alpha} \epsilon_2 + \dot{\beta} \epsilon_3 = \omega^k \epsilon_k.$$

Poichè il disco è un giroscopio, rotondo nel piano ortogonale a r , i momenti d'inerzia centrali, rispetto ad un qualunque asse giacente nel piano del disco D , sono tutti uguali. Questa proprietà ha l'effetto di poter calcolare l'energia cinetica $\mathcal{T}^{(G)}$ del moto intorno al baricentro G , sia utilizzando la formula $\mathcal{T}^{(G)} = \frac{1}{2} I_{ij}^{(G)} \omega^i \omega^j$ che la

formula $\mathcal{T}^{(G)} = \frac{1}{2} I_{ij}^{(G)} \bar{\omega}^i \bar{\omega}^j$, con la stessa matrice $(I_{ij}^{(G)}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$. Infatti

il tensore dei momenti d'inerzia centrale $I^{(G)} \in S_2^0(\mathbf{S})$, ha le stesse componenti nella due basi (ϵ_k) e $(\bar{\epsilon}_k)$ di \mathbf{S} . Più precisamente abbiamo

$$\begin{cases} I^{(G)} &= A \theta^1 \odot \theta^1 + A \theta^2 \odot \theta^2 + C \theta^3 \odot \theta^3 \\ &= A \bar{\theta}^1 \odot \bar{\theta}^1 + A \bar{\theta}^2 \odot \bar{\theta}^2 + C \bar{\theta}^3 \odot \bar{\theta}^3 \end{cases}$$

dove (θ^k) , (risp. $(\bar{\theta}^k)$), è la base duale di (ϵ_k) , (risp. $(\bar{\epsilon}_k)$). Per il calcolo dell'energia cinetica del disco, $\mathcal{T} = \frac{1}{2}\mu v_G^2 + \mathcal{T}^{(G)}$, serve v_G^2 . Questo scalare si può facilmente calcolare utilizzando coordinate cilindriche (ρ, α, y) per G e la corrispondente metrica

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Abbiamo: } v_G^2 = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = (\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\alpha}^2).$$

La Lagrangiana è riportata in (3).

$$(3) \quad \begin{cases} L &= \mathcal{T} - f \\ f &= f_{peso} + f_{elastico} + f_{Lorentz} \\ L &= \frac{\mu}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\alpha}^2) + \frac{A}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{C}{2}\dot{\beta}^2 - (\mu g - q|E|)\rho \cos \alpha - \frac{\kappa\rho^2}{2}. \end{cases}$$

La corrispondente equazione di Lagrange è riportata in (4)

$$(4) \quad \begin{cases} (\rho\text{-componente}) & \mu\ddot{\rho} - \mu\rho\dot{\alpha}^2 + (\mu g - q|E|)\cos \alpha + \kappa\rho = 0 \\ (\alpha\text{-componente}) & (\mu\rho^2 + A)\ddot{\alpha} + 2\mu\rho\dot{\alpha}\dot{\rho} - (\mu g - q|E|)\rho \sin \alpha = 0 \\ (\beta\text{-componente}) & C\ddot{\beta} = 0. \end{cases}$$

2) Il sistema meccanico ammette gli integrali primi riportati in (5).

$$(5) \quad \begin{cases} p_\beta &\equiv (\partial\dot{\beta}.L) = C\dot{\beta} = c_1 \\ H &= \frac{\mu}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\alpha}^2) + \frac{A}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{C}{2}\dot{\beta}^2 + (\mu g - q|E|)\rho \cos \alpha + \frac{\kappa\rho^2}{2} = c_2. \end{cases}$$

Il sistema (5) non è completo.¹

3) Le configurazioni di stato stazionario si ottengono imponendo che anche le coordinate ρ e α siano ignorabili, cioè imponendo che $(\partial\rho.L) = 0$, e $(\partial\alpha.L) = 0$, con $(\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0, \dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = \beta_0, \ddot{\beta} = 0)$. Otteniamo il sistema (6).

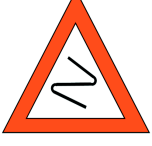
$$(6) \quad \begin{cases} -(\mu g - q|E|)\cos \alpha - \kappa\rho = 0 \\ (\mu g - q|E|)\rho \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Quindi sono configurazioni di stato stazionario $(\rho = 0, \alpha = \pm\frac{\pi}{2})$ e $(\rho = \mp(\frac{\mu g - q|E|}{\kappa}), \alpha = 0, \pi)$. Poichè deve essere $\rho \geq 0$, ne viene che la condizione che esista la configurazione di stato stazionario con $\alpha = 0$ (risp. $\alpha = \pi$), è che sia $q|E| - \mu g \geq 0$, (risp. $q|E| - \mu g \leq 0$). Quindi la condizione che esista la configurazione di stato stazionario richiesta è che sia $q|E| \geq \mu g$. La stabilità di questa configurazione si studia linearizzando l'equazione (4) intorno a questa configurazione. Otteniamo il sistema (7).

$$(7) \quad \left. \begin{cases} (\rho\text{-componente}) & \mu\ddot{\nu}^1 + \kappa\nu^1 = 0 \\ (\alpha\text{-componente}) & \ddot{\nu}^2 + a\nu^2 = 0 \\ (\beta\text{-componente}) & C\ddot{\nu}^3 = 0 \end{cases} \right\} a = \frac{(q|E| - \mu g)^2 \kappa}{\mu(q|E| - \mu g)^2 + A\kappa^2} > 0.$$

Quindi le coordinate ρ e α risultano stabili, mentre la β è instabile. Dalla (7) ricaviamo che la perturbazioni ν^1 di ρ , oscilla intorno alla configurazione di stato stazionario con periodo $T(\rho) = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\kappa}}$. Si può anche calcolare il valore asintotico di

¹Questi integrali primi si ottengono subito per il fatto che β è ignorabile e in H non compare esplicitamente il tempo. Comunque ulteriori integrali primi sono anche presenti. Per questo bisogna studiare più attentamente il comportamento del disco rispetto alle reazioni vincolari. (V. Osservazione alla fine del punto 4.)



ρ , per queste configurazioni di stato stazionario, per $\kappa \rightarrow \infty$. Abbiamo $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \rho = 0$ e $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} T(\rho) = 0$.

Notiamo pure che non esiste la configurazione di stato stazionario con $\alpha = 0$, per il limite asintotico $\kappa \rightarrow 0$.² Quindi la componente elastica è necessaria per la presenza della configurazione di stato stazionario con $\alpha = 0$.

Per vedere se queste configurazioni di stato stazionario, diciamo ($S1$), possono essere raggiunte partendo da una posizione diametralmente opposta, cioè se ($\rho = \frac{q|E| - \mu g}{\kappa} > 0, \alpha = \pi$), diciamo ($S2$), si tratta di vedere se le costanti del moto (5) calcolate nella configurazioni di stato stazionario ($S1$), possono avere gli stessi valori in qualche condizione iniziale ($S2$). I relativi calcoli sono riportati di seguito.

$$(8) \quad \begin{cases} p_\beta(S1) = C\dot{\beta}(S1) = c_1 \\ H(S1) = \frac{c_1^2}{2C} - \frac{(q|E| - \mu g)^2}{2\kappa} = c_2 \\ p_\beta(S2) = C\dot{\beta}(S2) = c_1 \\ H(S2) = \frac{\dot{\alpha}^2(S2)}{2} [\mu(\frac{q|E| - \mu g}{\kappa})^2 + A] + \frac{\mu}{2}\dot{\rho}^2(S2) + \frac{c_1^2}{2C} + \frac{3}{2} \frac{(q|E| - \mu g)^2}{\kappa} = c_2. \end{cases}$$

Pertanto la soluzione globale che passa dalla condizione ($S2$) alla condizione ($S1$) esiste se e solo se è soddisfatta la condizione (9).

$$(9) \quad \frac{\dot{\alpha}^2(S2)}{2} [\mu(\frac{q|E| - \mu g}{\kappa})^2 + A] + \frac{\mu}{2}\dot{\rho}^2(S2) = -2 \frac{(q|E| - \mu g)^2}{\kappa} < 0.$$



Questa condizione non può essere soddisfatta, visto che il primo termine, a sinistra dell'uguale è necessariamente positivo! In altre parole, non ci sono soluzioni globali che partono da condizioni iniziali con $\alpha = \pi$ e $\rho = \frac{q|E| - \mu g}{\kappa}$, e che fanno arrivare il disco nella posizione $\alpha = 0$ in configurazioni di stato stazionario. Notiamo che il valore asintotico della (9) per $\kappa \rightarrow \infty$ risulta dato dall'equazione (10).

$$(10) \quad \frac{\dot{\alpha}^2(S2)}{2} A + \frac{\mu}{2}\dot{\rho}^2(S2) = 0.$$

Quindi gli unici valori possibili per $\dot{\rho}(S2)$ e $\dot{\alpha}(S2)$ sono $\dot{\rho}(S2) = 0 = \dot{\alpha}(S2)$. Questo significa che D deve essere già nella configurazione di stato stazionario. D'altro canto, poichè il corrispondente valore asintotico di ρ risulta nullo, ne viene che nel caso asintotico $\kappa \rightarrow \infty$, nella configurazione ($S2$) il disco D può essere soltanto orientato verso il basso. In altri termini, in questo caso la configurazione ($S2$) è indistinguibile da quella in ($S1$), rispetto al sistema di forze!

4) Dalla prima equazione cardinale per il disco, $\mu a_G = F_{peso} + F_{Lorentz} + F_{elastica} + R_G$ possiamo ricavare la reazione vincolare R_G in G . Per scrivere l'accelerazione di G conviene utilizzare l'espressione, tramite i coefficienti di connessione in coordinate cilindriche (ρ, α, y), con la condizione $y = 0$. Ricaviamo

$$a_G = (-\rho\dot{\alpha}^2 + \ddot{\rho})\partial\rho + (\frac{2}{\rho}\dot{\rho}\dot{\alpha} + \ddot{\alpha})\partial\alpha.$$

In componenti fisiche abbiamo:

$$a_G = (-\rho\dot{\alpha}^2 + \ddot{\rho})\epsilon_3 + (2\dot{\rho}\dot{\alpha} + \rho\ddot{\alpha})\epsilon_1.$$

²Questo corrispondente al limite $\lim_{\kappa \rightarrow 0} \rho = \infty$.

Tenendo presente che possiamo scrivere per le parti libere $F_{peso} = -\mu g e_3 = \mu g(\sin \alpha e_1 - \cos \alpha e_3)$, $F_{Lorentz} = q|E|e_3 = q|E|(-\sin \alpha e_1 + \cos \alpha e_3)$, $F_{elastica} = -\kappa \rho e_3$, ne viene il set di equazioni riportato in (11).

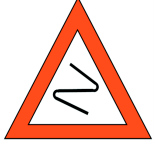
$$(11) \quad \begin{cases} \mu(2\dot{\rho}\dot{\alpha} + \rho\ddot{\alpha}) = \mu g \sin \alpha - q|E| \sin \alpha + R_G^1 \\ 0 = R_G^2 \\ \mu(-\rho\dot{\alpha}^2 + \ddot{\rho}) = -\mu g \cos \alpha + q|E| \cos \alpha - \kappa \rho + R_G^3 \end{cases}$$

dove $R_G = R_G^k \epsilon_k$. Utilizzando le equazioni di Lagrange possiamo ricavare dalla ρ -componente che deve essere $R_G^3 = 0$. Inoltre dalla α -componente ricaviamo $R_G^1 = -\frac{A}{\rho}\ddot{\alpha}$. Riassumendo abbiamo la reazione vincolare riportata in (12).³

$$(12) \quad R_G = -\frac{A}{\rho}\ddot{\alpha} \epsilon_1.$$

In particolare, in configurazioni di stato stazionario risulta $R_G = 0$. Quindi, nel caso particolare delle configurazioni di stato stazionario, considerato al punto **3**), la reazione vincolare in G è nulla.⁴

Osservazione: Sistema completo di integrali primi. Una volta svolto il punto **4**) ed aver caratterizzato la reazione vincolare che agisce sul disco, D , appare chiaro che il moto del disco intorno al suo baricentro G è un moto alla Poincaré. Infatti tutte le forze attive e reattive sono applicate in G , quindi hanno momento nullo rispetto al baricentro. Questa osservazione, permette di identificare due altre leggi di conservazione, una vettoriale $\Omega(G) = \overrightarrow{cost}$ ed un'altra scalare $\mathcal{T}^{(G)} = \frac{1}{2}(A\dot{\alpha}^2 + B\dot{\beta}^2) = c_3$. Quindi nel sistema meccanico in esame abbiamo sicuramente un sistema completo di integrali primi $\{p_\beta = c_1, H = c_2, \mathcal{T}^{(G)} = c_3\}$ che ci permettono con facilità di ridurre il problema dell'integrazione dell'equazione di Lagrange alle quadrature. In particolare, ricaviamo che anche $\dot{\alpha} = c_4$.⁵ Quindi in ogni moto ammissibile risulta la reazione vincolare in G nulla. Inoltre l'equazione (7) si semplifica nella (13).



³Questo è in accordo con il fatto che il vincolo è liscio, quindi la reazione vincolare deve essere normale al vincolo. Infatti, il vincolo è la retta r ruotante nel piano verticale π , intorno al punto fisso $O \in \pi$, quindi la reazione vincolare non può che essere nel piano dello stesso disco D , che risulta ortogonale a r . In realtà la forza elastica è realizzata con un *vincolo elastico* puntato in $O \in \pi$ e nell'elemento materiale $E \in D$, coincidente con il baricentro G di D . Questo vincolo compare nell'equazione di Lagrange tramite la forza attiva centrale, rappresentata dalla forza elastica. Comunque sul punto $O \in \pi$ è presente una reazione vincolare $R_O = -F_{elastica} = \kappa \rho e_3$. Questa reazione è espressa in termini di dinamica, utilizzando la ρ -componente dell'equazione di Lagrange. Otteniamo

$$R_O = \kappa \rho e_3 = [\mu(\rho\dot{\alpha}^2 - \ddot{\rho}) + (q|E| - \mu g) \cos \alpha] e_3.$$

⁴Questo fatto è particolarmente rilevante nelle applicazioni ingegneristiche, visto che in un tale sistema il lavoro svolto dalla reazione vincolare risulta nullo, in configurazioni di stato stazionario, cioè non produce deterioramento dei materiali implicati! (Naturalmente, anche in configurazioni di stato stazionario la reazione in O , non è nulla in generale. In particolare, nella configurazione (S1) risulta $R_O = (q|E| - \mu g) e_3$.)

⁵Questa integrazione ci conduce alla seguente espressione del moto:

$$\{\rho(t) = b \cos \alpha(t) + \rho_0, \alpha(t) = \dot{\alpha}_0 t + \alpha_0, \beta(t) = \dot{\beta}_0 t + \beta_0\}$$

con $b, \dot{\alpha}_0, \alpha_0, \dot{\beta}_0, \beta_0$ opportune costanti. (Notare che al fine di soddisfare la condizione $\hat{\Omega}(G) = 0$, si ricava una restrizione su $\dot{\alpha}_0$ e $\dot{\beta}_0$.)

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\rho\text{-componente}) \quad \mu\ddot{\nu}^1 + \kappa\nu^1 = 0 \\ (\alpha\text{-componente}) \quad \bar{a}\nu^2 = 0 \\ (\beta\text{-componente}) \quad C\ddot{\nu}^3 = 0 \end{array} \right\}_{\bar{a} = \frac{(q|E| - \mu g)^2}{\kappa} > 0} .$$

Quindi ne viene che la perturbazione della α è addirittura nulla.
