Esercizio 1

1.1 Determinare tutti i valori dei parametri reali α e β per i quali la matrice

$$\mathbf{A}(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ \beta & \alpha-1 & \beta \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è a diagonale dominante.

1.2 Sia $\mathbf{B} = [1/2,\ 3/3,\ -1/4]^T$. Per ciascuno dei seguenti sistemi

$$\mathbf{A}(1/2,-1/2)\mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{A}(1/2,1)\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

individuare un procedimento iterativo adatto ad approssimarne la soluzione. Per ognuno di essi specificare la scelta dell'approssimazione iniziale e la velocità di convergenza.

Esercizio 2

2.1 Determinare tutti i valori del parametro reale β per i quali la matrice

$$\mathbf{A}(\beta) = \begin{pmatrix} \beta & -1 & 1 \\ 0 & 1-\beta & -1 \\ 0 & 0 & 1+\beta \end{pmatrix}$$

ha tutti gli autovalori positivi.

2.2 Posto $\beta = 1.01$, stabilire se la matrice $\mathbf{A}(\beta)$ risulta ben condizionata. Motivare la risposta.

Esercizio 3

3.1 Separare le radici della seguente equazione non lineare

$$x + e^{-x^2}(cos(x) + 1) = 0$$

in intervalli di ampiezza non superiore a 0.4.

3.2 Stabilire se il metodo della tangenti è adatto ad approssimare la radice nell'intervallo $[-0.9, -0.8]$. In caso di risposta negativa, individuare un metodo adatto ad approssimare tale radice.

Esercizio 4 Dato il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} y' = -y + x, & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

4.1 Verificare l'esistenza e l'unicità dell'equazione nell'intervallo $I = [0, 1]$.

4.2 Sapendo che per l'errore di arrotondamento sui dati vale la maggiorazione $|\eta_i| \leq \eta = 0.5 \cdot 10^{-7}$ e che $|y''(x)| \leq 2, \quad \forall\, x \in I$, determinare il passo ottimo del metodo di Eulero e dare una maggiorazione in modulo dell'errore globale massimo quando il passo di discretizzazione è pari al passo ottimo.

Esercizio 5 Dato il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0, & x > 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

scrivere uno schema numerico del primo ordine adatto ad approssimarne la soluzione nell'intervallo $[0, 4]$.

Esercizio 6 Dato il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} -x^2 y'' - 2xy' + 2y = -4x^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ y(1) = 0, \quad y(2) = 1 \end{cases}$$

verificare l'esistenza e l'unicità della soluzione e scrivere uno schema numerico per approssimarla. Specificare l'ordine e le condizioni che garantiscono la convergenza del metodo.

Esercizio 7 Dato il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} -u_t + 4u_x = 0, & x \in \mathbf{R},\ t > 0 \\ u(x, 0) = sin(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

determinare l'equazione delle linee caratteristiche e scrivere uno schema numerico per approssimare la soluzione, specificando l'ordine e le condizioni che ne garantiscono la convergenza.

Esercizio 8 Dato il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} (1+x^2)^3 y'' = -(1+x^2)^2 y' + y + \frac{6x^4-2x^3+4x^2-2x-3}{1+x^2}, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 1/2 \end{cases}$$

8.1 scrivere uno schema numerico del secondo ordine adatto ad approssimarne la soluzione in 5 nodi equispaziati dell'intervallo $[0, 1]$;

8.2 sapendo che la soluzione esatta è $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$, dare una stima dell'errore globale di troncamento che si commette approssimando $y(0.5)$ con lo schema numerico individuato al punto precedente.