Esercitazione n. 4
Calcolo delle Probabilità – Ingegneria Gestionale

Esercizio 1. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2y, & (x, y) \in A \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

essendo A il triangolo di vertici $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$. Determinare la costante c e la densità marginale di X e la funzione di ripartizione di Y . Calcolare $Cov(X, Y)$ e la probabilità p che Y sia minore di X supposto che $Y \leq 1$.

Esercizio 2. Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto con la seguente distribuzione congiunta di probabilità

p(x, y)	Y = 0	Y = 1	Y = 2	Y = 3
X = 0	1/32	3/32	3/32	1/32
X = 1	1/16	1/8	1/16	0
X = 2	1/8	1/8	0	0
X = 3	1/4	0	0	0

Calcolare il valor atteso di X. Stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti. Determinare la covarianza di X e Y.

Determinare la distribuzione di $Z = Y - X$.

Esercizio 3. Si consideri una particella che si muove nella striscia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ la cui posizione (X, Y) a un tempo fissato è un vettore aleatorio con densità $f(x, y) = x^{-2}$ per $(x, y) \in S$ e 0 altrove. Si determinino le densità marginali per X e Y e si stabilisca se X e Y sono stocasticamente indipendenti. Si calcoli la probabilità p che la particella si trovi nel quadrato avente vertici $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$. Si calcoli il valore atteso di X e di $Z = \sqrt{X}Y$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0 \\ \frac{1}{50}x^2 & se\ 0 \leq x \leq 5 \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1 & se\ 5 \leq x \leq 10 \\ 1 & se\ x \geq 10 \end{cases}$$

Quali sono i possibili valori di X? Qual è la densità $f_X(x)$ di X? Quanto vale $\mathbb{E}(X)$?

Esercizio 5. Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti e con distribuzione uniforme su $[0,1]$. Calcolare

$$P(XY > 1/2); \qquad P(XY < 1/4 | X > 1/2).$$

Esercizio 6. Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto con la seguente distribuzione congiunta di probabilità

p(x, y)	Y = -2	Y = -1	Y = 0	Y = 1	Y= 2
X = -2	0	0.1	0	0	c
X = -1	0.1	0.1	c	0	0
X = 0	0	c	0	0.125	0
X = 1	0	0	0.125	c	c
X = 2	c	0	0	c	0.1

1. Determinare il valore di c.
2. Calcolare $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $Var(X)$.
3. Calcolare $\mathbb{E}(XY)$ e $Cov(X, Y)$.
4. Calcolare $Cov(2X - 1, -Y)$.

Esercizio 7. Determinare la distribuzione del numero di incidenti in due tratti stradali disgiunti, assumendo che il numero di incidenti in ciascun tratto siano due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione di poisson di parametro 3.