Esercizio 1/1

a) La probabilità che alla prossima estrazione del Lotto nella ruota di Roma esca il n° 1 è data da $\frac{5}{90} = p_1$

che può essere calcolata come casi favorevoli su casi possibili

Dunque il n° di estrazioni del Lotto affinché esca il n° 1 nella ruota di Roma, essendo l'estrazioni indipendenti e la probabilità di successo a ogni estrazione la medesima, si ha

$X \sim \text{Geometrica}\left(\frac{5}{90}\right)$

b) La probabilità di estrarre 5 numeri fissati nella ruota di Roma, non dipende da quali siano i 5 numeri distinti ed è

$$p = \frac{1}{\binom{90}{5}}$$

(c) Dal punto (a) discende per le proprietà

Esercizio 1/2

dalla distribuzione geometrica

$P(X>30) = (1-p_1)^{30} = \left(\frac{85}{90}\right)^{30}$

d) Dalla proprietà di assenza di memoria della distribuzione geometrica, si ha

$P(X \leq 120 \mid X > 100) = 1 - P(X > 100+20 \mid X > 100)$

$= 1 - P(X>20) = 1 - \left(\frac{85}{90}\right)^{20}$

(e) In 30 estrazioni (indipendenti) la variabile aleatoria Z: il n° di volte che esce il n° 1, è una variabile con distribuzione binomiale con $n=30$ e $p = \frac{5}{90}$, quindi

$P(Z \geq 3) = 1 - \sum_{i=0}^{2} P(Z=i) = 1 - \sum_{i=0}^{2} \binom{30}{i} \left(\frac{5}{90}\right)^{i} \left(\frac{85}{90}\right)^{30-i}$

Esercizio 2/1

Sia

$A =$ "il pezzo scelto a caso proviene dalla linea A"

$P(A) = 0.3$

$D =$ "il pezzo scelto a caso è difettoso"

$P(D|A) = 0.1 \qquad P(D|A^c) = 0.05$

$$p = P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|A^c)P(A^c)$$
$$= 0.1 \times 0.3 + 0.05 \times 0.7$$

Sia X il no di pezzi difettosi in una confezione di 10 pezzi provenienti dalla stessa linea

Siccome i 10 pezzi provengono dal lotto di numerosità molto più grande di 10, si può approssimare la distribuzione ipergeometrica con una binomiale

e dunque $X|A \sim Bi(10, 0.1)$ e $X|A^c \sim Bi(10, 0.$

$$P(X=1) = P(X|A)P(A) + P(X=1|A^c)P(A^c) =$$
$$= \binom{10}{1}\frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^9 \frac{3}{10} + \binom{10}{1}\frac{5}{100}\left(\frac{95}{100}\right)^9 \frac{7}{10}$$

Esercizio 2/2

Per valutare se è più probabile che provenga dalla linea A o B si può studiare il rapporto delle distribuzioni aggiornate, tramite il teorema di Bayes

$$\frac{P(A \mid X=1)}{P(A^c \mid X=1)} = \frac{\cancel{\binom{10}{1}} \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^9 \frac{3}{\cancel{10}}}{\cancel{\binom{10}{1}} \frac{5}{100} \left(\frac{95}{100}\right)^9 \frac{4}{\cancel{10}}} = \frac{3 \cdot 9^9}{\frac{35\,(95)^9}{10^{10}}} < 1$$

quindi è più probabile che i 10 pezzi della confezione provengano dalla linea B

Esercizio 3

Il numero di fusibili difettosi estratti in 4 estrazioni senza restituzione ha distribuzione ipergeometrica quindi

$$P(X=k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{8}{4-k}}{\binom{10}{4}} \qquad \text{per } k \in \{0,1,2\}$$

avendo il lotto 2 pezzi difettosi e 8 buoni.

La varianza di X si ricorda che è

$$Var(X) = n\,p(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$
$$= 4\,\frac{2}{10}\left(\frac{8}{10}\right)\left(1 - \frac{3}{9}\right)$$

$$P(E_3|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_3)}{P(E_1)} = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \underbrace{P(E_2|E_1)}_{= 1/9}$$

la seconda uguaglianza è motivata dall'equiprobabilità di $E_1 \cap E_3$ ed $E_1 \cap E_2$

Esercizio 4

$$P(X_0 = 1) = 1$$

$$P(X_1 = i \mid X_0 = 1) = \begin{cases} 1/4 & i = 0,2 \\ 1/2 & i = 1 \end{cases}$$

$$P(X_2 = j \mid X_1 = 0) = \begin{cases} 0 & j > 0 \\ 1 & j = 0 \end{cases}$$

$$P(X_2 = j \mid X_1 = 1) = \begin{cases} 1/4 & i = 0,2 \\ 1/2 & i = 1 \end{cases}$$

$$P(X_2 = j \mid X_1 = 2) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^2 & j = 0 \\ \binom{2}{1}\frac{1}{4}\,\frac{1}{2} & j = 1,3 \\ \binom{2}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 & j = 2 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^2 & j = 4 \end{cases}$$

Per la regola probabilità totali

$$P(X_2 = 0) = \sum_{i=0}^{2} P(X_2 = 0 \mid X_1 = i)\, P(X_1 = i \mid X_0 = 1) \cdot 1$$

Analogamente

$$P(X_2 = 1) = \sum_{i=0}^{2} P(X_2 = 1 \mid X_1 = i)\, P(X_1 = i \mid X_0 = 1) \cdot 1$$

e dal TH. di Bayes

$$P(X_1 = 2 \mid X_2 = 1) = \frac{P(X_2 = 1 \mid X_1 = 2)\, P(X_1 = 2)}{P(X_2 = 1)}$$

Esercizio 5/1

La probabilità di ottenere Testa

T_i = " testa all' i-es. lancio di una moneta scelta a caso tra le 3 monete "

si desume dalla regola delle probabilità totali.

Sia M_j = " la moneta scelta a caso sia M_j "

$P(M_j) = 1/3 \quad j = 1, 2, 3$

$$P(T_i | M_j) = \begin{cases} 1/2 & j=1 \\ 1 & j=2 \\ 1/10 & j=3 \end{cases}$$

quindi $P(T_i) = \sum_{j=1}^{3} P(T_i | M_j) P(M_j) =$

$$= 1/3 \left(1/2 + 1 + \frac{1}{10} \right) = \frac{22}{60} = \frac{11}{30}$$

Il numero di teste X in n lanci della suddetta moneta è t.c. $X \sim Bi\left(n, \frac{11}{30}\right)$

Ponendo $n = 10$ e applicando il teorema di Bayes si ha

Esercizio 5/2

$$P(H_i \mid X=3) = \frac{P(H_i)\,P(X=3 \mid H_i)}{P(X=3)}$$

dove

$$P(X=3 \mid H_1) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$P(X=3 \mid H_2) = 0$$

$$P(X=3 \mid H_3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^{3}\left(\frac{9}{10}\right)^{7}$$

e $P(X=3) = \sum_{i=1}^{3} P(X=3 \mid H_i)P(H_i$