

Esercitazione 2

Esercizio 1. Un campione di 10 studenti, che non contiene ripetizioni, è ottenuto da una popolazione di quattro classi formate da 25 studenti ciascuna.

- (a) Qual è la probabilità che 6 studenti del campione provengano dalla stessa classe (evento A)?
- (b) Calcolare la probabilità che almeno una delle classi non sia rappresentata nel campione (evento B).

Esercizio 2. Si effettuano estrazioni senza reimmissione da un'urna che contiene 90 palline, 45 rosse e 45 nere. Calcolare la probabilità p_{13} che la prima e la terza pallina estratta siano rosse. Calcolare la probabilità p_1 che estraendo 5 palline si ottengano più palline rosse che palline nere.

Esercizio 3. Un'urna contiene 50 palline, 30 rosse e 20 blu. Si estraggono 10 palline senza reimmissione. Calcolare la probabilità di estrarre almeno 6 palline dello stesso colore. Calcolare la probabilità che la prima rossa venga estratta alla seconda estrazione e l'ultima rossa venga estratta alla decima estrazione.

Esercizio 4. Un'urna contiene 10 palline bianche e 15 nere. Si effettuano estrazioni senza reimmissione. Determinare la probabilità di E che si estraggano 2 palline nere e 1 bianca. Ora si estraggano 22 palline, determinare la probabilità di H che nell'urna rimangano 2 palline nere e 1 bianca. Commentare il risultato.

Esercizio 5. Una popolazione studentesca è costituita da quattro classi formate da 25 studenti ciascuna. Si determina un campione (tra una estrazione e l'altra vi è reimmissione) fino ad ottenere almeno uno studente per ciascuna classe. Trovare la probabilità che sia necessario estrarre n campioni.

Esercizio 6. I componenti prodotti da una certa azienda possono presentare due difetti, con percentuale rispettivamente del 3 e del 7 per cento. I due tipi di difetti si possono produrre in momenti diversi della produzione, e pertanto possiamo assumere che le presenze dell'uno o dell'altro siano tra loro indipendenti.

- a) Quale è la probabilità che un componente presenti entrambi i difetti?
- b) Quale è la probabilità che presenti il difetto 1, sapendo che è difettoso?
- c) Quale è la probabilità che presenti solo uno dei due difetti, sapendo che è difettoso?

Esercizio 7. Due lotti hanno la stessa composizione, 5 pezzi difettosi e 2 pezzi buoni. Dal primo lotto si effettuano estrazioni senza reimmissione, calcolare la probabilità p_{23} che il secondo

e terzo pezzo estratto siano difettosi. I pezzi buoni estratti in 3 estrazioni senza reimmissione dal primo lotto vengono inseriti nel secondo lotto mentre i pezzi difettosi vengono scartati, si effettua un'estrazione in blocco di 4 pezzi dal secondo lotto. Si calcoli la probabilità p che escano almeno 3 pezzi buoni. Supposto che siano estratti 3 pezzi buoni dal secondo lotto qual è la probabilità α che alla prima estrazione siano stati estratti 2 pezzi buoni?

Esercizio 8. In un sacchetto ci sono due monete, di cui una è regolare e l'altra è truccata, perché presenta testa da entrambi i lati. Viene estratta una moneta a caso e se ne guarda una sola faccia: è testa. Quale è la probabilità che si tratti della moneta regolare?

Esercizio 9. Una fabbrica produce circuiti stampati di cui il 6% ha un difetto di tipo A ed il 4% ha un difetto di tipo B . I due difetti possono essere presenti contemporaneamente in uno stesso circuito in modo indipendente l'uno dall'altro. Prima di mettere in vendita i circuiti prodotti viene fatta un'ispezione elettronica, che individua correttamente come difettosi il 95% dei circuiti con il difetto A ed il 75% dei circuiti con il difetto B , ma individua incorrettamente come difettosi il 10% dei circuiti che non lo sono. Tutti i circuiti identificati come difettosi vengono eliminati, e gli altri vengono messi in vendita. Con quale probabilità p_1 un circuito con difetto di tipo A viene messo in vendita? E p_2 uno con difetto di tipo B ? Con che probabilità p_3 un circuito scelto a caso viene messo in vendita?

Supposto che un circuito è stato messo in vendita, qual è la probabilità che sia difettoso p ?

Esercizio 10. Per valutare la resistenza dei propri pneumatici la casa di produzione *Fridgestone* effettua dei *test drive* lungo delle strade di montagna. I tecnici suppongono che la probabilità di slittare sia pari a $2 \cdot 10^{-2}$ se non c'è ghiaccio, ad $8 \cdot 10^{-2}$ se c'è ghiaccio. Due curve su tre presentano ghiaccio e ad ogni curva si può slittare in maniera indipendente. Calcolare la probabilità p di slittare ad una curva. Si effettua un *test drive* su un tracciato con 10 curve. Calcolare la probabilità p_0 che il veicolo non slitti ad alcuna curva durante il test.

Soluzione: Esercizio 1.

(a) Consideriamo gli eventi $K_i = \{\text{esattamente 6 studenti del campione provengono dalla classe } i\text{-esima}\}$ con $i = 1, \dots, 4$.

Siccome $A = \bigcup_{i=1}^4 K_i$, gli eventi K_i sono a due a due disgiunti ($K_i \cap K_j = \emptyset$ per $i \neq j$) e

$$P(K_i) = \frac{\binom{25}{6} \binom{75}{4}}{\binom{100}{10}}, \forall i = 1, \dots, 4.$$

Segue

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^4 K_i\right) = \sum_{i=1}^4 P(K_i) = 4 \frac{\binom{25}{6} \binom{75}{4}}{\binom{100}{10}} \cong 0.0497$$

(b) Definiamo $C_i = \{\text{la classe } i \text{ non è rappresentata nel campione}\}$, per $i = 1, 2, 3, 4$.

Siccome $B = \bigcup_{i=1}^4 C_i$ e $P(C_i) = \binom{75}{10} / \binom{100}{10}$, per $i = 1, \dots, 4$, mentre $P(C_i \cap C_j) = \binom{50}{10} / \binom{100}{10}$, per $i \neq j$;

$P(C_i \cap C_j \cap C_k) = \binom{25}{10} / \binom{100}{10}$, per $i \neq j \neq k \neq i$,

$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) = 0$. Dal principio di inclusione esclusione

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^4 C_i\right) = \sum_{i=1}^4 P(C_i) - \sum_{i<j} P(C_i \cap C_j) + \sum_{i<j<k} P(C_i \cap C_j \cap C_k) \\ &= \binom{4}{1} \frac{\binom{75}{10}}{\binom{100}{10}} - \binom{4}{2} \frac{\binom{50}{10}}{\binom{100}{10}} + \binom{4}{3} \frac{\binom{25}{10}}{\binom{100}{10}} \cong 0.188 \end{aligned}$$

Soluzione: Esercizio 2.

Sia $R_i = \{\text{all}'i\text{-esima estrazione viene estratta una rossa}\}$,

$$p_{13} = P(R_1 \cap R_3) = P(R_1 \cap R_2) = (1/2) \cdot (44/89) = 22/89$$

non essendoci informazioni sull'esito della seconda estrazione, si ha $P(R_1 \cap R_3) = P(R_1 \cap R_2)$.

Sia $A = \{\text{vengono estratte più rosse che nere}\}$ si può dedurre, osservando la simmetria tra numero di palline rosse e nere, $P(A) = P(A^C)$.

Soluzione: Esercizio 3.

Sia $A = \{\text{almeno 6 palline hanno lo stesso colore}\}$, si nota che $A^C = \{\text{vengono estratte 5 rosse e 5 blu}\}$. Ne segue che

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^C) = 1 - \frac{\binom{30}{5} \binom{20}{5}}{\binom{50}{10}} \cong 1 - 0.215 = 0.785.$$

Sia B_i l'evento pallina blu estratta alla i -esima estrazione, dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento $B_1 \cap B_2^c \cap B_{10}^c$.

Siccome $P(B_1 \cap B_2^c \cap B_{10}^c) = P(B_1 \cap B_2^c \cap B_3^c)$, si ha

$$P(B_1 \cap B_2^c \cap B_3^c) = P(B_1)P(B_2^c|B_1)P(B_3^c|B_1 \cap B_2^c) = \frac{20}{50} \frac{30}{49} \frac{29}{48} = \frac{29}{196} \cong 0.148.$$

Soluzione: Esercizio 4.

L'evento H coincide con estrarre 13 nere e 9 bianche. Allora

$$P(E) = \frac{\binom{15}{2}\binom{10}{1}}{\binom{25}{3}} = P(H) = \frac{\binom{15}{13}\binom{10}{9}}{\binom{25}{22}} \cong 0.4565$$

dove si è usata l'identità $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Soluzione: Esercizio 5.

Sia $A_n = \{\text{all}'n\text{-esima estrazione c'è ancora almeno una classe non rappresentata}\}$.

Definendo gli eventi $C_i = \{\text{all}'n\text{-esima estrazione la classe } i \text{ non è rappresentata}\}$, per $i = 1, 2, 3, 4$, dato che $A_n = \bigcup_{i=1}^4 C_i$, calcoliamo $P(A_n)$ grazie al principio di inclusione esclusione:

$P(C_i) = (75/100)^n$; $P(C_i \cap C_j) = (50/100)^n$, per $i \neq j$;
 $P(C_i \cap C_j \cap C_k) = (25/100)^n$, per $i \neq j \neq k \neq i$. Infine $P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) = 0$, pertanto

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P\left(\bigcup_{i=1}^4 C_i\right) = \sum_{i=1}^4 P(C_i) - \sum_{i<j} P(C_i \cap C_j) + \sum_{i<j<k} P(C_i \cap C_j \cap C_k) \\ &= \binom{4}{1} \left(\frac{75}{100}\right)^n - \binom{4}{2} \left(\frac{50}{100}\right)^n + \binom{4}{3} \left(\frac{25}{100}\right)^n \\ &= 4 \left(\frac{3}{4}\right)^n - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

Si noti che vale l'inclusione $A_n \subseteq A_{n-1}$, perché una sequenza di estrazioni che dopo n estrazioni non sono selezionati studenti da almeno una classe è a maggior ragione una sequenza che nelle prime $n-1$ estrazioni non sono selezionati studenti da almeno una classe.

Ora, l'evento $B_n = \{\text{l}'n\text{-esima estrazione dà il primo campione con almeno uno studente per ogni classe}\}$, è ottenuto mediante un campione dove fino all' $(n-1)$ -esima estrazione si ha una classe non rappresentata (A_{n-1}) e all' n -esima c'è un campione per ogni classe (A_n^c), i.e. $B_n = A_{n-1} \cap A_n^c$, quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(A_{n-1}) - \mathbb{P}(A_n) = 4 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{3}{4}\right] - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{1}{2}\right] + 4 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{1}{4}\right] \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Soluzione: Esercizio 6.

Siano A e B , rispettivamente, gli eventi “nel pezzo è presente il difetto 1” ed “nel pezzo è presente il difetto 2”.

a) Data l'indipendenza $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{3}{100} \frac{7}{100} = \frac{21}{10000}$.

b) Osservando che l'evento “il pezzo è difettoso” coincide con $A \cup B$, si calcola

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{100} + \frac{7}{100} - \frac{21}{10000}.$$

La probabilità che sia presente il difetto 1, supposto che il pezzo sia difettoso è

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{979}{10000}} = \frac{300}{979} \cong 0.3064.$$

c) Il pezzo ha un solo difetto é dato da $[(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)]|A \cup B$, dunque é unione di eventi disgiunti. Utilizzando l'indipendenza

$$P((A \cap B^C)|(A \cup B)) = \frac{P((A \cap B^C) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B^C)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)P(B^C)}{P(A \cup B)} = \frac{3 \cdot 93}{979} \cong 0.285$$

In maniera simile si trova

$$P((A^C \cap B)|(A \cup B)) = \frac{P(A^C \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A^C)P(B)}{P(A \cup B)} = \frac{97}{100} \frac{7}{100} \frac{10000}{979} \cong 0.6936$$

Quindi $\mathbb{P}[(AB^C \cup A^CB)|A \cup B] = \frac{958}{979} \cong 0.9786$.

Soluzione: Esercizio 7.

Sia D_i "estratto pezzo difettoso all' i -esima estrazione dal primo lotto" la probabilità p_{23} corrisponde a $P(D_2 \cap D_3)$, si può trovare semplicemente osservando che $P(D_2 \cap D_3) = P(D_1 \cap D_2) = (5/7)(4/6) = 10/21$.

La probabilità p si può calcolare condizionando all'esito delle estrazioni dal primo lotto. Definiamo $A_i = \{\text{esattamente } i \text{ pezzi buoni estratti dal secondo lotto}\}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$; $B_j = \{\text{esattamente } j \text{ pezzi buoni estratti dal primo lotto}\}$, $j = 0, 1, 2$

$$P(A_3) = \sum_{j=0}^2 P(A_3|B_j)P(B_j) = 0 + \frac{\binom{3}{3}\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{5}{2}}{\binom{8}{4}\binom{7}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1}\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{9}{4}\binom{7}{3}} = \frac{4}{63} \cong 0.0635$$

$$P(A_4) = \sum_{j=0}^2 P(A_4|B_j)P(B_j) = 0 + 0 + \frac{\binom{4}{4}\binom{5}{0}\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{9}{4}\binom{7}{3}} = \frac{1}{882} \cong 0.00113$$

Ne segue che $p = P(A_3) + P(A_4) = 19/294 \cong 0.0646$

Dalla formula di Bayes

$$\alpha = P(B_2|A_3) = P(A_3|B_2) \frac{P(B_2)}{P(A_3)} = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1}\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{9}{4}\binom{7}{3}} \frac{63}{4} = \frac{5}{14} \cong 0.3571$$

Soluzione: Esercizio 8.

Sia T l'evento che la faccia visibile è testa, E l'evento che la moneta sia quella equa e E^C che sia quella truccata. La probabilità cercata è data dalla formula di Bayes

$$P(E|T) = \frac{P(E \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|E)P(E)}{P(T|E)P(E) + P(T|E^C)P(E^C)} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Soluzione: Esercizio 9.

Sia $A = \{\text{è presente il difetto A}\}$, $B = \{\text{è presente il difetto B}\}$, $V = \{\text{il circuito viene messo in vendita}\}$, allora $p_1 = P(V|A)$, $p_2 = P(V|B)$

$$\begin{aligned} p_1 &= P(V|A) = P(V|(A \cap B^C))P(B^C|A) + P(V|(A \cap B))P(B|A) \\ &= \frac{5}{100} \frac{96}{100} + \frac{5}{100} \frac{25}{100} \frac{4}{100} = \frac{97}{2000} = 0.0485 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= P(V|B) = P(V|(A^C \cap B))P(A^C|B) + P(V|(A \cap B))P(A|B) \\ &= \frac{25}{100} \frac{94}{100} + \frac{5}{100} \frac{25}{100} \frac{6}{100} = \frac{943}{4000} = 0.23575, \end{aligned}$$

dove si è usata l'indipendenza di A e B .

Per calcolare $p_3 = P(V)$ utilizziamo la legge delle probabilità totali, tramite la partizione $A \cap B^C$, $A^C \cap B$, $A \cap B$, $(A \cup B)^C$.

Utilizzando l'indipendenza si trova $P(A \cap B^C) = 6 \cdot 96 \times 10^{-4}$, $P(A^C \cap B) = 4 \cdot 94 \times 10^{-4}$, $P(A \cap B) = 6 \cdot 4 \times 10^{-4}$. Dalle leggi di De Morgan $P((A \cup B)^C) = P(A^C \cap B^C) = P(A^C)P(B^C) = (94 \cdot 96) \times 10^{-4}$. Allora

$$\begin{aligned} p_3 &= P(V) = P(V|A \cap B^C)P(A \cap B^C) + P(V|A^C \cap B)P(A^C \cap B) + P(V|A \cap B)P(A \cap B) \\ &\quad + P(V|(A \cup B)^C)P((A \cup B)^C) \\ &= \frac{5}{100} \frac{6 \cdot 96}{10^4} + \frac{25}{100} \frac{4 \cdot 94}{10^4} + \frac{125}{10^4} \frac{6 \cdot 4}{10^4} + \frac{90}{100} \cdot \frac{9024}{10^4} = \frac{82447}{10^5} = 0.82447 \end{aligned}$$

Infine, $p = P((A \cup B)|V)$, osservando che $A \cup B = (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) \cup (A \cap B)$, dove gli eventi a secondo membro sono disgiunti, e poi applicando la formula di Bayes

$$\begin{aligned} p &= P((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) \cup (A \cap B)|V) = P(A \cap B^C|V) + P(A^C \cap B|V) + P(A \cap B|V) \\ &= P(V|A \cap B^C) \frac{P(A \cap B^C)}{P(V)} + P(V|A^C \cap B) \frac{P(A^C \cap B)}{P(V)} + P(V|A \cap B) \frac{P(A \cap B)}{P(V)} \\ &= \frac{10^5}{82447} \cdot \left[\frac{5}{100} \frac{6 \cdot 96}{10^4} + \frac{25}{100} \frac{4 \cdot 94}{10^4} + \frac{125}{10^4} \frac{6 \cdot 4}{10^4} \right] \cong 0.01493 \end{aligned}$$

Soluzione: Esercizio 10.

Sia S l'evento "il veicolo slitta ad una curva", G l'evento "è presente il ghiaccio ad una curva", si trova tramite la legge delle probabilità totali

$$p = P(S) = P(S|G)P(G) + P(S|G^C)P(G^C) = \frac{8}{100} \frac{2}{3} + \frac{2}{100} \frac{1}{3} = \frac{3}{50} = 0.06$$

p_0 è invece la probabilità che in tutte e dieci le curve indipendentemente non accada di slittare. La probabilità p_0 si può allora esprimere come $p_0 = (1 - p)^{10} \cong 0.5386$