



V ESERCITAZIONE DI MECCANICA RAZIONALE

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

PROF. A. PRÁSTARO

21/12/2012

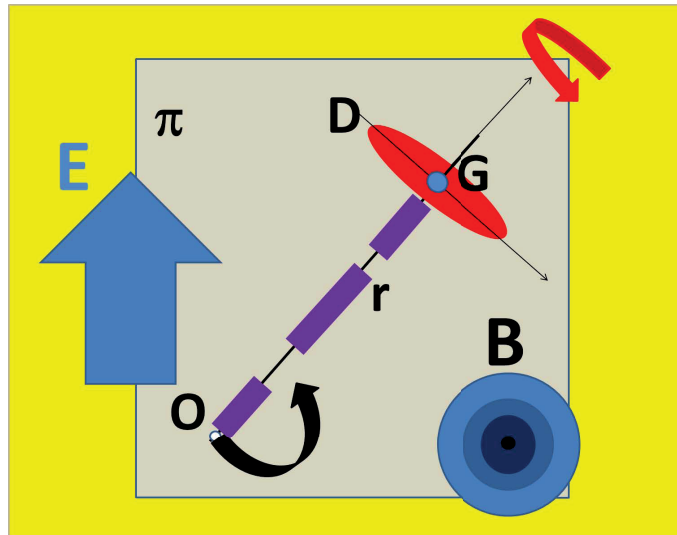


FIG. 1. Disco  $D$ , ruotante, con richiamo elastico radiale in un piano verticale  $\pi$ , e portatore di carica elettrica baricentrale, immerso in campo elettrico costante  $E$  ed in un campo magnetico costante  $B$ , ( $B \perp E$ ,  $B \perp \pi$ ).

• **SISTEMA MECCANICO.** “*The Conservation Laws Festival*”

Il sistema meccanico è costituito da un disco  $D$ , omogeneo di raggio  $R$ , piano del disco ortogonale ad una retta  $r$ , passante per il baricentro  $G$  di  $D$ . La retta  $r$  ruota in un piano verticale,  $\pi$ , intorno ad un punto  $O \in \pi$ . Il baricentro  $G$  è portatore di una carica elettrica  $q > 0$ . Inoltre lungo  $r$  è infilata una molla ideale di costante elastica  $\kappa > 0$ , puntata in  $O$  ed applicata a  $G \in D$ . Tutto il sistema è immerso in un campo elettrico costante  $E$ , verticale e diretto verso l’alto ed in un campo magnetico costante  $B$ , (orizzontale,  $B \perp E$ ,  $B \perp \pi$ ). I vincoli si considerano lisci e bilateri.

(Vedere Fig. 1.)

• **QUESITI**

- 1) Scrivere la lagrangiana del moto del sistema rispetto ad un osservatore inerziale solidale con  $\pi$ , e calcolare la corrispondente equazione di Lagrange.
- 2) Dimostrare che esiste un sistema completo di integrali primi ed utilizzarli per integrare l’equazione di Lagrange.
- 3) Dimostrare che la distanza del baricentro  $G$  da  $O$  varia di moto periodico e calcolarne il periodo.
- 4) Esiste una configurazione statica con  $(\rho = 0, \alpha = 0)$  che risulta stabile per la  $\rho$ ?

• **SOLUZIONE**

1) Assumiamo gli stessi riferimenti e coordinate lagrangiane  $(q^k) = (\rho, \alpha, \beta)$  della IV Esercitazione del 12-12-2012. Quindi possiamo scrivere la velocità angolare di  $D$  nelle forma riportata in (1).

$$(1) \quad \omega = \dot{\alpha} \epsilon_2 + \dot{\beta} \epsilon_3 = \omega^k \epsilon_k.$$

La Lagrangiana è riportata in (2).

$$(2) \quad \begin{cases} L &= \mathcal{T} - f \\ f &= f_{peso} + f_{elastico} + f_{Lorentz-elettrico} + f_{Lorentz-magnetico} \\ L &= \frac{\mu}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2) + \frac{A}{2} \dot{\alpha}^2 + \frac{C}{2} \dot{\beta}^2 - (\mu g - q|E|)\rho \cos \alpha - \frac{\kappa \rho^2}{2} + \frac{q|B|}{2c} \rho^2 \dot{\alpha}. \end{cases}$$

La corrispondente equazione di Lagrange è riportata in (3)

$$(3) \quad \begin{cases} (\rho\text{-componente}) & \mu \ddot{\rho} - \mu \rho \dot{\alpha}^2 + (\mu g - q|E|) \cos \alpha + \kappa \rho - \frac{q|B|}{c} \rho \dot{\alpha} = 0 \\ (\alpha\text{-componente}) & (\mu \rho^2 + A) \ddot{\alpha} + 2\mu \rho \dot{\alpha} \dot{\rho} + \frac{q|B|}{c} \rho \dot{\rho} - (\mu g - q|E|)\rho \sin \alpha = 0 \\ (\beta\text{-componente}) & C \ddot{\beta} = 0. \end{cases}$$

2) Il sistema meccanico ammette il sistema completo di integrali primi riportati in (4). Questi sono ottenuti dalla studio della lagrangiana (coordinata  $\beta$  ignorabile) e dalla Hamiltoniana  $H = (\partial \dot{q}_k \cdot L) \dot{q}^k - L$  (indipendente esplicitamente dal tempo). Comunque questo sistema non è completo. D'altro canto il lavoro del moto intorno al baricentro  $G$  è nullo:  $\mathcal{L}^{(G)} = (F \cdot v_G + M(G) \cdot \omega) dt = 0$ . Infatti, nel moto intorno al baricentro  $v_G = 0$ . Inoltre tutte le forze attive e reattive sono applicate in  $G$ , quindi il momento risultante rispetto a  $G$ , risulta nullo:  $M(G) = 0$ . Poichè il lavoro risulta una 1-forma esatta con potenziale  $\mathcal{T}^{(G)}$ , cioè  $\mathcal{L}^{(G)} = d\mathcal{T}^{(G)}$ , ne viene che l'energia cinetica  $\mathcal{T}^{(G)}$  risulta una costante del moto.

$$(4) \quad \begin{cases} p_\beta & \equiv (\partial \dot{\beta} \cdot L) = C \dot{\beta} = c_1 \\ H &= \frac{\mu}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2) + \frac{A}{2} \dot{\alpha}^2 + \frac{C}{2} \dot{\beta}^2 + (\mu g - q|E|)\rho \cos \alpha + \frac{\kappa \rho^2}{2} = c_2. \\ \mathcal{T}^{(G)} &= \frac{1}{2}(A \dot{\alpha}^2 + C \dot{\beta}^2) = c_3 \end{cases}$$

Il sistema (4) è completo, sufficiente per integrare l'equazione (2). Comunque, un ulteriore vincolo non-olonomo si ottiene dalla seconda equazione cardinale  $\dot{\Omega}(G) = M(G) = 0$ , che implica una legge di conservazione vettoriale  $\Omega(G) = \overrightarrow{const}$ .<sup>1</sup> Questa legge di conservazione vettoriale introduce ulteriori vincoli su  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\beta}$ . Infatti se si scrive esplicitamente l'equazione  $\dot{\Omega}(G) = 0$ , utilizzando l'espressione (1) per la velocità angolare, abbiamo l'equazione (5) che dà un'ulteriore equazione vincolare non-olonomo.

$$(5) \quad \dot{\alpha} \dot{\beta} (C - A) = 0.$$

Quindi essendo  $C \neq A$ , ne viene che deve essere almeno  $\dot{\alpha} = 0$  o  $\dot{\beta} = 0$ . La verifica diretta può essere facilmente fatta. Infatti, dovendo essere  $\Omega(G) = A \dot{\alpha} \epsilon_2 + C \dot{\beta} \epsilon_3 = \overrightarrow{const}$ , ne viene che se  $\dot{\alpha} = 0$ , allora automaticamente risulta  $\Omega(G) = \overrightarrow{const}$ , poichè in tale caso  $\epsilon_3$  rimane costante. Analogamente se  $\dot{\beta} = 0$ , ne viene anche  $\Omega = A \dot{\alpha} \epsilon_2 =$

<sup>1</sup>Questo è essenzialmente quanto risulta dal fatto che il moto del disco  $D$ , intorno al suo baricentro  $G$ , è un moto alla Poincot. (V. Teorema del moto alla Poincot in Refs. [1] in PRO-GRAMMA.

$A\dot{\alpha}e_2 = \overrightarrow{const}$ . Pertanto basta che una delle due  $\dot{\alpha}$  o  $\dot{\beta}$  risulta nulla e che l'altra sia costante che la condizione  $\Omega(G) = \overrightarrow{const}$  risulta soddisfatta.

Pertanto possiamo riscrivere l'equazione di Lagrange incrementandola con i vincoli non-olonomi derivanti dalle leggi di conservazione che permettono di tenere conto anche del Teorema di Poinsot. Così abbiamo il sistema differenziale sopradeterminato, riportato in (6).

$$(6) \quad \begin{cases} \text{(A) } (\rho\text{-componente}) & \mu\ddot{\rho} - \mu\rho\dot{\alpha}^2 + (\mu g - q|E|)\cos\alpha + \kappa\rho - \frac{q|B|}{c}\rho\dot{\alpha} = 0 \\ \text{(B) } (\alpha\text{-componente}) & (\mu\rho^2 + A)\ddot{\alpha} + 2\mu\rho\dot{\alpha}\dot{\rho} + \frac{q|B|}{c}\rho\dot{\rho} - (\mu g - q|E|)\rho\sin\alpha = 0 \\ \text{(C) } (\beta\text{-componente}) & C\ddot{\beta} = 0. \\ \text{(D) } (p_\beta) & (\partial\dot{\beta}.L) = C\dot{\beta} = c_1 \\ \text{(E) } (\mathcal{T}^{(G)}) & \frac{1}{2}(A\dot{\alpha}^2 + C\dot{\beta}^2) = c_3 \\ \text{(F) } (\hat{\Omega}(G) = 0) & \dot{\alpha}\dot{\beta}(C - A) = 0. \end{cases}$$

Dalle equazioni (C), (D) e (E) ricaviamo  $\dot{\alpha} = c_4 \in \mathbb{R}$  e  $\dot{\beta} = c_5 \in \mathbb{R}$ . La integrazione di queste ci permette di scrivere le soluzioni affini per  $\alpha$  e  $\beta$ , riportate in (7).

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha(t) = \dot{\alpha}_0 t + \alpha_0 \\ \beta(t) = \dot{\beta}_0 t + \beta_0 \end{cases}$$

Inoltre dalla (F) assumendo la soluzione  $\dot{\beta} = 0 = \dot{\beta}_0$ , ricaviamo dalla (B)  $\dot{\rho} = \frac{\mu g - q|B|}{2\mu\dot{\alpha}_0 + \frac{q|B|}{c}} \sin\alpha(t)$ . Derivando rispetto al tempo questa funzione otteniamo anche  $\ddot{\rho} = \frac{\mu g - q|B|}{2\mu\dot{\alpha}_0 + \frac{q|B|}{c}} \dot{\alpha}_0 \cos\alpha(t)$ . Sostituendo questa espressione di  $\ddot{\rho}$  in (A), possiamo esplicitare la  $\rho$  in funzione di  $\cos\alpha(t)$  come riportata in (8).

$$(8) \quad \rho(t) = \frac{(q|E| - \mu g)(3\mu\dot{\alpha}_0 + \frac{q|B|}{c})}{(\kappa - \mu\dot{\alpha}_0^2 - \frac{q|B|}{c}\dot{\alpha}_0)(2\mu\dot{\alpha}_0 + \frac{q|B|}{c})} \cos\alpha(t).$$

Un'ulteriore condizione di consistenza si può ottenere imponendo che sia soddisfatta la legge di conservazione  $H = c_2$ . Infatti sostituendo la soluzione (8) nell'espressione di  $H$ , come è data in (4), si ottiene l'espressione riportata in (9).

$$(9) \quad H = \frac{\mu}{2}\dot{\alpha}_0^2\rho_0^2 + \frac{A}{2}\dot{\alpha}_0^2 + \frac{C}{2}\dot{\beta}_0^2 + [(\mu g - q|E|)\rho_0 + \frac{\kappa}{2}\rho_0^2] \cos^2\alpha(t)$$

dove

$$\rho_0 = \rho(\alpha = 0) = \frac{(q|E| - \mu g)(3\mu\dot{\alpha}_0 + \frac{q|B|}{c})}{(\kappa - \mu\dot{\alpha}_0^2 - \frac{q|B|}{c}\dot{\alpha}_0)(2\mu\dot{\alpha}_0 + \frac{q|B|}{c})}.$$

Quindi  $H$  risulta una costante del moto per qualunque ammissibile  $\alpha(t)$  se e solo se la condizione (10) è soddisfatta.

$$(10) \quad [(\mu g - q|E|)\rho_0 + \frac{\kappa}{2}\rho_0^2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(I) } \rho_0 = 0 \\ \text{oppure} \\ \text{(II) } [(\mu g - q|E|) + \frac{\kappa}{2}\rho_0] = 0 \end{cases}$$

Esplicitando l'espressione della  $\rho_0$ , si ricava che la condizione (10)(I) è equivalente a richiedere che sia  $q|E| = \mu g$  oppure  $\dot{\alpha}_0 = -\frac{1}{3\mu}\frac{q|B|}{c}$ . La condizione (10)(II) è

equivalente a richiedere che  $\dot{\alpha}_0$  sia una radice dell'equazione algebrica del terzo grado, riportata in (11).

$$(11) \quad \dot{\alpha}_0^3 + p\dot{\alpha}_0^2 + q\dot{\alpha}_0 + r = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{3}{2\mu} \frac{q|B|}{c} \\ q = \frac{1}{2\mu^2} \left( \frac{q|B|}{c} \right)^2 - \frac{\kappa}{4\mu} \\ r = -\frac{\kappa}{4\mu^2} \frac{q|B|}{c} \end{array} \right\}.$$

Chiamiamo le precedenti condizioni alternative in (11) *condizioni di consistenza conservazione Hamiltoniana*. Queste sono riportate in Tab. 1.

TAB. 1. Condizioni di consistenza conservazione Hamiltoniana.

Condizioni	Condizioni equivalenti alternative
(I) $\rho_0 = 0$	(Ia) $q E  = \mu g$ (Ib) $\dot{\alpha}_0 = -\frac{1}{3\mu} \frac{q B }{c}$
(II) $[(\mu g - q E ) + \frac{\kappa}{2}\rho_0] = 0$	$\dot{\alpha}_0^3 + p\dot{\alpha}_0^2 + q\dot{\alpha}_0 + r = 0$

Se  $D \leq 0$ , esistono tre radici reali  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Se  $D > 0$ , esiste una radice reale  $\xi_1$  e due complesse coniugate  $\xi_{2,3}$ .

$D \leq 0$ :  $\xi_1 = -\frac{p}{3} + 2\sqrt{-P} \cos \frac{\varphi}{3}$ ,  $\xi_{2,3} = -\frac{p}{3} - \sqrt{-P} [\cos \frac{\varphi}{3} \pm \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3}]$ ,

$\varphi = \arctan \sqrt{\frac{-P^3 + Q^2}{Q^2}}$ .

$D > 0$ :  $\xi_1 = -\frac{p}{3} + R + S$ ,  $\xi_{2,3} = -\frac{p}{3} - \frac{1}{2}(R + S) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(R - S)$ .

$p = \frac{3}{2\mu} \frac{q|B|}{c}$ ,  $q = [\frac{1}{2\mu^2} (\frac{q|B|}{c})^2 - \frac{\kappa}{4\mu}]$ ,  $r = -\frac{\kappa}{4\mu^2} \frac{q|B|}{c}$ .

$D = P^3 + Q^2$ ,  $P = (-p^2 + 3q)/9$ ,  $Q = (-2p^3 + 9pq - 27r)/54$ .

$R = \sqrt[3]{Q + \sqrt{P^3 + Q^2}}$ ,  $S = \sqrt[3]{Q - \sqrt{P^3 + Q^2}}$ .

( $D \leq 0$  implica  $P \leq 0$ , quindi  $p^2 \geq 3q$ ).

**3)** Dalla (8) si vede che un moto periodico della  $\rho$  si verifica con  $\dot{\beta} = 0$  e  $\dot{\alpha} = c_4 (\neq 0) \in \mathbb{R}$ , che soddisfa le condizioni di consistenza conservazione Hamiltoniana in Tab. 1. In tale caso il periodo risulta  $T = \frac{2\pi}{\dot{\alpha}_0}$ . Per esempio, assumendo che

$\rho(0) = \rho(\alpha = 0) = \rho_0 = \frac{(q|E| - \mu g)(3\mu\dot{\alpha}_0 + \frac{q|B|}{c})}{(\kappa - \mu\dot{\alpha}_0^2 - \frac{q|B|}{c}\dot{\alpha}_0)(2\mu\dot{\alpha}_0 + \frac{q|B|}{c})} > 0$  e  $\dot{\alpha}_0 > 0$ , allora la curva disegnata dal baricentro  $G$  risulta un otto verticale con centro in  $O$ .

• A verifica, consideriamo il caso particolare (Ia), contemplato in Tab. 1, con  $q|E| = \mu g$ . In tale caso l'equazione di Lagrange si riduce alla (12). Senza imporre ulteriori condizioni, si vede che l'unica soluzione è  $\rho = 0$ , che coincide con la (8) quando  $\rho_0 = 0$ .

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu\ddot{\rho} - \mu\rho\dot{\alpha}_0^2 + \kappa\rho - \frac{q|B|}{c}\rho\dot{\alpha}_0 = 0 \\ \rho\dot{\rho}(2\mu\dot{\alpha}_0 + \frac{q|B|}{c}) = 0 \end{array} \right.$$

Consideriamo ora il caso (Ib), con  $\dot{\alpha}_0 = -\frac{1}{3\mu} \frac{q|B|}{c}$ . Le equazioni di Lagrange si riducono alla (13).

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu\ddot{\rho} + \frac{2}{9\mu} \left( \frac{q|B|}{c} \right)^2 \rho + (\mu g - q|E|) \cos \alpha + \kappa\rho = 0 \\ \rho \left[ \frac{1}{3}\dot{\rho} \frac{q|B|}{c} \right] - (\mu g - q|E|) \sin \alpha = 0. \end{array} \right.$$

Dalla seconda equazione in (13) abbiamo la soluzione  $\rho = 0$ . Questa imposta nella prima equazione in (13), implica  $\mu g - q|E| = 0$ . Invece, considerando dalla seconda equazione  $\dot{\rho} = \frac{3(\mu g - q|E|)}{q|B|/c} \sin \alpha$ , che per derivazione dà  $\ddot{\rho} = -\frac{1}{\mu}(\mu g - q|E|) \cos \alpha$ ,

(dopo aver utilizzato la condizione (Ib), cioè  $\dot{\alpha}_0 = -\frac{1}{3\mu} \frac{q|B|}{c}$ ), dalla prima equazione in (13), ricaviamo  $\rho(\frac{2}{9\mu}(\frac{q|B|}{c})^2 + \kappa) = 0$ . Quindi otteniamo la soluzione  $\rho = 0$  che coincide con la (8) quando  $\rho_0 = 0$ . Infine, consideriamo la condizione (II) con  $(\mu g - q|E|) + \frac{\kappa}{2}\rho_0 = 0$ , cioè con  $\dot{\alpha}_0$  radice reale dell'equazione algebrica del terzo grado in Tab. 1. Ne viene che possiamo scrivere  $\rho_0 = -\frac{2}{\kappa}(\mu g - q|E|)$ . Quindi verifichiamo che effettivamente  $\rho(t) = (q|E| - \mu g)\frac{2}{\kappa} \cos \alpha(t)$  è soluzione dell'equazione di Lagrange con  $\dot{\alpha}_0$  una soluzione reale non nulla dell'equazione algebrica riportata in Tab. 1. Infatti, sostituendo nella prima equazione, otteniamo l'equazione (14).

$$(14) \quad (q|E| - \mu g) \cos \alpha(t) \left[ -\frac{4\mu}{\kappa} \dot{\alpha}_0^2 - \frac{2}{\kappa} \frac{q|B|}{c} \dot{\alpha}_0 + 1 \right] = 0.$$

Quindi considerando che  $\dot{\alpha}_0$  deve essere radice dell'equazione algebrica in Tab. 1, cioè l'equazione (15),

$$(15) \quad \dot{\alpha}_0^3 + \left[ \frac{3}{2\mu} \frac{q|B|}{c} \right] \dot{\alpha}_0^2 + \left[ \frac{1}{2\mu^2} \left( \frac{q|B|}{c} \right)^2 - \frac{\kappa}{4\mu} \right] \dot{\alpha}_0 + \left[ -\frac{\kappa}{4\mu^2} \frac{q|B|}{c} \right] = 0$$

otteniamo che  $\dot{\alpha}_0$  deve essere una radice dell'equazione algebrica (16).<sup>2</sup>

$$(16) \quad \dot{\alpha}_0^3 + \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{q|B|}{c} \right] \dot{\alpha}_0^2 - \left[ \frac{\kappa}{4\mu} \right] \dot{\alpha}_0 = 0.$$

Infatti moltiplicando la (14) per  $\frac{\kappa}{4\mu^2} \frac{q|B|}{c}$ , abbiamo l'equazione algebrica (17).

$$(17) \quad \left[ -\frac{1}{\mu} \frac{q|B|}{c} \right] \dot{\alpha}_0^2 - \left[ \frac{1}{2\mu^2} \left( \frac{q|B|}{c} \right)^2 \right] \dot{\alpha}_0 + \left[ \frac{\kappa}{4\mu^2} \frac{q|B|}{c} \right] = 0.$$

Sommando la (15) con la (17) ricaviamo la (16). Questa ammette le radici reali riportate in (18).

$$(18) \quad \begin{cases} (\dot{\alpha}_0)_1 = 0 \\ (\dot{\alpha}_0)_{2,3} = \left[ -\frac{1}{2\mu} \frac{q|B|}{c} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{2\mu} \frac{q|B|}{c} \right)^2 + \frac{\kappa}{\mu}} \right] / 2 \end{cases}$$

Questo conferma che le condizioni di consistenza della conservazione dell'Hamiltoniana sono in accordo con le soluzioni del tipo (8).

**4)** Dall'equazione di Lagrange (3) si vede che una configurazione statica con  $(\rho = 0, \alpha = 0)$ , si può verificare se e solo se  $q|E| = \mu g$ . Sotto questa condizione, la linearizzazione dell'equazione di Lagrange, in questa configurazione statica, dà il sistema (19).

---

<sup>2</sup>L'equazione (16) può scriversi nella forma  $[\dot{\alpha}_0^2 + \frac{1}{2\mu} \frac{q|B|}{c} \dot{\alpha}_0 - \frac{\kappa}{4\mu}] \dot{\alpha}_0 = 0$ . L'equazione tra parentesi quadra si ottiene anche imponendo che  $\dot{\rho} = \frac{\mu g - q|E|}{2\mu \dot{\alpha}_0 + \frac{q|B|}{c}} \sin \alpha(t)$ , come precedentemente ottenuta dalla (B), deve anche coincidere con la derivata della soluzione  $\rho(t)$  data in (8). Infatti, da questa imposizione abbiamo l'equazione  $\dot{\alpha}_0^2 + \frac{1}{2\mu} \frac{q|B|}{c} \dot{\alpha}_0 - \frac{\kappa}{4\mu} = 0$ . Notiamo anche che le funzioni  $\alpha(t)$  e  $\rho(t)$  non sono le coordinate polari piane  $(\rho, \alpha)$  nel piano verticale  $\pi$ . Infatti queste hanno le limitazioni  $(\rho \geq 0, 0 \leq \alpha < 2\pi)$ . Invece  $\alpha(t) \geq \alpha_0$ , con  $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$  e  $-\rho_0 \leq \rho(t) \leq \rho_0$ . Il loro significato è quello di ricoprimento, attraverso la descrizione spazio-temporale del moto nel fibrato di configurazione  $\pi : W = \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, (t, \rho, \alpha, \beta) \mapsto t$ . La proiezione del moto, come curva in  $\mathbb{R}^3, (t, \rho, \alpha)$ , sul piano  $(\rho, \alpha)$ , è un ricoprimento della curva  $\Gamma$  ad otto. Questa curva in coordinate polari piane  $(\rho, \alpha)$ , è rappresentata da due occhielli, uno superiore, nel I e II quadrante, con limitazioni  $(0 \leq \rho \leq \rho_0, -\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4})$  e l'altro inferiore, nel III e IV quadrante, con limitazioni  $(0 \leq \rho \leq \rho_0, \frac{3}{4}\pi \leq \alpha \leq \frac{5}{4}\pi)$ . (V. Fig. 2 e Osservazione 0.1.)

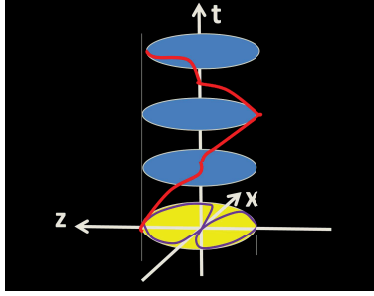


FIG. 2. Rappresentazione del moto periodico nel fibrato di configurazione. Il moto risulta un ricoprimento della curva  $\Gamma$ , (curva viola ad otto nel piano  $(z, x)$ ).

$$(19) \quad \begin{cases} (\rho\text{-componente}) & \mu \ddot{v}^1 + \kappa v^1 = 0 \\ (\alpha\text{-componente}) & A \ddot{v}^2 = 0 \\ (\beta\text{-componente}) & C \ddot{v}^3 = 0. \end{cases}$$

Quindi la  $\rho$  risulta stabile in questa configurazione statica, siccome  $\frac{\kappa}{\mu} > 0$ .

**Osservazione 0.1** (Relazione tra la soluzione periodica (8) e la lemniscata di Bernoulli). Ricordiamo che la *lemniscata di Bernoulli* è una curva algebrica piana del quarto ordine. In coordinate cartesiane ortogonali  $(x, z)$ , del piano  $\pi$ , questa curva è codificata dall'equazione (20).

$$(20) \quad (z^2 + x^2)^2 - a^2(z^2 - x^2) = 0, \quad (a > 0).$$

Passando alle coordinate polari  $(\rho, \theta)$ , ( $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ ), cioè considerando ( $x = \rho \sin \theta, z = \rho \cos \theta$ ), l'equazione (20) diviene (21).

$$(21) \quad \rho^2(\rho^2 - a^2 \cos 2\theta) = 0, \quad (a > 0).$$

Pertanto si spezza nel punto doppio  $O$  e nella curva (22).

$$(22) \quad \rho^2 - a^2 \cos 2\theta = 0, \quad (a > 0).$$

Quindi l'occhiello superiore ha le seguenti limitazioni: ( $0 \leq \rho \leq a, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ), mentre l'occhiello inferiore ha coordinate polari: ( $0 \leq \rho \leq a, \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$ ). La relazione di questa curva piana con la proiezione sul piano  $\pi$ , della soluzione periodica (8) si trova derivando rispetto a  $\theta$  la  $\rho^2$ , come data in (22). Otteniamo la formula (23).

$$(23) \quad \rho \rho' = -a^2 \sin 2\theta = 0, \quad (a > 0)$$

Invece dalla (8) otteniamo la (24).

$$(24) \quad \rho \rho' = -\rho_0^2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{\rho_0^2}{2} \sin 2\alpha, \quad (\rho_0 > 0).$$

Confrontando (24) con (23), otteniamo le condizioni:  $a^2 = \frac{\rho_0^2}{2}$  e  $\theta = \alpha$ . Questo dimostra che la proiezione del moto periodico (8) sul piano  $\pi$  è una lemniscata di Bernoulli.

## VALUTAZIONI

7

(1) BERHANE WOLDEMICAEL, Yosief [1178414]	17
(2) BINIAM, Teclé [1160449]	17
(3) MAGRINI, Diego [1405377]	17
(4) MANDOSI, Simona [1494655]	18
(5) MANGIA, Massimiliano [1465321]	17
(6) MARTORELLI, Alessio [789044]	20
(7) MAZZARELLO, Marco [1469479]	17
(8) MARZOCCA COSCARELLA, Vittorio [1409858]	20
(9) MORABITO, Francescogiuseppe [1410041]	21
(10) MORI, Riccardo [1466375]	21
(11) NICCOLINI, Francesco Italo [1388061]	18
(12) NOCERA, Valeria [1485938]	18
(13) PALLANTE, Chiara [1473004]	18
(14) PARIS, Luca [1391387]	21
(15) PELLICANO, Giannandrea [1455457]	17
(16) PETRUCCI, Jacopo [1394692]	17
(17) PIERALICE, Enrico [1236507]	18
(18) PIERVINCENZI, Giovanni [1467619]	17
(19) PIGNOTTI, Adriano [1382506]	17
(20) PINTO, Valentina [1483148]	18
(21) PREZIUSO, Eugenio [1411753]	21
(22) QUINZI, Giorgia [1453161]	18
(23) QUINZI, Marta [1453158]	18
(24) RENZI, Alberto [1257583]	18
(25) RISERVATO, Luca [1479177]	20
(26) SALVATI, Andrea [1469546]	18
(27) SAMÁ, Alessandro [1414841]	25
(28) SANGUIGNI, Fabrizio [1410467]	21
(29) SANÓ, Paolo [784531]	22
(30) SANTINI, Tommaso [1482886]	18
(31) SCIALANGA, Claudia [1452731]	17
(32) SCICCHITANO, Fabrizio [1378660]	21
(33) SCOTTO d'ANTONIO, Luigi [1556761]	19
(34) SEGATORI, Stefano [1484131]	21
(35) SPINNUCCI, Marco [1472731]	17
(36) STRAMACCI, Carlo [1209301]	21
(37) STRAPPELLI, Andrea [1562559]	17
(38) TRIPPINI, Andrea [1477317]	18
(39) TROVATO, Michele [1467729]	19
(40) ULLO, Francesco [1412295]	20
(41) VALORIANI, Roberto [1401198]	21
(42) VECCHIONE, Stefano [1453576]	21
(43) VISONE, Roberto [1466309]	21