



I-II-III ESERCITAZIONE DI MECCANICA RAZIONALE

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

PROF. A. PRÁSTARO

24/10/2012 - 14/11/2012 - 05/12/2012

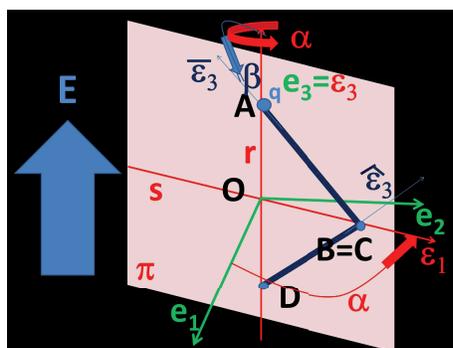


FIG. 1. Sistema di due aste rigide uguali, (lunghezza l), collegate ad un estremo, vincolato a muoversi su di una retta s orizzontale di un piano verticale π . Gli altri estremi sono vincolati a muoversi su di una retta $r \subset \pi$, tale che $r \perp s$. Il piano π , ruota intorno all'asse verticale r . L'elemento A è portatore di una carica elettrica positiva $q > 0$. Tutto il sistema è immerso in un campo elettrico costante E diretto verso l'alto e parallelo ad r .

• SISTEMA MECCANICO.

Il sistema meccanico è composto da due aste rigide uguali \overline{AB} e \overline{CD} , (segmenti di lunghezza l), tali che l'estremo A è vincolato a muoversi su di una retta r , appartenente ad un piano π , verticale, e l'altro estremo B è vincolato a muoversi su di una retta $s \perp r$, appartenente allo stesso piano π . Inoltre l'estremo B coincide con C e l'estremo D si muove su r . Si assume che l'asta \overline{AB} si può muovere solo sul primo quadrante del piano π , individuato dalle rette r ed s , mentre l'asta \overline{CD} , può muoversi soltanto nel quarto quadrante. Infine il piano π , ruota intorno all'asse r , rispetto ad un osservatore inerziale. Inoltre l'elemento A è portatore di una carica elettrica $q > 0$. Tutto il sistema è immerso in un campo elettrico costante E , diretto verso l'alto e parallelo a r . (Vedere Fig. 1.)

• QUESITI

- 1) Determinare le velocità angolari di \overline{AB} e \overline{CD} , rispetto all'osservatore inerziale.
- 2) Determinare la base e la ruletta delle due aste nel loro moto piano in π .
- 3) Dimostrare che il moto relativo di \overline{CD} , rispetto a \overline{AB} è un moto piano in π , e identificare la base e la ruletta di questo moto piano relativo.
- 4) Determinare la velocità e l'accelerazione del baricentro G di \overline{AB} , rispetto all'osservatore inerziale.
- 5) Scrivere la Lagrangiana del sistema meccanico e la corrispondente equazione di Lagrange.
- 6) Trovare eventuali integrali primi e dire se questi costituiscono un sistema completo.

- 7) Trovare eventuali configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
 8) Trovare eventuali configurazioni di stato stazionario e studiarne la stabilità.
 9) Determinare l'equazione dinamica del moto relativo di \overline{CD} rispetto a \overline{AB} .
 10) Determinare le reazioni vincolari alle quali è soggetta l'asta \overline{AB} .
 11) Dimostrare che in ogni configurazione di stato stazionario le reazioni vincolari dell'asta \overline{AB} sono costanti e sono nulle quelle nella direzione perpendicolare al piano π . (Più precisamente la componente lungo la direzione $\perp \pi$ della reazione in A è opposta a quella in B .)
 12) Esistono soluzioni che, partendo dalla configurazione dove le due sbarrette sono disposte lungo l'asse orizzontale, arrivino a disporre le sbarrette lungo l'asse verticale in configurazione di equilibrio o in configurazioni di stato stazionario ?

• SOLUZIONI

1) Prendiamo un riferimento affine $\{O, (e_k)_{1 \leq k \leq 3}\}$, solidale con lo spazio proprio dell'osservatore inerziale, tale che e_3 sia lungo r , diretto verso l'alto e con $O \in r \cap s$. Sia inoltre $\{O, (\epsilon_k)_{1 \leq k \leq 3}\}$, un riferimento affine con $\epsilon_3 = e_3$ e ϵ_1 lungo la retta che il piano π individua sul piano equatoriale $P(e_1, e_2)$. Siano $\{B, (\bar{\epsilon}_k)_{1 \leq k \leq 3}\}$ e $\{C, (\hat{\epsilon}_k)_{1 \leq k \leq 3}\}$ due riferimenti affini solidali rispettivamente con \overline{AB} e \overline{CD} , tali che $\bar{\epsilon}_3$ sia lungo \overline{AB} e $\hat{\epsilon}_3$ sia lungo \overline{CD} . Inoltre $\bar{\epsilon}_2 = \hat{\epsilon}_2 = \epsilon_2 \perp \pi$. (V. Fig. 1.) I gradi di libertà del sistema sono $(q^k) = (\alpha = \widehat{e_1 \epsilon_1}, \beta = \widehat{e_3 \bar{\epsilon}_3})$. In Tab. 1 e Tab. 2 sono riportati gli angoli di Euler delle due aste rispetto all'osservatore inerziale.

TAB. 1. Angoli di Euler dell'asta \overline{AB} , rispetto osservatore inerziale.

Angoli di Euler	q^k
ϕ	$\alpha + \frac{\pi}{2}$
ψ	$-\frac{\pi}{2}$
θ	β

L'asse dei nodi ha versore $N = \epsilon_2 = \bar{\epsilon}_2 = \hat{\epsilon}_2$.

TAB. 2. Angoli di Euler dell'asta \overline{CD} , rispetto osservatore inerziale.

Angoli di Euler	q^k
$\bar{\phi}$	$\alpha + \frac{\pi}{2}$
$\bar{\psi}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\bar{\theta}$	$-\beta$

L'asse dei nodi ha versore $N = \epsilon_2 = \bar{\epsilon}_2 = \hat{\epsilon}_2$.

Quindi le velocità angolari delle aste sono direttamente calcolate in (1).¹

$$(1) \quad \begin{cases} \omega_{\overline{AB}} &= -\dot{\beta} \sin \alpha e_1 + \dot{\beta} \cos \alpha e_2 + \dot{\alpha} e_3 \\ &= -\dot{\alpha} \sin \beta \bar{\epsilon}_1 + \dot{\beta} \bar{\epsilon}_2 + \dot{\alpha} \cos \beta \bar{\epsilon}_3; \\ \omega_{\overline{CD}} &= \dot{\beta} \sin \alpha e_1 - \dot{\beta} \cos \alpha e_2 + \dot{\alpha} e_3 \\ &= \dot{\alpha} \sin \beta \hat{\epsilon}_1 - \dot{\beta} \hat{\epsilon}_2 + \dot{\alpha} \cos \beta \hat{\epsilon}_3. \end{cases}$$

¹Si tratta di applicare le formule di Teorema 4.40 del Libro. (Quando ci riferiamo al Libro, intendiamo quello consigliato in [1] nel Programma.)

2) La base e la ruletta di \overline{AB} , nel suo moto piano rispetto a π , si calcolano come indicato nel Libro, Esercizio 4.42(7). Analogamente si procede per ottenere la base e la ruletta dell'asta \overline{CD} . Il risultato è riportato in Fig. 2.

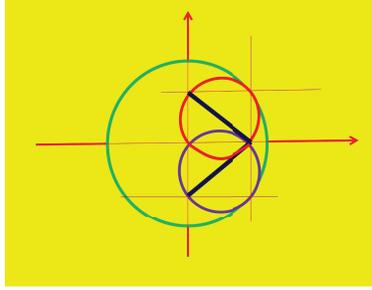


FIG. 2. Base e ruletta di due aste rigide collegate. Il cerchio verde è la base per entrambe. Il cerchio rosso è la ruletta dell'asta \overline{AB} ed il cerchio viola è la ruletta dell'asta \overline{CD} .

3) Per dimostrare che il moto relativo di \overline{CD} rispetto a \overline{AB} è piano, ed avviene nel piano π , basta fare vedere che la differenza delle rispettive velocità angolari risulta ortogonale al piano π . Infatti, abbiamo

$$(2) \quad \omega_{\overline{AB}} - \omega_{\overline{CD}} = -2\dot{\beta} \sin \alpha e_1 + 2\dot{\beta} \cos \alpha e_2.$$

Calcoliamo allora

$$(\omega_{\overline{AB}} - \omega_{\overline{CD}}) \cdot \epsilon_1 = (\omega_{\overline{AB}} - \omega_{\overline{CD}}) \cdot (\cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2) = -2\dot{\beta} \sin \alpha \cos \alpha + 2\dot{\beta} \cos \alpha \sin \alpha = 0.$$

Lo stesso risultato si ottiene calcolando gli angoli di Euler del moto relativo di \overline{CD} rispetto a \overline{AB} , come riportato in Tab. 3, e quindi calcolando la velocità angolare di questo moto relativo. Si ottiene allora $\omega_{\text{moto-relativo-}\overline{CD}\text{-rispetto-}\overline{AB}} = 2\dot{\beta} \bar{\epsilon}_2$.²

TAB. 3. Angoli di Euler dell'asta \overline{CD} , nel suo moto relativo a \overline{AB} .

Angoli di Euler	q^k
$\hat{\phi}$	$\frac{\pi}{2}$
$\hat{\psi}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\hat{\theta}$	2β

L'asse dei nodi ha versore $\hat{N} = \epsilon_2 = \bar{\epsilon}_2 = \hat{\epsilon}_2$.

Poichè il moto relativo di \overline{CD} rispetto a \overline{AB} è rotatorio nel piano π , con centro $B = C$, ne viene che la base e la ruletta degenerano nello stesso punto $B = C$.³

²Notiamo pure che dalla (2) si ottiene lo stesso risultato esprimendo la base e_k in termini di ϵ_k , solidale con il piano π . Infatti abbiamo $e_1 = \cos \alpha \epsilon_1 - \sin \alpha \epsilon_2$ e $e_2 = \sin \alpha \epsilon_1 + \cos \alpha \epsilon_2$. Quindi $\omega_{\overline{AB}} - \omega_{\overline{CD}} = 2\dot{\beta} \epsilon_2 = 2\dot{\beta} \bar{\epsilon}_2$. Pertanto nel moto relativo l'asta \overline{CD} ruota con velocità doppia di quella di \overline{AB} rispetto al piano π . Questo meccanismo interpreta quello comunemente denominato *cambio*, adottato nei sistemi di trazione per aumentare/ridurre la velocità.

³Si potrebbe anche dire che la base è il cerchio di centro B e raggio nullo, nello spazio proprio di \overline{AB} , e che la ruletta è un cerchio di centro C e raggio nullo, nello spazio proprio di \overline{CD} .

4) Dalla relazione fondamentale della cinematica del corpo rigido abbiamo

$$v_G = v_A + \omega \times \overrightarrow{AG} = \dot{z}_A e_3 + (\omega^k e_k) \times \overrightarrow{AG}.$$

Da $z_A = l \cos \beta$ ricaviamo $\dot{z} = -l\dot{\beta} \sin \beta$ e $\overrightarrow{AG} = -\frac{l}{2}\bar{e}_3$. Per poter fare direttamente il prodotto vettoriale esprimiamo il vettore \bar{e}_3 nella base e_k , utilizzando la matrice A_k^j espressa tramite gli angoli di Euler di Tab. 1. (V. il Libro a pag. 57.) Otteniamo $\bar{e}_1 = \cos \beta \cos \alpha e_1 + \cos \beta \sin \alpha e_2 - \sin \beta e_3$ e $\bar{e}_2 = -\sin \alpha e_1 + \cos \alpha e_2$.

Quindi si ricava l'espressione (3).

$$(3) \quad \begin{cases} v_G = e_1[\dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta - \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta] \frac{l}{2} \\ \quad + e_2[\dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta + \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta] \frac{l}{2} \\ \quad - e_3[\dot{\beta} \sin \beta] \frac{l}{2}. \end{cases}$$

L'espressione dell'accelerazione di G si ottiene facilmente, basta derivare rispetto al tempo le componenti di v_G espresse nella base fissa (e_k) dello spazio vettoriale \mathbf{S} , spazio dei vettori tipo-spazio, dei vettori liberi \mathbf{M} , dello spazio-tempo Galileiano M . Il risultato è riportato in (4).⁴

$$(4) \quad \begin{cases} a_G = e_1 \frac{d}{dt} [\dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta - \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta] \frac{l}{2} \\ \quad + e_2 \frac{d}{dt} [\dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta + \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta] \frac{l}{2} \\ \quad - e_3 \frac{d}{dt} [\dot{\beta} \sin \beta] \frac{l}{2}. \\ = e_1 [\ddot{\beta} \cos \alpha \cos \beta - \ddot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \cos \alpha \sin \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta] \frac{l}{2} \\ \quad + e_2 [\ddot{\beta} \sin \alpha \cos \beta + \ddot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \sin \alpha \sin \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta] \frac{l}{2} \\ \quad - e_3 [\ddot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta] \frac{l}{2}. \end{cases}$$

Un modo alternativo, e semplice, per trovare la velocità dei due baricentri G e \bar{G} delle due sbarrette rispettivamente \overline{AB} e \overline{CD} , è di utilizzare il loro moto relativo al piano π . Allora si ricava $v_G = \frac{l}{2}\dot{\beta} \cos \beta e_1 + \frac{l}{2}\dot{\alpha} \sin \beta e_2 - \frac{l}{2}\dot{\beta} \sin \beta e_3$ e $v_{\bar{G}} = \frac{l}{2}\dot{\beta} \cos \beta e_1 + \frac{l}{2}\dot{\alpha} \sin \beta e_2 + \frac{l}{2}\dot{\beta} \sin \beta e_3$. Si ottiene facilmente che $v_G^2 = v_{\bar{G}}^2 = (\frac{l}{2})^2(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta)$.

⁴Notare che in questo caso non compaiono i coefficienti di connessione, poichè la scelta della base fissa (e_k) equivale ad aver scelto nello spazio proprio dell'osservatore inerziale, un sistema di coordinate cartesiane ortogonale, ($x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$), puntato in 0. Questo sistema di coordinate, si può ritenere indotto dal riferimento affine $\{O, (e_k)_{1 \leq l \leq 3}\}$. Il vettore accelerazione a_G , applicato in un punto della curva del moto descritta da G , appartiene a $T_G S_\phi \cong \{G\} \times \mathbf{S}$, lo spazio vettoriale tangente in G allo spazio proprio S_ϕ dell'osservatore inerziale. Come tale possiamo scrivere $a_G = a_G^k \partial x_k$, dove $(\partial x_k)_{1 \leq l \leq 3}$ è la base naturale (base locale) indotta dal sistema di coordinate (x^k) . Notare che il riferimento $\{G, (\partial x_k)_{1 \leq l \leq 3}\}$ individua una base fissa $(\partial x_k)_{1 \leq l \leq 3}$ di \mathbf{S} , che coincide con la base fissa $(e_k)_{1 \leq l \leq 3}$. In conclusione se in questo sistema di coordinate scriviamo $v_G = \dot{x}^k \partial x_k$, allora $a_G = [\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j] \partial x_k = [\ddot{x}^k] \partial x_k$, poichè in coordinate cartesiane ortogonali risulta sempre $\Gamma_{ij}^k = 0$. (V. Esempio 3.9(1) del Libro.) Quindi la parte libera di a_G , (cioè quella appartenente a \mathbf{S} , dopo aver trascurato il punto di applicazione G), si può anche scrivere nella forma $a_G = \ddot{x}^k e_k$. Questo chiarisce che la formula (4) rappresenta la parte libera dell'accelerazione e non il vettore applicato. Se si vuole scrivere l'accelerazione come vettore applicato allora in coordinate cartesiane ortogonali si deve scrivere $a_G = \ddot{x}^k \partial x_k = \ddot{x} \partial x + \ddot{y} \partial y + \ddot{z} \partial z$, con $\ddot{x} = \frac{d}{dt} [\dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta - \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta] \frac{l}{2}$, $\ddot{y} = \frac{d}{dt} [\dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta + \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta] \frac{l}{2}$, $\ddot{z} = -\frac{d}{dt} [\dot{\beta} \sin \beta] \frac{l}{2}$.

5) La Lagrangiana del sistema è riportata in (5).⁵

$$(5) \quad L = a(\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2) + b \cos \beta, \quad \left\{ \begin{array}{l} a \equiv \mu(\frac{l}{2})^2 + A \\ b \equiv q|E|l \end{array} \right\}.$$

La corrispondente equazione di Lagrange è riportata in (6).

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha\text{-componente}) \\ 2a\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 4a\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta = 0 \\ (\beta\text{-componente}) \\ \dot{\beta} 2a - 2a\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + b \sin \beta = 0 \end{array} \right.$$

6) Un sistema completo di integrali primi sono riportati in (7). Questi permettono la riduzione alle quadrature dell'equazione (6). (Tralasciamo i particolari.)

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{Hamiltoniana}) H = a(\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2) - b \cos \beta = c_1 \\ (\alpha\text{-componente impulso generalizzato}) p_\alpha = (\partial \dot{\alpha}.L) = 2a\dot{\alpha} \sin^2 \beta = c_2 \end{array} \right.$$

7) Le configurazioni di equilibrio si trovano imponendo all'equazione di Lagrange i vincoli di staticità, quindi risolvendo la sotto-equazione riportata in (8).

$$(8) \quad \{ b \sin \beta = 0 \}.$$

Ricaviamo che l'unica configurazione statica, compatibile con i vincoli imposti, è $\beta = 0$. La linearizzazione dell'equazione di Lagrange (6) in questa configurazione di equilibrio è riportata in (9).

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha\text{-componente}) 0 = 0 \\ (\beta\text{-componente}) \ddot{\nu}^2 + \frac{b}{2a} \nu^2 = 0 \end{array} \right.$$

poichè $\frac{b}{2a} > 0$, ne viene che la configurazione statica è stabile per la variabile β .

8) Le configurazioni di stato stazionario ($\dot{\alpha} = \text{cost}, \dot{\beta} = 0$), si trovano imponendo la condizione $(\partial \beta.L) = 2a\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - b \sin \beta = 0$. pertanto si trova $\beta = 0$ e $\beta = \arccos(\frac{b}{2a\dot{\alpha}^2})$, sotto la condizione $0 \leq \frac{b}{2a\dot{\alpha}^2} \leq 1$. Si ricava pertanto anche la configurazione asintotica $\beta = \frac{\pi}{2}$. La linearizzazione dell'equazione di Lagrange, in queste configurazioni, permette di asserire che per $\beta = 0$, la coordinata β è stabile se $-2a\dot{\alpha}^2 + b > 0$, mentre quella asintotica è sempre stabile. (Non risulta invece stabile la coordinata α .) Comunque nel caso generale si tratta di integrare l'equazione riportata in (10).

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha\text{-componente}) \\ \ddot{\nu}^1 [2a \sin^2 \beta]_0 + \dot{\nu}^2 [4a\dot{\alpha} \sin \beta \cos \beta]_0 = 0 \\ (\beta\text{-componente}) \\ \ddot{\nu}^2 [2a]_0 + \dot{\nu}^1 [-2a\dot{\alpha} \sin \beta \cos \beta]_0 + \nu^2 [-2a\dot{\alpha}^2 (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) + b \cos \beta]_0 = 0 \end{array} \right.$$

Per l'integrazione della (10) nel caso $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, conviene riscrivere questa equazione in forma matriciale: $\dot{\nu}^k A_k^j + \dot{\nu}^k B_k^j + \nu^k C_k^j = 0$, quindi ridurre il problema alla risoluzione dell'equazione lineare $\xi^k H_k^j[\omega] = 0$, con $(H_k^j[\omega]) = (A_k^j \omega^2 + B_k^j \omega + C_k^j)$.

⁵Notare che nella Lagrangiana è assente il contributo delle forze peso agente sulle due asticelle. Infatti il potenziale gravitazionale del sistema meccanico rimane costante durante ogni possibile moto. Il luogo di punti dove si muovono i baricentri (nel piano π) è un cerchio, Γ , di centro O e raggio $\frac{l}{2}$ nel piano π . Ad ogni istante i baricentri delle due asticelle si trovano in due punti su Γ , simmetrici rispetto all'asse e_1 .

9) L'equazione dinamica del moto di \overline{CD} relativamente a \overline{AB} , coincide con la β -componente dell'equazione di Lagrange (6), dove al posto di $\dot{\alpha}$ si sostituisce la corrispondente funzione di β , ottenuta dalla legge di conservazione $p_\alpha = c_2$.⁶ Questa equazione dinamica ammette l'integrale primo

$$a\left(\frac{c_2^2}{4a^2 \sin^2 \beta} + \dot{\beta}^2\right) - b \cos \beta = c_1.$$

10) Si tratta di utilizzare la prima equazione cardinale per la sbarretta \overline{AB} , cioè $\mu a_G = F_{peso-AB} + F_{Lorentz} + R_A + R_B$, dove le reazioni vincolari in A ed in B , sono rispettivamente ortogonali ad ϵ_3 e ϵ_1 . Quindi conviene esprimere l'equazione cardinale nella base $\{\epsilon_k\}$ solidale con il piano π . Quindi scriviamo a_g in questa base. Per questo conviene utilizzare l'espressione di $v_G = v_G^k \epsilon_k$ e quindi ottenere $a_G = \frac{d}{dt}(v_G^k \epsilon_k) = \frac{d}{dt}(v_G^k) \epsilon_k + v_G^k \frac{d}{dt}(\epsilon_k)$, dove $\frac{d}{dt}(\epsilon_k) = \omega_{piano \pi} \times \epsilon_k$. L'espressione di a_G è riportata in (11).⁷

$$(11) \quad \begin{cases} a_G &= [\ddot{\beta} \cos \beta - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \sin \beta] \frac{l}{2} \epsilon_1 \\ &+ [\ddot{\alpha} \sin \beta + 2\dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta] \frac{l}{2} \epsilon_2 \\ &- [\ddot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta] \frac{l}{2} \epsilon_3 \end{cases}$$

In (12) sono riportate le reazioni vincolari in A e in B dell'asta \overline{AB} , durante un qualunque moto ammissibile.

$$(12) \quad \begin{cases} R_A^1 &= \frac{l\mu}{2} [\ddot{\beta} \cos \beta - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \sin \beta] \\ R_A^2 + R_B^2 &= \frac{l\mu}{2} [\ddot{\alpha} \sin \beta + 2\dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta] \\ R_B^3 &= \mu g - q|E| - \frac{l\mu}{2} [\ddot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta]. \end{cases}$$

In condizioni di stato stazionario risulta $\dot{\beta} = \ddot{\beta} = 0$ e $\dot{\alpha} = \text{cost}$, $\ddot{\alpha} = 0$, quindi le (12) si riducono alle (13).

$$(13) \quad \begin{cases} R_A^1 &= -\frac{l\mu}{2} \dot{\alpha}^2 \sin \beta \\ R_A^2 + R_B^2 &= 0 \\ R_B^3 &= \mu g - q|E|. \end{cases}$$

Come si vede in condizioni di stato stazionario le reazioni sono costanti e $R_A^2 = -R_B^2$.⁸

11) Perchè il sistema raggiunga la configurazione di equilibrio partendo da $\beta = \frac{\pi}{2}$, è sufficiente che siano preservate le leggi di conservazione $H = c_1$ e $p_\alpha = c_2$, dove le costanti c_1 e c_2 sono calcolate nella configurazione di equilibrio a $\beta = 0$.

$$(14) \quad \begin{cases} H(\dot{\alpha} = 0 = \dot{\beta}, \beta = 0) = -b = c_1 = H(\beta = \frac{\pi}{2}) = a(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \\ p_\alpha(\dot{\alpha} = 0 = \dot{\beta}, \beta = 0) = 0 = c_2 = p_\alpha(\beta = \frac{\pi}{2}) = 2a\dot{\alpha} \end{cases}$$

⁶Vale la pena notare che la posizione relativa di \overline{CD} rispetto a \overline{AB} è individuata dalla coordinata $\gamma \equiv \widehat{\epsilon_3 \hat{\epsilon}_3} = 2\beta$. Quindi la β -componente dell'equazione di Lagrange è sufficiente per determinare la dinamica di questo moto relativo. Naturalmente possiamo riscrivere questa equazione in forma esplicita, facendo comparire soltanto la coordinata γ , ottenendo la seguente equazione: $\ddot{\gamma} + \frac{b}{2a^2} \sin(\frac{\gamma}{2}) - \frac{c_2^2}{2a^2} \frac{\cos(\frac{\gamma}{2})}{\sin^3(\frac{\gamma}{2})} = 0$.

⁷Si può facilmente verificare che questa formula per a_G , coincide con quella che viene dalla (4), dopo aver usato le relazioni $\epsilon_1 = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2$, $\epsilon_2 = -\sin \alpha e_1 + \cos \alpha e_2$ e $\epsilon_3 = e_3$.

⁸Attenzione a non confondere il motivo della costanza della R_A^1 nella (13) con la legge di conservazione $p_\alpha = c_2$!

Dovendo essere $c_2 = 0$, ne viene che la condizione iniziale a $\beta = \frac{\pi}{2}$ deve necessariamente avere $\dot{\alpha} = 0$. Quindi per il corrispondente valore di $\dot{\beta}$, dovremmo avere $a\dot{\beta}^2 = -b < 0$. Naturalmente questa condizione non può essere rispettata, essendo $a > 0$ e $\dot{\beta}^2 \geq 0$. Analogo risultato si ottiene se per $\beta = 0$ il sistema deve essere in configurazione di stato stazionario. Infatti abbiamo:

$$(15) \quad \begin{cases} H(\dot{\alpha} = cost, \dot{\beta} = 0, \beta = 0) = -b = c_1 = H(\beta = \frac{\pi}{2}) = a(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \\ p_\alpha(\dot{\alpha} = cost, \dot{\beta} = 0, \beta = 0) = 0 = c_2 = p_\alpha(\beta = \frac{\pi}{2}) = 2a\dot{\alpha} \end{cases}$$

In conclusione, non esiste una soluzione globale che colleghi i punti $q_0 = (t = 0, \alpha, \beta = \frac{\pi}{2}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta})$ con $q_1 = (t, \alpha, \beta = 0, \dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = 0, \ddot{\alpha} = 0, \ddot{\beta} = 0)$ o con $q_2 = (t, \alpha(t), \beta = 0, \dot{\alpha} = cost, \dot{\beta} = 0, \ddot{\alpha} = 0, \ddot{\beta} = 0)$, sull'equazione di Lagrange, per opportuni valori di t .
