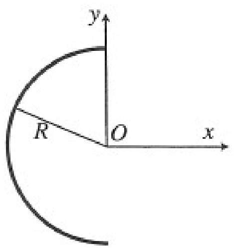
Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

Foglio di Esercizi n. 1

1.1. (**) Una carica elettrostatica è distribuita uniformemente, con densità lineica λ, su una semiretta che giace sull'asse x di un riferimento cartesiano ortogonale e si estende da $x = d$ all'infinito. Calcolare la forza esercitata su una carica q, posta nell'origine del suddetto sistema di riferimento. Dati: $\lambda = 1\ \mu\text{C/m}$; $q = 10\ \mu\text{C}$; $d = 10\ \text{cm}$.
[Risposta: $\mathbf{F} = (-\mathbf{i})(1/4\pi\varepsilon_0)q\lambda/d$, dove $\mathbf{i}$ è il versore dell'asse x; $|\mathbf{F}| = 0.9$ N]

1.2. (**) Una carica elettrostatica Q è distribuita uniformemente su una semicirconferenza di raggio R. Trovare modulo, direzione e verso del campo elettrico $\mathbf{E}_0(O)$ al centro O della semicirconferenza. Dati: $Q = -10\ \mu\text{C}$; $R = 20$ cm.
[Risposta: $\mathbf{E}_0(O)$ è diretto nel verso negativo dell'asse x ed ha modulo $E_0(O) = |Q|/(2\pi^2\varepsilon_0 R^2) = 1.43 \times 10^6$ V/m]



1.3. (**) Due sfere conduttrici identiche con carica rispettiva $q_1 > 0$ e $q_2 < 0$, tenute ferme nel vuoto a distanza (fra i centri delle sfere stesse) $d = 13.3$ cm, si attraggono con una forza di modulo $F_1 = 1$ N. Le sfere vengono poi collegate con un filo conduttore. Quando il filo viene rimosso le sfere si respingono con una forza di modulo $F_2 = F_1/8$. Si chiede di determinare q_1 e q_2.
[Risposta: $q_1 = 2\ \mu\text{C}$ e $q_2 = -1\ \mu\text{C}$ oppure $q_1 = 1\ \mu\text{C}$ e $q_2 = -2\ \mu\text{C}$]

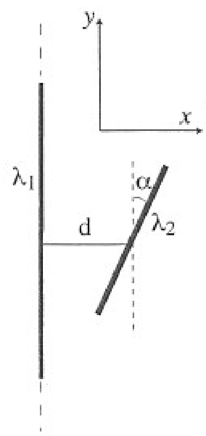
1.4. (*) Una carica elettrostatica è distribuita nel vuoto all'interno di un guscio sferico di raggi interno a ed esterno b, con densità di volume $\rho = kr$. Calcolare le espressioni del campo elettrico $\mathbf{E}$ in tutto lo spazio. (Es n.1 della prova scritta di Fisica Generale II del 28.1.97.)

1.5. (**) Un modello molto semplificato di atomo con numero atomico Z consiste in una carica elettrica negativa $(-Ze)$, con e pari al modulo della carica dell'elettrone, corrispondente all'insieme degli elettroni orbitanti, uniformemente distribuita all'interno di una sfera di raggio R, al cui centro è posta una carica puntiforme $(+Ze)$, corrispondente al nucleo. Ricavare l'espressione del campo elettrico in funzione della distanza r dal centro.
(Es n.1 della prova scritta di Fisica Generale II del 13.2.98; I turno)

1.6. (**) In un piano giacciono un filo indefinitamente lungo ed una sbarretta di lunghezza L, entrambi di sezione trascurabile, carichi con densità lineica uniforme, rispettivamente pari a λ_1 e λ_2. La sbarretta, il cui centro si trova a distanza d dal filo, è inclinata rispetto al filo stesso di un angolo α (vedi figura). Calcolare la forza a cui è sottoposta la barretta. Dati: $\lambda_1 = 1$ nC/m; $\lambda_2 = -1\ \mu$C/m; $L = 1$ cm, $d = 10$ cm; $\alpha = 30°$.
[Risposta:

$$F_x = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 \sin\alpha} \ln\frac{d + (L/2)\sin\alpha}{d - (L/2)\sin\alpha} = -1.8 \times 10^{-6}\ \text{N}; \quad F_y = 0; \quad F_z = 0]$$

(Es. n. 1 della prova scritta di Fisica Generale II del 24.11.1997)

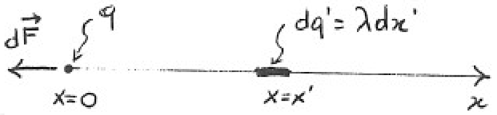


Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 1

1.1.



Contributo $d\vec{F}$ dovuto alla carica dq':

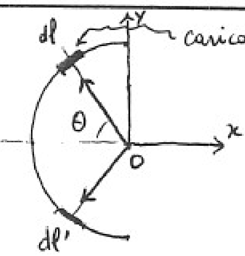
$$d\vec{F} = \frac{q\, dq'}{4\pi\varepsilon_0 x'^2}(-\vec{i})$$

il vettore $\vec{r}$ con origine in dq' ed estremo in q può essere scritto $\vec{r} = -x'\vec{i}$

$$\vec{F} = \int_{\text{semiretta}} d\vec{F} = \int_d^\infty \frac{q\lambda dx'}{4\pi x'^2}(-\vec{i}) = (-\vec{i})\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x'}\right]_d^\infty = -\vec{i}\,\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$|\vec{F}| = \frac{10^{-5}\, 10^{-6}}{4\pi\ 8.86\times10^{-12}\times 0.1} = 0.9\ \text{N}$$

1.2.



carica $dq = \lambda d\ell = \lambda R\, d\theta$

- $d\ell = R\, d\theta$
- densità lineica di carica: $\lambda = \dfrac{Q}{\pi R} < 0$

Per simmetria, la componente y di $\vec{E}_0(0)$ è nulla (due elementi della semicirconf., simmetrici rispetto all'asse x, come $d\ell$ e $d\ell'$ in figura, danno luogo a contributi opposti ad E_{oy}). Poichè, inoltre, $\lambda < 0$, $\vec{E}_0(0)$ è diretto nel verso negativo dell'asse x.

$$|E_{ox}(x=0)| = \int_{\text{semicirc.}} |dE_x| = \int_{\text{semicirc.}} \frac{|dq|\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\lambda| R\cos\vartheta\, d\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{|\lambda|}{2\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{|\lambda|}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{|Q|}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2} = 1.43\times10^6\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

1.3.

Quando le due sfere vengono collegate, su di esse rimane una carica totale $q = q_1 - |q_2| = q_1 + q_2$, che si distribuisce equamente fra le due sfere, su ciascuna delle quali rimane quindi una carica $(q_1+q_2)/2$.

Perciò:

$$F_1 = \frac{-q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \quad (1)\ ; \qquad F_2 = \frac{[(q_1+q_2)/2]^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{(q_1+q_2)^2}{-4q_1q_2} \Rightarrow -4q_1q_2\frac{F_2}{F_1} = q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2$$

$$q_1^2 + 2q_2\underbrace{\left(1+2\frac{F_2}{F_1}\right)}_{5/4}q_1 + q_2^2 = 0 \Rightarrow q_1 = -\frac{5}{4}q_2 \pm\sqrt{\frac{25}{16}q_2^2 - q_2^2} = \begin{cases} -2q_2 \\ -\frac{1}{2}q_2 \end{cases}$$

Sostituendo nella (1):

$$F_1 = \begin{cases} \dfrac{2q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \Rightarrow q_2 = -0.99\,\mu\text{C}\ ;\ q_1 = 1.98\,\mu\text{C} \\[2ex] \dfrac{q_2^2/2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \Rightarrow q_2 = -1.98\,\mu\text{C}\ ;\ q_1 = 0.99\,\mu\text{C} \end{cases}$$

1.4. Sistema di riferimento con origine O nel centro del guscio. Per simmetria il campo elettrico è radiale. Ne calcoliamo il modulo, applicando la legge di Gauss ad una generica superficie sferica di centro O e raggio r:

$$\phi(r) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot(\text{carica nella regione } r'<r)$$

$$r \leq a \qquad E(r) = 0$$

$$a \leq r \leq b \qquad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_a^r \rho(r')4\pi r'^2 dr' = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2}\int_a^r k r'^3 dr' = \frac{k}{4\varepsilon_0 r^2}(r^4-a^4)$$

$$r > b \qquad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_a^b \rho(r')4\pi r'^2 dr' = \frac{k}{4\varepsilon_0 r^2}(b^4-a^4)$$

1.5. Densità volumetrica di carica associata agli elettroni

$$\rho(r) = \begin{cases} -\dfrac{Ze}{(4/3)\pi R^3} & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

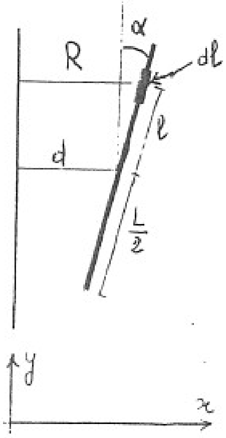
Applichiamo la legge di Gauss ad una sup. sferica di raggio r, con centro nel nucleo:

per $r \leq R$ $\quad 4\pi r^2 E(r) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left[Ze + \displaystyle\int_0^r \rho(r')\,4\pi r'^2 dr'\right] = \dfrac{Ze}{\varepsilon_0}\left[1-\dfrac{r^3}{R^3}\right]$,

da cui

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{r}{R^3}\right] & r \leq R \\ 0 & r \geq R \end{cases}$$

1.6.



$\vec{E} \parallel \hat{x}$; $\quad E_0(x=R) = \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 R}$ ← campo generato da un filo indefinito e rettilineo

$\vec{F} \parallel \hat{x}$ $\quad dF_x = E_0\,dq = \lambda_2\,dl\,E_0(R)$ ← forza su un elemento di sbarretta di lunghezza dl a distanza R dal filo

$$R = d + l\sin\alpha$$

$$F_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dF_x = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dl}{d+l\sin\alpha} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0\sin\alpha}\ln\frac{d+\frac{L}{2}\sin\alpha}{d-\frac{L}{2}\sin\alpha} =$$

$$F_x = -1.86\times10^{-6}\,N \;;\quad F_y = F_z = 0$$

Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

Foglio di Esercizi n. 2

2.1. (**) La terra può essere assimilata ad una sfera conduttrice di raggio $R_T = 6370$ km, su cui è disposta una carica elettrica con densità superficiale $\sigma = -2.7$ nC/m^2. L'atmosfera che la circonda è schematizzabile come uno spazio vuoto con carica distribuita uniformemente, con densità (volumica) ρ_0. Si chiede di calcolare il valore di ρ_0, sapendo che il campo elettrico alla quota $h = 1400$ m vale $E_h = 20$ V/m ed è diretto verso la terra.
[Risposta: $\rho_0 = +1.8 \times 10^{-12}$ C/m^3]
(Es A.1 della prova scritta di Elettromagnetismo del 20.9.2002)

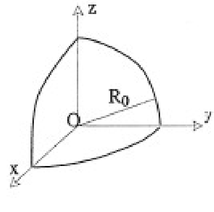
2.2. (**) Dato nel vuoto uno strato indefinito di spessore D, uniformemente carico, con densità di volume ρ, compreso fra un piano (1) di ascissa $x = -D/2$ ed un piano (2) di ascissa $x = D/2$, ricavare l'espressione della differenza di potenziale
a) fra un punto O del piano di mezzeria ed un punto A del piano (2);
b) fra il piano (1) e il piano (2).
[Risposta: $V_O - V_A = \rho D^2/8\varepsilon_0$; b) $V_1 - V_2 = 0$]
(Es n.1 della prova scritta di Fisica Generale II del 13.2.98 - II turno)

2.3. (**) Due conduttori cilindrici di raggio a, rettilinei, paralleli fra loro, di lunghezza infinita, disposti nel vuoto, hanno carica uguale in modulo, ma di segno opposto. Se d è la distanza tra i due assi e ΔV è la differenza di potenziale fra i due conduttori, determinare l'espressione del modulo della carica per unità di lunghezza presente su ciascuno dei due conduttori.
[Risposta: $\lambda = \pi\varepsilon_0 \Delta V / \ln[(d-a)/a]$]
(Es. n.1 della prova scritta di Fisica generale II del 21.10.2000)

2.4. (**) Una carica $q = 20$ nC è distribuita uniformemente, nel vuoto, lungo una circonferenza di raggio $R = 9$ cm; al centro O della circonferenza è posta una carica puntiforme $Q = -100$ nC. Calcolare il lavoro L necessario per portare la carica Q dal punto O al punto P, posto sull'asse della circonferenza, a distanza $d = \sqrt{3}R$ da O.
[Risposta: $L = -Qq/8\pi\varepsilon_0 R = 100\ \mu$J]
(Es. A.1 della prova scritta di Elettromagnetismo del 18.12.2001)

2.5. (***) Una particella di massa $m = 1$ g e carica $q_0 = 100$ pC è posta, nel vuoto, al centro di un anello di raggio $R = 10$ cm, su cui è distribuita uniformemente la carica $q = -10$ nC. La particella viene spostata di un tratto $x_0 = 0.5$ cm lungo l'asse dell'anello e quindi viene abbandonata. Dimostrare che la particella si muove lungo l'asse e oscilla con moto armonico attorno all'origine (centro dell'anello); determinare inoltre il periodo T delle oscillazioni.
[Risposta: $T = 2\pi[4\pi\varepsilon_0 m R^3/q_0|q|]^{1/2} = 66$ s]

2.6. (***) Data una distribuzione di carica uniforme e costante ρ_0 all'interno di un volume pari ad un ottavo di sfera di raggio R_0, come indicato in figura, determinare il campo elettrico $\mathbf{E}$ nell'origine O del sistema di riferimento indicato.
[Risposta: $E_x = E_y = E_z = -\rho_0 R_0/16\varepsilon_0$]
(Es. n. 2 della prova scritta di Fisica II del 19.6.2000)



Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 2

2.1. Applichiamo il teorema di Gauss ad una sfera concentrica con la terra e di raggio $R_\mathrm{T}+h$. Osserviamo che sulla superficie di questa sfera $\vec{E}\cdot\vec{n} = -E_\mathrm{h}$, essendo $\vec{n}$ il versore della normale uscente dalla sfera. Si ha quindi

$$-4\pi(R_\mathrm{T}+h)^2E_\mathrm{h} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[4\pi R_\mathrm{T}^2\sigma + \int_{R_\mathrm{T}}^{R_\mathrm{T}+h} 4\pi\rho_0 r^2 dr\right],$$

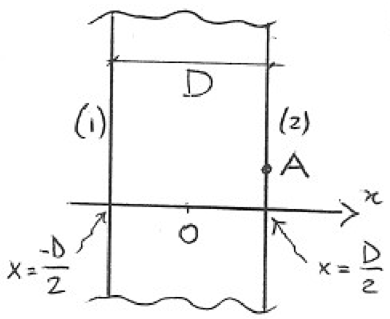
$$-4\pi(R_\mathrm{T}+h)^2E_\mathrm{h}\varepsilon_0 = 4\pi R_\mathrm{T}^2\sigma + 4\pi\rho_0\frac{1}{3}\left[(R_\mathrm{T}+h)^3 - R_\mathrm{T}^3\right],$$

da cui

$$\rho_0 = -3\frac{R_\mathrm{T}^2\sigma + (R_\mathrm{T}+h)^2E_\mathrm{h}\varepsilon_0}{(R_\mathrm{T}+h)^3 - R_\mathrm{T}^3} = 1.8\times10^{-12}\ \mathrm{C/m^3}.$$

2.2. Per la simmetria del problema il campo elettrico è diretto parallelamente all'asse x. Inoltre $E_x(x) = -E_x(-x)$ e $E_x(0) = 0$. Dati due punti P e Q di ascissa x_P e x_Q, rispettivamente, si ha allora:

$$V_P - V_Q = -\int_Q^P \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{x_Q}^{x_P} E_x(x)dx. \qquad (1)$$



Applicando il teorema di Gauss a un cilindro interno allo strato, con una base nel piano di simmetria ($x = 0$) e l'altra in una generica posizione x (con $-D/2 \le x \le D/2$), si ha

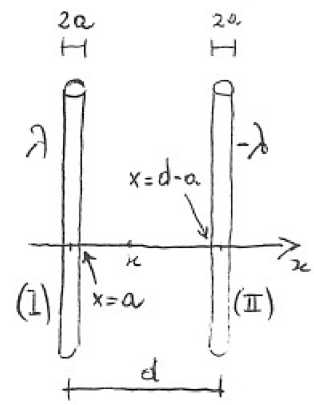
$$E_x(0)dS + E_x(x)dS = \frac{\rho x dS}{\varepsilon_0}, \text{ da cui } E_x(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}.$$

Inserendo quest'ultima espressione nella (1) otteniamo

$$V_0 - V_A = -\int_{x=D/2}^{x=0}\frac{\rho x dx}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\frac{\rho x^2}{\varepsilon_0}\bigg|_0^{D/2} = \frac{1}{8}\frac{\rho D^2}{\varepsilon_0} \quad \text{e} \quad V_1 - V_2 = 0.$$

2.3. Ricordiamo che il campo elettrico di un filo indefinito di raggio a è radiale e, per $r \ge a$, ha modulo $E(r) = \lambda/2\pi\varepsilon_0 r$. Sull'asse x (vedi figura) il campo è quindi parallelo all'asse stesso e pari alla somma (algebrica) dei contributi dovuti ai due fili. In particolare, nell' intervallo $a \le x \le d-a$ si ha

$$E_x(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} - \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right).$$



La differenza di potenziale ΔV è quindi

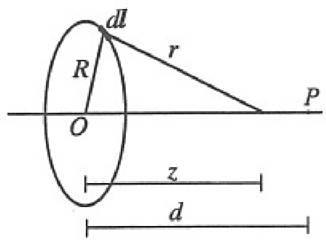
$$\Delta V = \int_a^{d-a} E_x(x)dx = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{d-a}{a} - \ln\frac{a}{d-a}\right) = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a},$$

da cui si ottiene

$$\lambda = \frac{\pi\varepsilon_0\Delta V}{\ln\dfrac{d-a}{a}}.$$

2.4. Il lavoro che si deve compiere dall'esterno per spostare la carica Q dal punto O al punto P è dato da

$$L = Q[V(P) - V(O)], \tag{2}$$



dove V è il potenziale elettrico. Il potenziale generato da una carica puntiforme q a distanza r dalla carica stessa, e assumendo nullo il potenziale all'infinito, è $V(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r$. Nel caso in esame, con distribuzione lineare di carica $\lambda = q/2\pi R$, sull'asse della circonferenza si ha (vedi figura)

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{circ}} \frac{\lambda\, dl}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, 2\pi R}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}}.$$

Nei punti P ($z = d = \sqrt{3}R$) e O ($z = 0$) il potenziale è quindi

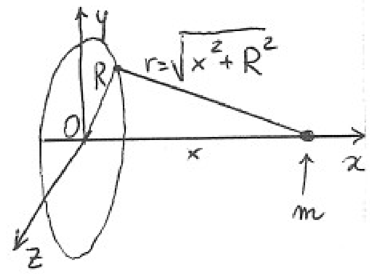
$$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{d^2+R^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R}; \qquad V(O) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}.$$

Sostituendo nell'Eq. (2) si ha

$$L = Q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2R} - \frac{1}{R}\right] = -\frac{Qq}{2R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{10^{-7}\times 2\times 10^{-8}}{2\times 9\times 10^{-2}}\, 9\times 10^9 = 10^{-4}\ \text{J} = 100\ \mu\text{J}.$$

2.5. In un generico punto sull'asse x il campo elettrico è dato da $\vec{E}_0(x,0,0) = (E_x, 0, 0)$, con

$$E_x(x) = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{x}{r} = \frac{2\pi R\lambda x}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{-|q|x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}} \simeq \frac{-|q|x}{4\pi\varepsilon_0 R^3},$$



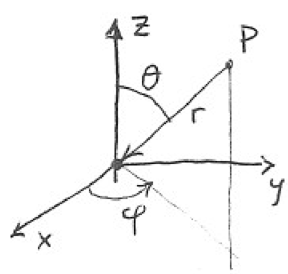
dove l'ultimo passaggio è giustificato dall'ipotesi $x \ll R$. La particella è quindi soggetta alla forza, diretta lungo l'asse x, $F_x = q_0 E_x(x)$ e il suo moto è descritto dall'equazione $m\ddot{x} = q_0 E_x(x)$, ovvero da

$$\ddot{x} + \frac{q_0|q|}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}x = 0,$$

la cui soluzione è un moto armonico di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 m R^3}{q_0|q|}} = 66\ \text{s}.$$

2.6. Per la simmetria del problema, $E_x = E_y = E_z$ nell'origine O del sistema di riferimento. Calcoliamo E_z. Il contributo dE_z dovuto alla carica contenuta del volume elementare $d\tau = r^2 dr d\varphi \sin\theta d\theta$ attorno al punto P di coordinate (r, θ, φ) è



$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_0 d\tau}{r^2}\frac{(-z)}{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_0 d\tau}{r^2}\cos\theta.$$

Integrando su tutto il volume contenente carica si ha

$$E_z = \int_0^{R_0} dr \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta\cos\theta \cdot \left(-\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\right).$$

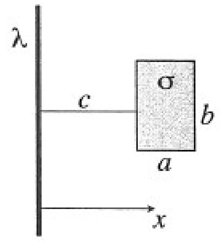
Osserviamo che $\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta\cos\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}d(\sin^2\theta) = \frac{1}{2}$. Abbiamo quindi $E_z = R_0 \cdot \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-\rho_0 R_0}{4\varepsilon_0} = -\frac{\rho_0 R_0}{16\varepsilon_0}$ e il campo elettrico in O è

$$\vec{E}(0,0,0) = -\frac{\rho_0 R_0}{16\varepsilon_0}\cdot(1;1;1).$$

Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

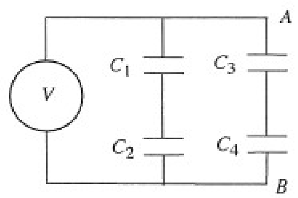
Foglio di Esercizi n. 3



3.1. (**) Nella situazione mostrata in figura, nel vuoto sono disposti un filo rettilineo molto lungo, carico con densità lineica uniforme λ, e una sottile lastra rettangolare, complanare con il filo, con un lato parallelo al filo, carica con densità superficiale uniforme σ. Determinare l'espressione della forza che si esercita sulla lastra.
[Risposta: $F_y = F_z = 0$; $F_x = \frac{\lambda\sigma b}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{a+c}{c}\right)$]
(Es n. 1 della prova scritta di Fisica Generale II del 12.2.99 - II turno)

3.2. (**) In una regione sferica $a < r < b$, con $a = 1$ cm, è distribuita una carica elettrica con densità di volume $\rho = A/r$, dove A è costante. Al centro della cavità ($r = 0$) c'è una carica puntiforme $q = 62.8$ nC. Determinare il valore di A, affinchè il campo elettrico abbia intensità costante nella regione $a < r < b$. [Risposta: $A = q/2\pi a^2 = 10^{-4}$ C/m^2.]
(Es. n. 1 della prova scritta di Fisica generale II del 5.6.1998 - II turno)

3.3. (***) Una carica positiva Q è distribuita uniformemente, nel vuoto, all'interno di una sfera di centro O e raggio R. Una particella puntiforme di massa m e carica elettrica positiva q, vincolata a muoversi lungo una direzione radiale passante per O, viene lanciata con velocità iniziale v diretta verso O, da un punto posto a distanza D da O. Determinare l'espressione del valore minimo di v affinché la particella raggiunga il centro O.
[Risposta: $v_{\min} = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{3}{2R} - \frac{1}{D}\right)}$]
(Es. n. 2 della prova scritta di Fisica generale II del 13.2.1998 - II turno)



3.4. (**) Si considerino i quattro condensatori C_1–C_4, collegati come in figura, e di capacità $C_1 = 4$ μF, $C_2 = 1.33$ μF, $C_3 = 1.33$ μF, e $C_4 = 4$ μF. Sia $V = 100$ V. Calcolare la capacità equivalente fra A e B, l'energia elettrostatica totale U, la differenza di potenziale V_1 ai capi di C_1 e la carica Q_1 su C_1.
[Risposta: $C_{\text{eq}} = 2$ μF; $U = 10$ mJ; $Q_1 = 100$ μC; $V_1 = 25$ V.]

3.5. (**) Un condensatore di capacità $C_1 = 10$ μF viene caricato alla d.d.p. $V_1 = 100$ V. Il condensatore viene poi disconnesso dal generatore. Successivamente un condensatore di capacità $C_2 = 40$ μF viene posto in parallelo a C_1. Determinare la d.d.p. V' che si stabilisce ai capi dei condensatori, la carica su ciascun condensatore e la variazione di energia elettrostatica nel processo di messa in parallelo dei condensatori.
[Risposta: $V' = V_1C_1/(C_1 + C_2) = 20$ V; $Q'_1 = C_1V' = 0.2$ mC; $Q'_2 = C_2V' = 0.8$ mC; $\Delta U = -(1/2)C_1V_1^2\,[C_2/(C_1 + C_2)] = -40$ mJ.]

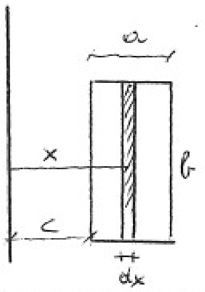
3.6. (**) Un condensatore a facce piane e parallele, di capacità $C = 1$ μF, è caricato con una pila a una differenza di potenziale $V_0 = 10$ V, e successivamente è lasciato isolato. Calcolare il lavoro L che si deve compiere dall'esterno per aumentare del 10% la distanza fra le armature.
[Risposta: $L = (1/2)CV_0^2(\Delta d/d) = 5 \times 10^{-6}$ J.]

Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 3

3.1



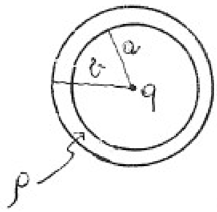
$d\vec{F} = dq\,\vec{E}$ $\vec{E}$ radiale $\Rightarrow F_y = F_z = 0$

$E_x(x) = \lambda / 2\pi\varepsilon_0 x$ (campo di un filo ∞)

Forza su striscia di spessore dx e lunghezza b: $dF_x = \dfrac{\overbrace{\lambda\sigma b\,dx}^{dq}}{2\pi\varepsilon_0 x}$

Su tutta la lastra: $F_x = \displaystyle\int_{x=c}^{x=c+a} dF_x = \int_c^{c+a} \frac{\lambda\sigma b\,dx}{2\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\lambda\sigma b}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{c+a}{c}$

3.2



Si applica la legge di Gauss ad una sfera con centro in q e raggio r $(a \le r \le b)$:

$4\pi r^2 E_0(r) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left[q + \displaystyle\int_a^r \rho(r)\,4\pi r^2\,dr\right]$, con $\rho(r) = \dfrac{A}{r}$

$$E_0(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[q + 4\pi\int_a^r \frac{A}{r} r^2\,dr\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[q + 4\pi A\left(\frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\pi A + \frac{1}{r^2}\left(q - 2\pi A a^2\right)\right] \Rightarrow E_0(r) = \text{costante}$$

se $A = \dfrac{q}{2\pi a^2} = \dfrac{10^{-4}\,C}{m^2}$

3.3 La particella si muove in un campo conservativo, quindi

$\frac{1}{2} m v_{(D)}^2 + U(D) = \frac{1}{2} m v_{(0)}^2 + U(0)$ $U = qV$

$v_{(D)} = v_{min}$ se $v_{(0)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{min}^2 = q\left[V(0) - V(D)\right]$; $v_{min} = \sqrt{\frac{2q}{m}\left(V(0) - V(D)\right)}$

$V(0) - V(D) = -\displaystyle\int_D^0 E(r)\,dr = \int_0^D E(r)\,dr$; per calcolare $E(r)$: legge di Gauss

per $r \le R$: $4\pi r^2 E(r) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^r \underbrace{\rho}_{\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}}\, 4\pi r^2\,dr \Rightarrow E(r) = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

per $r \ge R$: $E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

quindi $V(0) - V(D) = \displaystyle\int_0^R \frac{Qr\,dr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + \int_R^D \frac{Q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dots = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3}{2R} - \frac{1}{D}\right]$

$v_{min} = \sqrt{\dfrac{qQ}{2\pi m\varepsilon_0}\left(\dfrac{3}{2R} - \dfrac{1}{D}\right)}$

3.4 C_1 in serie con C_2 : $C_{12} = C_1C_2/(C_1+C_2) = 1\,\mu F$

C_3 in serie con C_4 : $C_{34} = C_3C_4/(C_3+C_4) = 1\,\mu F$

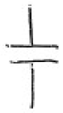
$C_{eq} = C_{12} /\!/ C_{34} = C_{12} + C_{34} = 2\,\mu F$

$U = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-6} \times (10^2)^2 = 10^{-2}\ J = 10\ mJ$

$C_{12} = C_{34}$, quindi $Q_{12} = Q_{34} = Q/2 = \frac{C_{eq}V}{2} = 100\,\mu C$

C_1 e C_2 in serie, quindi $Q_1 = Q_2 = Q_{12} = 100\,\mu C$; $V_1 = Q_1/C_1 = 25\ V$

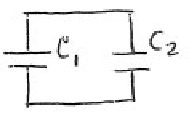
3.5 (a)



C_1, V_1

$Q_1 = C_1V_1 = 10^{-3} C = 1\,mC$

(b)



$\Leftrightarrow$ C', V'

$Q' = Q_1' + Q_2' = Q_1 = C_1V_1$ $\qquad C' = C_1 + C_2$

$V' = \frac{Q'}{C'} = \frac{C_1V_1}{C_1+C_2} = 20V$

$Q_1' = C_1V_1' = 0.2\,mC$; $Q_2' = C_2V_2' = 0.8\,mC$

$$\Delta U = U^{(b)} - U^{(a)} = \frac{1}{2}C'V'^2 - \frac{1}{2}C_1V_1^2 = \dots = -\frac{1}{2}C_1V_1^2\frac{C_2}{C_1+C_2} = -40\,mJ$$

3.6

$$L = E_{finale} - E_{iniziale} = \frac{1}{2}\left[\frac{Q^2}{C_{finale}} - \frac{Q^2}{C}\right] \quad ; \quad Q = CV_0$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \ ; \qquad C_{finale} = \varepsilon_0 \frac{S}{d+\Delta d} = C\frac{d}{d+\Delta d}$$

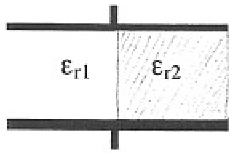
$$L = \frac{1}{2}CV_0^2\left[\frac{C}{C_{finale}} - 1\right] = \frac{1}{2}CV_0^2\left[\frac{d+\Delta d}{d} - 1\right] = \frac{1}{2}CV_0^2\frac{\Delta d}{d} = 5\,\mu J$$

Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

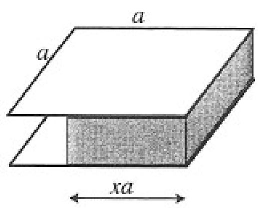
A cura del Prof. S. Atzeni

Foglio di Esercizi n. 4

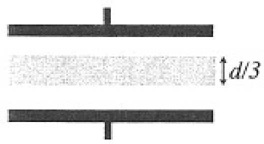
4.1. (**) Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto una capacità $C_0 = 10\ \mu$F. Successivamente viene riempito per metà volume con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\varepsilon_{r1} = 1.4$ e per l'altra metà con un dielettrico di costante $\varepsilon_{r2} = 1.6$ (vedi figura). Calcolare il nuovo valore della capacità C e il rapporto fra le cariche di polarizzazione sui due dielettrici.
[Risposta: $C = 15\ \mu$F; $\sigma_{p1}/\sigma_{p2} = (\varepsilon_{r1} - 1)/(\varepsilon_{r2} - 1) = 2/3$]
(Es. n. A.1 della prova scritta di Elettromagnetismo del 5.12.2001)



4.2. (**) Un condensatore a facce piane e parallele, quadrate di lato a, è riempito per un tratto $l = xa$, con $0 \le x \le 1$ (vedi figura), da una lastra di dielettrico omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa ε_r. Siano E_a e $E_d \gg E_a$ le rigidità dielettriche dell'aria e del dielettrico, rispettivamente. Determinare l'espressione, in funzione di x, del modulo della carica massima Q_{max} che può essere posta su un'armatura senza che si abbia una scarica. Calcolarne il valore numerico per $a^2 = 1111$ cm^2; $x = 1/4$; $E_a = 33.3$ kV/cm; $\varepsilon_r = 9$. (Approssimare $\varepsilon_0 \simeq 9 \times 10^{-12}$ C^2/Nm^2.)
[Risposta: $Q_{max} = \varepsilon_0 a^2 E_a [1 + x(\varepsilon_r - 1)] = 10\ \mu$C.]
(Es n. 1 della prova scritta di Elettromagnetismo del 18.3.2002)

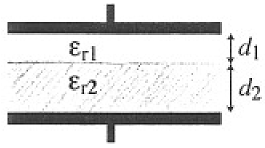


4.3. (**) Un condensatore piano, con distanza fra le armature pari a d, ha capacità $C = 1\ \mu$F. Determinare il valore C_1 della capacità quando un foglio metallico, di spessore $d/3$, viene posto nello spazio fra le armature, parallelamente alle armature stesse (vedi figura).
[Risposta: $C_1 = (3/2)C = 1.5\ \mu$F.]



4.4. (**) Un materiale con costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 3$ e rigidità dielettrica $E_r = 20$ MV/m viene impiegato come mezzo dielettrico in un condensatore a facce piane e parallele. Determinare il valore minimo A_{min} dell'area dei piatti in modo che il condensatore abbia capacità $C = 100$ pF e ai suoi capi possa essere applicata una differenza di potenziale $V = 5.4$ kV.
[Risposta: $A_{min} = VC/\varepsilon_0\varepsilon_r E_r = 10$ cm^2.]

4.5. (**) Un condensatore piano, con armature di area S, viene riempito (vedi figura) con due dielettrici di costante dielettrica relativa ε_{r1} e ε_{r2}. Determinare l'espressione della capacità del condensatore.
[Risposta: $C = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S \varepsilon_{r2}/(\varepsilon_{r1} d_2 + \varepsilon_{r2} d_1)$]



4.6. (**) Calcolare a) la carica massima che può essere posta su una sfera metallica di raggio $R = 15$ cm, in aria, sapendo che la rigidità dielettrica dell'aria è $E_r = 30$ kV/cm; b) il potenziale a cui si porta la sfera in queste condizioni (assumendo potenziale nullo all'infinito).
[Risposta: $Q_{max} = 4\pi\varepsilon_0 R^2 E_r = 7.5\ \mu$C; $V = RE_r = 450$ kV.]

4.7. (**) Una sfera metallica di raggio R, in aria, carica ed isolata elettricamente, ha un potenziale V (assumendo potenziale nullo all'infinito). Calcolare le espressioni a) della densità di energia elettrostatica w_s in prossimità della superficie della sfera; b) dell'energia elettrostatica U immagazzinata in tutto lo spazio. [Risposta: $w_s = \varepsilon_0 V^2/2R^2$; $U = 2\pi\varepsilon_0 V^2 R$]

Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 4

4.1 Il condensatore può essere considerato costituito da due condensatori in parallelo, con capacità totale

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} (S/2)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} (S/2)}{d} = \frac{\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}}{2} C_0 = 15\ \mu F$$

$\sigma = \vec{P}\cdot\vec{n}$; ($\vec{n}$: normale alla sup. del diel.) ; $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$

quindi $\sigma_{1p} = \varepsilon_0(\varepsilon_{r1} - 1)|\vec{E}_1|$; $\sigma_{2p} = \varepsilon_0(\varepsilon_{r2} - 1)|\vec{E}_2|$; ← perché $\vec{E} /\!/ \vec{n}$

essendo $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$, si ha: $\dfrac{\sigma_{1p}}{\sigma_{2p}} = \dfrac{\varepsilon_{r1} - 1}{\varepsilon_{r2} - 1} = 0.67$

4.2 Come nell'esercizio precedente,

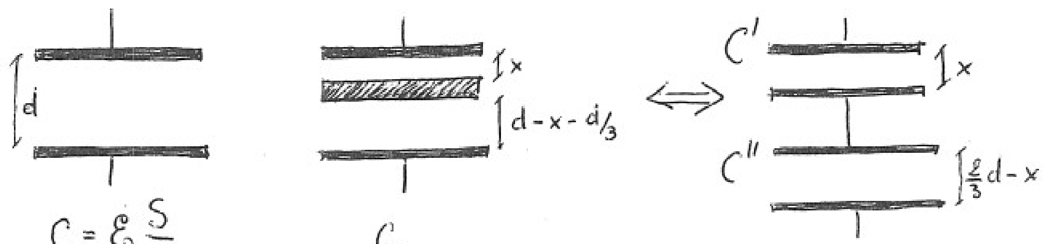
$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{x \cdot a \cdot a}{d} + \varepsilon_0 \frac{(1-x)\, a \cdot a}{d} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}\left[1 + x(\varepsilon_r - 1)\right]$$

La carica massima che può essere posta su un'armatura è quella corrispondente alla massima d.d.p. sostenibile, $V_{max} = E_a d$,

quindi $Q_{max} = C V_{max} = C E_a d = \varepsilon_0 a^2 E_a \left[1 + x(\varepsilon_r - 1)\right]$

Con i dati del problema, $Q_{max} = 10\ \mu C$.

4.3



$C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$ $\qquad$ C_1

$$C_1 = \frac{C'C''}{C'+C''}$$

$$C' = \varepsilon_0 \frac{S}{x} \ ; \ C'' = \varepsilon_0 \frac{S}{\frac{2}{3}d - x}$$

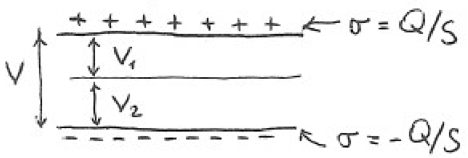
$$C_1 = \frac{C'C''}{C'+C''} = \frac{\cancel{\varepsilon_0 S}\frac{1}{x}\ \varepsilon_0 \frac{S}{\frac{2}{3}d - x}}{\cancel{\varepsilon_0 S}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{2}{3}d - x}\right)} =$$

$$= \varepsilon_0 S \frac{1}{(2/3)\, d} = \frac{3}{2} C = 1.5\ \mu F$$

4.4 $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r A/d$; $V = Ed \le E_r d \Rightarrow d \ge \frac{V}{E_r}$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A_{min} E_r}{V} \Rightarrow A_{min} = \frac{VC}{\varepsilon_0 \varepsilon_r E_r} = 10\ cm^2$$

4.5



$V = V_1 + V_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$

per legge di Gauss: $E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} = \frac{Q/S}{\varepsilon_1}$; $E_2 = \frac{Q/S}{\varepsilon_2}$

quindi $V = \frac{Q}{S}\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{Q}{S}\frac{d_2}{\varepsilon_2}$

$$C = \frac{Q}{V} = S \frac{1}{(d_1/\varepsilon_1) + (d_2/\varepsilon_2)} = \frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2} d_1 + \varepsilon_{r1} d_2} S \varepsilon_0$$

4.6 legge di Gauss $E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ per $r \ge R$; $E(r) = 0$ per $r < R$

$E(r)$ è massimo per $r = R \Rightarrow E_{max} = E(R) < E_r$

$\Rightarrow Q < Q_{max} = 4\pi\varepsilon_0 E_r R^2 = 7.5\ \mu C$

$$V = \frac{Q_{max}}{4\pi\varepsilon_0 R} = E_r R = 450\ kV$$

4.7 $V = Q/4\pi\varepsilon_0 R \Rightarrow Q = 4\pi\varepsilon_0 R V$.

per $r \ge R$, $E_0(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2 = VR/r^2$.

In prossimità della sfera $(r \simeq R)$ $E_0(R) \simeq V/R$; $w_s = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{V^2 \varepsilon_0}{2R^2}$

$$U = \int_0^\infty w(r) 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty \frac{1}{2}\varepsilon E(r) 4\pi r^2 dr = 2\pi\varepsilon_0 \int_R^\infty (VR/r^2)^2 r^2 dr = 2\pi\varepsilon V^2 R$$

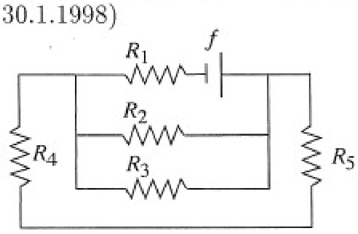
Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

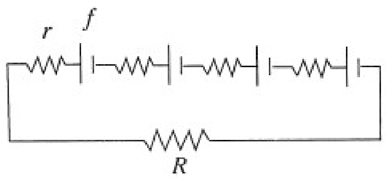
Foglio di Esercizi n. 5

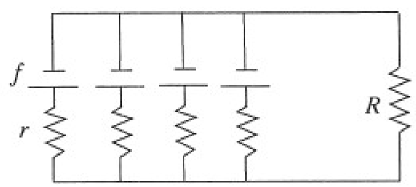
5.1. (**) La resistenza di una stufa elettrica di potenza $P = 600$ W, alimentata a $V = 220$ V (in corrente continua), è costituita da un lungo filo di tungsteno del diametro $d = 0.5$ mm. Sapendo che la resistenza del filo alla temperatura ambiente $T_0 = 15°\text{C}$ è $R_0 = 22\ \Omega$, calcolare: a) la temperatura del filo quando la stufa è accesa e opera in condizioni stazionarie (trascurare la dilatazione del filo); b) la potenza P_0 assorbita all'istante di accensione della stufa; c) la lunghezza l_0 del filo alla temperatura T_0. Dati: resistività del tungsteno $\rho_0 = 5.6 \times 10^{-8}\ \Omega\text{m}$ (a $T = T_0$); coefficiente termico $\alpha = 4.5 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$.
[Risposta: a) $T = 607.6°\text{C}$; b) $P_0 = V^2/R_0 = 2200$ W; c) $l_0 = R_0 \pi d^2/(4\rho_0) = 77.1$ m.]
(Es. n. 2 della prova scritta di Fisica Generale II del 30.1.1998)

5.2. (**) Con riferimento al circuito mostrato nella figura, calcolare la corrente nella resistenza R_4 e la differenza di potenziale ai capi della resistenza R_2, utilizzando i seguenti dati: $f = 25$ V; $R_1 = R_3 = 10\ \Omega$; $R_2 = R_5 = 5\Omega$; $R_4 = 20\ \Omega$.
[Risposta: $V_2 = 5.67$ V; $I_4 = 0.227$ A.]

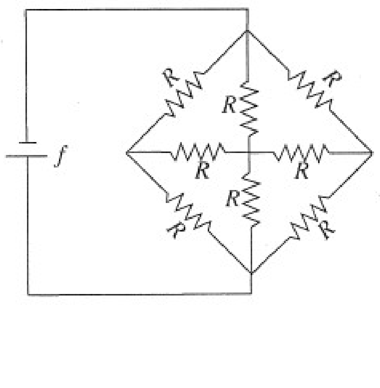


5.3. (*) Quattro pile aventi la stessa f.e.m. $f = 9$ V e la stessa resistenza interna $r = 1\ \Omega$, possono essere collegate tutte in serie o tutte in parallelo ad un resistore con $R = 10\ \Omega$ (vedi figura). Calcolare nei due casi la potenza P_{er} complessivamente erogata dai generatori e la potenza P_{car} trasferita sul carico R [Risposta: a) pile in serie: $P_{\text{er}} = 92.6$ W; $P_{\text{car}} = 66.1$ W; b) pile in parallelo: $P_{\text{er}} = 7.90$ W; $P_{\text{car}} = 7.71$ W.]





5.4. (**) Con riferimento al circuito mostrato nella figura, calcolare a) la resistenza equivalente R_{eq} della rete vista dal generatore, b) la potenza complessiva P trasferita dal generatore alla rete. Dati: $f = 6$ V; $R = 6\ \Omega$.
[Risposta: a) $R_{\text{eq}} = (2/3)R = 4\ \Omega$; b) $P = 9$ W.]



Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 5

5.1

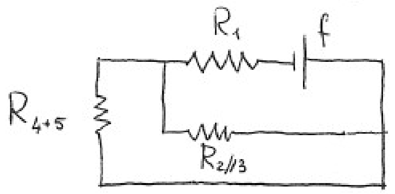
a) $P = VI = V^2/R \rightarrow R = V^2/P = 80.7\ \Omega$

$R = R_0[1+\alpha(T-T_0)] \rightarrow T = T_0 + \dfrac{R-R_0}{\alpha R_0} = 607.6\ ^\circ C$

b) $P_0 = \dfrac{V^2}{R_0} = \dfrac{220^2}{22} = 2200\ W$

c) $R_0 = \rho_0 l_0/S \rightarrow l_0 = R_0(\pi d^2/4)/\rho_0 = 77.1\ m$

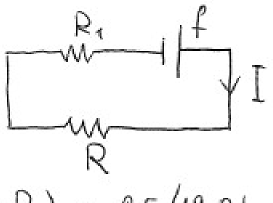
5.2 Il circuito in esame è equivalente al seguente:



$R_{4+5} = R_4 + R_5 = 25\ \Omega$

$R_{2//3} = \dfrac{1}{R_2^{-1} + R_3^{-1}} = 3{,}33\ \Omega$

e quindi a



con $R = \left[(R_{4+5})//(R_{2//3})\right] = \dfrac{1}{R_{4+5}^{-1} + R_{2//3}^{-1}} = 2.94\ \Omega$

$I = f/(R+R_1) = 25/12.94 = 1.93\ A$

$V_2 = V_{R_{2//3}} = V_R = IR = 1.93 \times 2.94 = 5.67\ V$

$I_4 = \dfrac{V_{4+5}}{R_{4+5}} = \dfrac{V_2}{R_{4+5}} = \dfrac{5.67}{25} = 0{,}227\ A$

5.3 a) pile in serie $\quad 4f = (4r+R)\,I \quad\quad I = 2.57\ A$

$P_{erogata} = 4fI = 92.6\ W$

$P_{carico} = RI^2 = 66.05\ W$

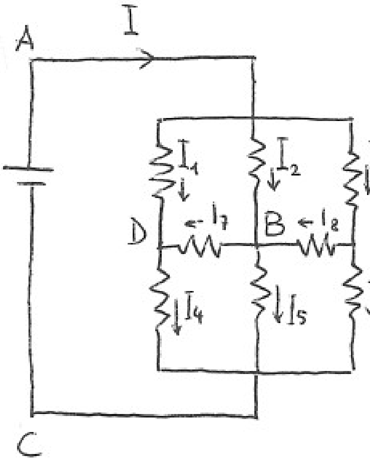
b) pile in parallelo ; I_R = corrente attraverso R

$$f - \frac{r}{4} I_R = R I_R \quad \rightarrow I_R = \frac{f}{R+\frac{r}{4}} = 0.878\ A$$

$P_{erogata} = 4f\,\frac{I_R}{4} = 7.90\,W$

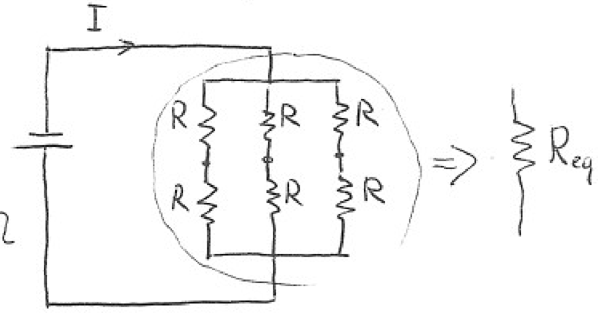
$P_{carico} = R I_R^2 = 7.71\ W$

5.4



I nodi D, B, E sono allo stesso potenziale $\Rightarrow\ I_7 = 0\ ;\ I_8 = 0$

Il circuito in esame equivale allora al seguente

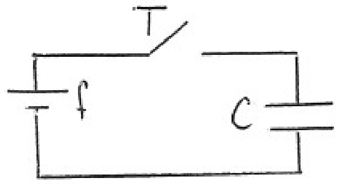


$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}} = \frac{2}{3}R = 4\Omega$$

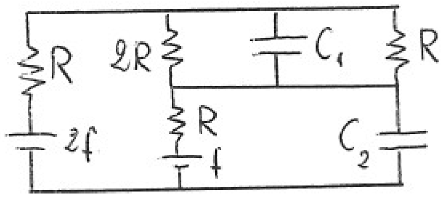
$I = f/\underset{\uparrow 4\Omega}{R_{eq}} = 1.5A \qquad\qquad P_{trasf} = R_{eq} I^2 = 4 \times 1.5^2 = 9\,W$

Foglio di Esercizi n. 6

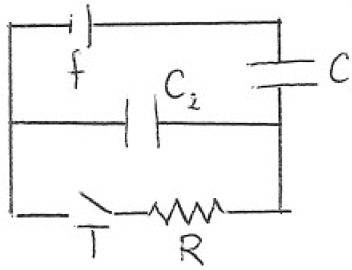
6.1. (**) La differenza di potenziale fra le armature di un condensatore di capacità C inizialmente è V_0. A un certo istante, chiudendo il tasto T, il condensatore viene collegato a un generatore di forza elettromotrice $f > V_0$. Per raggiungere la nuova condizione di equilibrio il generatore compie un lavoro L. Ricavare le espressioni della quantità di carica Δq fornita dal generatore al condensatore e il valore di V_0 in funzione di f, C e L. [Risposta: $\Delta q = L/f$; $V_0 = f - L/(Cf)$.] (Es. n. 2 della prova scritta di Fisica Generale II del 21.10.2000)



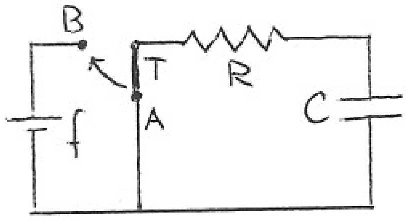
6.2. (**) Il circuito in figura è in regime stazionario. I due generatori sono ideali. Calcolare il rapporto Q_1/Q_2 fra le cariche di C_1 e $C_2 = 2C_1$. [Risposta: $Q_1/Q_2 = 1/11$.] (Es. n. 2 della prova scritta di Fisica Generale II del 28.1.1997)



6.3. (**) Nel circuito in figura, nel quale è trascurabile la resistenza interna del generatore, a partire dalla situazione di regime con l'interruttore T aperto, a un certo istante viene chiuso T. Ricavare l'espressione dell'energia U_{gen} erogata dal generatore dalla chiusura dell'interruttore fino al raggiungimento della nuova condizione di equilibrio.
[Risposta: $U_{gen} = (fC_1)^2/(C_1 + C_2)$.]
(Es. n. 3 della prova scritta di Fisica Generale II del 12.2.1999)



6.4. (**) Nel circuito in figura il condensatore è scarico quando, a $t = 0$, il tasto T viene spostato dalla posizione A a quella B. Dopo un intervallo di tempo ΔT il tasto viene riportato nella posizione A. Calcolare il valore della differenza di potenziale ai capi di C agli istanti $t = \Delta T/2$ e $t = 3\Delta T/2$. Dati: $C = 3\ \mu$F, $R = 2$ kΩ, $\Delta T = 4$ ms, $f = 20$ V.
[Risposta: $V(t = \frac{\Delta T}{2}) = f(1 - e^{-1/3}) = 5.7$ V;
$V(t = \frac{3\Delta T}{2}) = f(1 - e^{-2/3})e^{-1/3} = 6.9$ V.]
(Es. n. 2 della prova scritta di Fisica Generale II del 14.9.2000)



Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 6

6.1 $\quad L = f\Delta q \;^{(*)} \Rightarrow \Delta q = \dfrac{L}{f}$

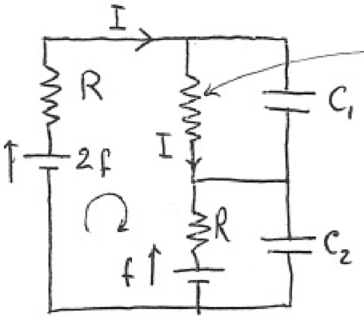
$$\underset{L/f}{\Delta q} = \underset{Cf}{q_{fin}} - \underset{CV_0}{q_0}$$

$$\frac{L}{f} = Cf - CV_0$$

$$V_0 = f - \frac{L}{Cf}$$

(*) Si ricordi che, per definizione, la f.e.m. di un generatore è l'energia che viene trasformata in energia elettrica per unità di carica che passa all'interno del generatore stesso.

6.2



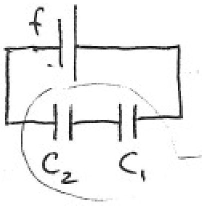
$$\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}} = \frac{2}{3}R$$

$$2f - f = \left(R + \tfrac{2}{3}R + R\right) I \quad \Rightarrow I = \frac{3}{8}\frac{f}{R}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1V_1}{C_2V_2} = \frac{C_1\frac{2}{3}RI}{C_2(f+RI)} = \frac{C_1}{2C_1}\,\frac{\frac{2}{3}R\frac{3}{8}\frac{f}{R}}{f+\frac{3}{8}f} = \frac{1}{11}$$

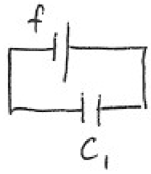
6.3

iniziale



$$C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

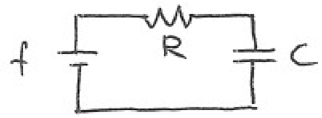
finale



$$q_{fin} = C_1 f$$

(*) $\quad U_{gen} = f\Delta q = f(q_{fin} - q_{iniz}) = f\,(C_1 f - C_{eq} f) = f^2\dfrac{C_1^2}{C_1+C_2}$

6.4. quando T è nella posizione B



$RC = 6\times10^{-3}\,s$

$f = 20\,V$

(1) $\quad 0 < t < \Delta T \qquad V_c = f\left(1 - e^{-t/RC}\right)$

(2) $\quad t = \Delta T \qquad V_c(\Delta T) = f\left(1 - e^{-\Delta T/RC}\right)$

(3) $\quad t \geqslant \Delta T \qquad V_c = \left[V_c(\Delta T)\right] e^{-(t-\Delta T)/RC}$

$t = \frac{\Delta T}{2} = 2\,ms \qquad V\left(\frac{\Delta T}{2}\right) = f\left(1 - e^{-1/3}\right) = 5.7\ V$

$t = \frac{3}{2}\Delta T = 6\,ms \qquad V\left(\frac{3}{2}\Delta T\right) = f\left(1 - e^{-2/3}\right)e^{-1/3} = 6.9\ V$

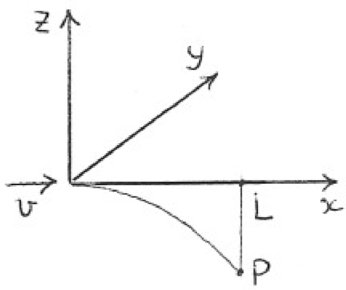
Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

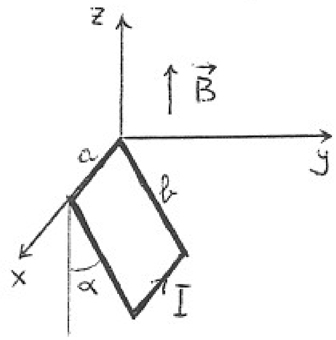
Foglio di Esercizi n. 7

7.1. (**) Un recipiente cilindrico di raggio interno $r = 2$ cm è immerso in un campo di induzione magnetica uniforme B_0 con le linee di forza parallele all'asse del cilindro stesso. Un elettrone ($m = 9 \times 10^{-31}$ kg) viene emesso da una sorgente posta sull'asse del cilindro con velocità puramente radiale, di modulo $v = 5 \times 10^7$ m/s. Determinare il valore minimo di B_0 che impedisce all'elettrone di arrivare sulla parete del cilindro. [Risposta: $B_0 > B_{0\min} = 2mv/(|q|r) = 0.028$ T.]
(Es. n. 2 della prova scritta di Fisica Generale II del 16.4.1998)

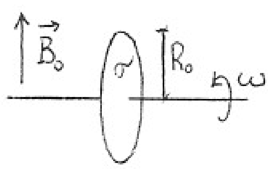
7.2. (**) Con riferimento alla figura, un elettrone con energia cinetica $\mathcal{E}$, che si muove lungo l'asse x, entra in una regione $0 \leq x \leq L$ in cui è presente un campo di induzione magnetica $\mathbf{B} = (0, B, 0)$. Determinare a) la coordinata z_P del punto P della traiettoria dell'elettrone per cui $x = L$; b) il valore delle tre componenti cartesiane della velocità nello stesso punto P. (Dati: massa dell'elettrone $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg; $\mathcal{E} = 10.24$ keV; $L = 10$ cm; $B = 1.7 \times 10^{-3}$ T. Utilizzare l'equivalenza 1 eV $= 1.6 \times 10^{-19}$ J)
[Risposte: a) $z_P = -2.69$ cm; b) $v_x = 5.2 \times 10^7$ m/s; $v_y = 0$; $v_z = -3 \times 10^7$ m/s.]



7.3. (**) Una spira rettangolare rigida, di lati $a = 10$ cm e $b = 20$ cm, massa $m = 2$ g e densità lineica di massa uniforme, percorsa da una corrente I, può ruotare attorno ad un asse orizzontale (vedi figura). Determinare il valore di I sapendo che in una regione di campo di induzione $B = 0.01$ T uniforme e verticale la spira si trova in condizioni di equilibrio in un piano che forma un angolo $\alpha = 30°$ con la verticale.
[Risposta: $I = mg \tan\alpha/2aB = 5.66$ A.]



7.4. (**) Con riferimento alla figura, un sottile disco di plastica, di raggio R_0, è carico con densità superficiale di carica σ costante e uniforme, e viene mantenuto in rotazione attorno al proprio asse con velocità angolare ω costante. Esso è immerso in un campo di induzione magnetica $\mathbf{B}_0$ costante e uniforme, perpendicolare all'asse di rotazione. Si determini il modulo M del momento meccanico (causato dall'interazione fra campo magnetico e corrente) che agisce sul disco.



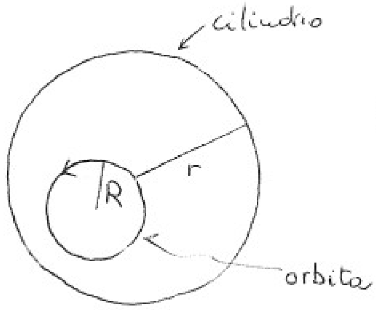
(Si suggerisce di considerare la superficie del disco costituita da infinite corone circolari di spessore infinitesimo. A causa della rotazione del disco, ciascun anello, visto da un sistema di riferimento fisso, equivale ad una spira in cui circola corrente.)
[Risposta: $M = \frac{\pi}{4}\sigma\omega B_0 R_0^4$] (Es. n. 3 della prova scritta di Fisica Generale II del 14.6.2000)

Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 7

7.1

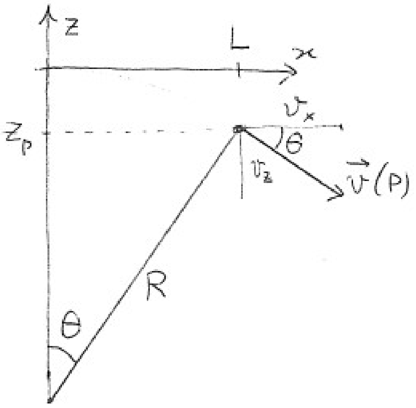


forza di Lorentz

$$\frac{mv^2}{R} = |q|\, v B_0 \Rightarrow R = \frac{mv}{|q| B_0}$$

$$2R < r \Rightarrow B_0 > \frac{2mv}{|q| r} = 0.028\ \mathrm{T}$$

7.2



$R = \frac{mv}{|q|B}$, come nell'es. precedente

$v = \sqrt{2\mathcal{E}/m} = 6\times10^7\ \mathrm{m/s}$; $R = 0.2\ \mathrm{m}$

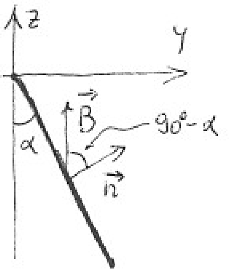
$\theta = \arcsin\frac{L}{R} = 30°$

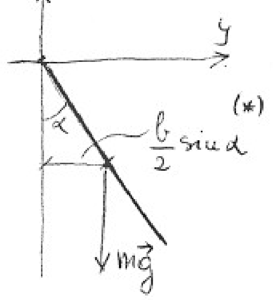
$z_p = -(R - R\cos\theta) = -R(1-\cos\theta) = -2.69\ \mathrm{cm}$

$v_x = v\cos\theta = 5.2\times10^7\ \mathrm{m/s}$

$v_y = 0$; $v_z = -v\sin\theta = -3\times10^7\ \mathrm{m/s}$

7.3





equilibrio: $|\vec{\mathcal{M}}_{\vec{B}}| = |\vec{\mathcal{M}}_{peso}|$

$mg\frac{b}{2}\sin\alpha$

$|\vec{m}\times\vec{B}| = iab\, B\sin(90°-\alpha)$

$$I a \cancel{b} B\cos\alpha = \frac{\cancel{b}}{2}\sin\alpha\, mg$$

$$I = \frac{mg}{2aB}\,\mathrm{tg}\,\alpha = 5.66\ \mathrm{A}$$

7.4 $$|\vec{\mathcal{M}}| = \left|\int d\vec{\mathcal{M}}\right| = \left|\int d\vec{m} \times \vec{B}_0\right| = \int dm\, B_0$$

per ciascuna "spira" elementare in cui si suddivide il disco

perché $\vec{dm} \perp \vec{B}_0$ per tutte le spire

"spira" elementare = corona circolare con raggio compreso fra r e r+dr

in una spira circola corrente $di = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\sigma\, 2\pi r dr}{T} = \sigma\omega r dr$

periodo di rotazione ($T = 2\pi/\omega$)

$d\vec{m} = di \cdot S\ \vec{n}$

sezione della spira ($S = \pi r^2$)

$dm = di \cdot \pi r^2$

$$|\vec{\mathcal{M}}| = \int_0^{R_0} \sigma\omega r\, \pi r^2 B_0\, dr = \sigma\omega\pi B_0 \frac{R_0^4}{4}$$

Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

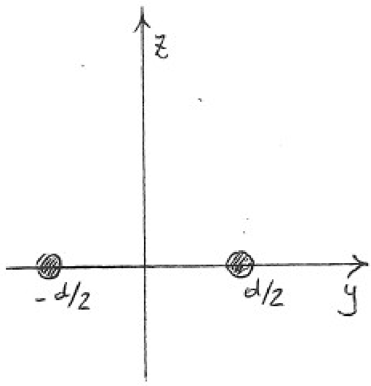
Foglio di Esercizi n. 8

8.1. (**) Una corrente $I = 50$ mA scorre all'interno di un filo conduttore sagomato a forma di triangolo equilatero con lati di lunghezza $l = 20$ cm, posto nel piano $z = 0$. Ricavare direzione, verso e modulo dell'induzione magnetica al centro del triangolo.
[Risposta: $B_x = B_y = 0$; $B_z = (9\mu_0 I)/(2\pi l) = 4.45 \times 10^{-7}$ T.]
(Es. n. 3 della prova scritta di Fisica Generale II del 14.9.2000)

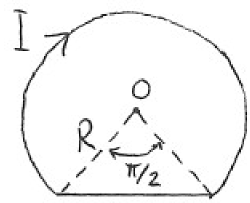
8.2. (**) Dati due fili rettilinei indefiniti, paralleli all'asse x, distanti fra loro d e percorsi dalla stessa corrente I, concorde all'asse x,
a) determinare l'espressione dell'induzione magnetica $\mathbf{B_0}$ lungo l'asse dei due fili (asse z in figura);
b) in quale punto di tale asse il modulo di $\mathbf{B_0}$ assume valore massimo?
c) Calcolare tale valore massimo.
[Risposta: a) $\mathbf{B_0}(x, y = 0, z) \equiv (0, B_y, 0)$, con

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{z}{z^2 + (d^2/4)};$$

b) $|B_y|$ è massimo per $z = \pm d/2$;
c) $|B_y(x, x = 0, z \pm \frac{d}{2})| = \mu_0 I/\pi d$.]



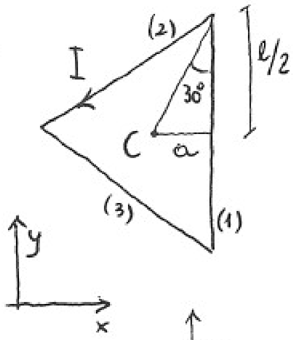
8.3. (**) Un sottile filo conduttore è sagomato (vedi figura) in modo da formare un arco di circonferenza di centro O, raggio R ed angolo al centro di $3\pi/2$ radianti, raccordato ad un tratto rettilineo che chiude il circuito. Nel circuito, posto nel vuoto, scorre una corrente stazionaria I. Ricavare l'espressione del campo di induzione magnetica $\mathbf{B_0}$ nel punto O.
[Risposta: $\mathbf{B_0}(O)$ è normale al piano della spira ed entrante nel foglio; il suo modulo vale $B_0(O) = \frac{\mu_0 I}{R}\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2\pi}\right)$]
(Es. n. 3 della prova scritta di Fisica Generale II del 13.2.1997, II turno)



8.4. (**) In un solenoide rettilineo, da pensarsi infinitamente lungo, con n di spire per unità di lunghezza, circola una corrente elettrica I. Sull'asse del solenoide si trova un filo conduttore indefinito, percorso da una corrente $I_f = I$. Le linee di forza del campo di induzione magnetica $\mathbf{B_0}$ all'interno del solenoide sono elicoidali. Si determini l'espressione del passo p dell'elica in funzione della distanza R dall'asse del solenoide.
[Risposta: $p = 4\pi^2 n R^2$]

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 8

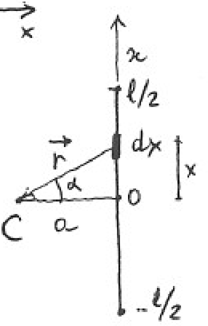
8.1



$$a = \frac{l}{2}\,tg\,30° = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

$\vec{B}$ è diretto ortogonalmente al piano della spira, uscente se la corrente circola come in figura.

$$B_x = B_y = 0 \; ; \qquad B_z(C) = 3\underbrace{B_z^{(1)}(C)}_{\text{induzione generata dal filo (1)}}$$



$r = a/\cos\alpha$

$x = a\,tg\,\alpha$

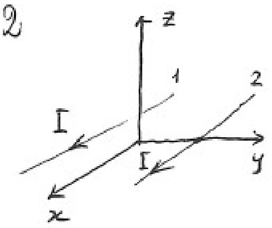
$dx = a\,d\alpha/\cos^2\alpha$

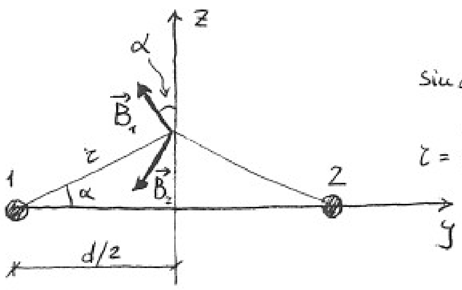
$$B_z^{(1)}(C) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{lato(1)} \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx\; r\sin(\pi/2-\alpha)}{r^3} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{(a/\cos^2\alpha)\,d\alpha\,\cos\alpha}{(a/\cos\alpha)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\sin\alpha\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{3}{2}\,\frac{\mu_0 I}{\pi l}$$

$$B_z(C) = 3\,B_z^{(1)}(C) = \frac{9\mu_0 I}{2\pi l} = 4.45\times 10^{-7}\ T$$

8.2





$\sin\alpha = \frac{z}{r}$

$r = \sqrt{z^2 + d^2/4}$

$$\vec{B}(x, y=0, z) \equiv (0,\, 2B_{1y},\, 0)$$

a) $$B_y(x,y=0,z) = -\frac{2\mu_0 I}{2\pi r}\sin\alpha = -\frac{2\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{z}{r^2} = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\,\frac{z}{(z^2+d^2/4)}$$

b) $$\frac{dB_y(x,y=0,z)}{dz} = 0 \qquad -\frac{\mu_0 I}{\pi}\,\frac{z^2+d^2/4-2z^2}{(z^2+d^2/4)} = 0 \quad \Rightarrow |B_y(x,y=0)| \text{ è max per } z = \pm\frac{d}{2}$$

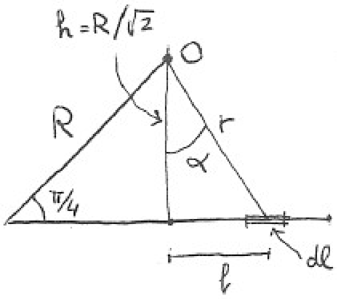
c) $$\left|B_y(x,y=0,z=\pm\tfrac{d}{2})\right| = \frac{\mu_0 I\, d/2}{\pi\, 2\,(d/2)^2} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}$$

8.3 $\vec{B}_o(O) = \vec{B}_o(O)_{(\text{arco})} + \vec{B}_o(O)_{(\text{segmento})}$

Entrambi i contributi sono normali al piano della spira, ed entranti

$$B_o(O)_{\text{arco}} = \frac{\mu_o}{4\pi} I \int_{\text{arco}} \frac{d\ell \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{(R\,d\alpha)\,R}{R^3} = \frac{\mu_o I}{4\pi R} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} d\alpha = \frac{3}{8} \frac{\mu_o I}{R}$$

$$B_o(O)_{\text{segm}} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{\text{segmento}} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} =$$



$h = R/\sqrt{2}$

$\ell = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$

$r = h/\cos\alpha$

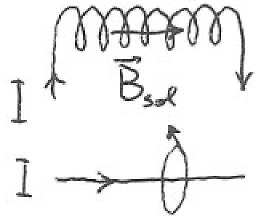
$d\ell = \dfrac{h\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$= \frac{\mu_o I}{4\pi} \int \frac{d\ell\; r\; \sin(\pi/2 - \alpha)}{r^3} =$$

$$= \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(h\,d\alpha/\cos^2\alpha)\cos\alpha}{(h/\cos\alpha)^2} =$$

$$= \frac{\mu_o I}{4\pi h} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_o I}{4\pi h}\sqrt{2} = \frac{\mu_o I}{2\pi R} \quad \Rightarrow B_o(O) = \frac{\mu_o I}{R}\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2\pi}\right)$$

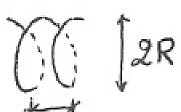
8.4



$|B_{sol}| = \mu_o n I$

$|B_{filo}| = \dfrac{\mu_o I}{2\pi R}$ (legge di Biot-Savart)

$\vec{B}_{sol} + \vec{B}_{filo}$:



$\dfrac{|B_{sol}|}{|B_{filo}|} = \dfrac{p}{2\pi R}$

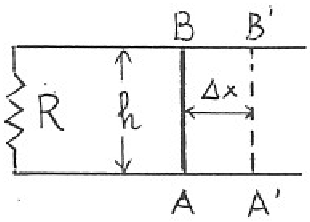
$$\Rightarrow p = 2\pi R\, |B_{sol}|/|B_{filo}| = 4\pi^2 n R^2$$

Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

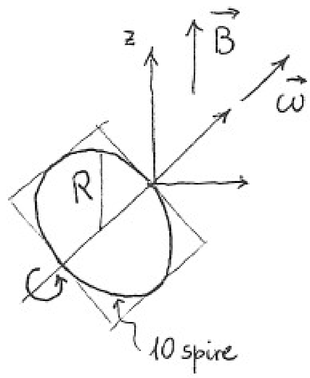
Foglio di Esercizi n. 9

9.1. (**) Il circuito in figura è immerso in un campo di induzione magnetica $\mathbf{B}_0$, uniforme e ortogonale al piano del circuito. Il tratto di circuito AB viene portato strisciando nella posizione $A'B'$. Calcolare la carica che circola nel circuito a seguito di questo spostamento. Dati $B_0 = 1$ T; $R = 1$ kΩ; $h = 1$ m; $\Delta x = 10$ cm.
[Risposta: $q = B_0 h \Delta x / R = 10^{-4}$ C.]



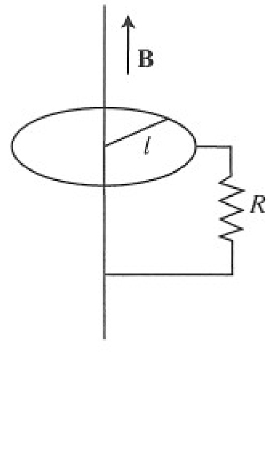
9.2. (**) Una spira circolare rigida di raggio $r = 10$ cm, è costituita da un filo di rame (resistività $\rho = 1.7 \times 10^{-8}$ Ωm) di sezione $S = 0.5$ mm^2 ed è immersa in un campo di induzione $B = 1$ T, uniforme e normale al piano della spira. Il campo B viene poi rapidamente portato a zero. Calcolare la carica elettrica che fluisce nella spira durante il processo transitorio appena descritto.
[Risposta: $q = BrS/2\rho = 1.47$ C.]

9.3. (**) Con riferimento alla figura, una bobina piana circolare, costituita da $N = 10$ spire di raggio $R = 10$ cm, immersa in un campo di induzione magnetica uniforme $B = 1$ T, ruota uniformemente (con periodo $T_r = 0.02$ s) attorno ad un suo diametro, normale alla direzione del campo di induzione. Ricavare l'espressione della forza elettromotrice indotta nella bobina in funzione del tempo, sapendo che all'istante $t = 0$ il piano della bobina è parallelo a $\mathbf{B}$ (indicare il verso di percorrenza della spira scelto come positivo per definire il segno della f.e.m.)
[Risposta: scegliendo come verso positivo quello di rotazione di una vite destra che avanza nel verso positivo dell'asse x, $f = -f_{\max} \cos[(2\pi/T_r)t]$, con $f_{\max} = NB2\pi^2R^2/T_r = 98.7$ V.]



9.4 (**) Un circuito piano di area $S = 10$ cm^2 e resistenza elettrica $R = 20$ Ω ruota con velocità angolare costante $\omega = 200$ rad/s in un campo di induzione magnetica costante e uniforme di modulo $B_0 = 0.5$ T, per azione di una coppia applicata. L'asse di rotazione giace nel piano del circuito ed è perpendicolare alle linee di forza di $\mathbf{B}$. Calcolare il momento $\mathbf{M}$ della coppia applicata per mantenere la spira in rotazione. Si trascuri l'autoinduzione.
[Risposta: $\mathbf{M} = M_0 \sin^2(\omega t)\hat{\omega}$, dove $\hat{\omega}$ è il versore di ω e $M_0 = B_0^2 S^2 \omega / R = 2.5 \times 10^{-6}$ Nm.]
(Es. n. 3 della prova scritta di Fisica Generale II del 5.6.1998)

9.5. (**) Una barretta conduttrice di lunghezza $l = 10$ cm ruota con velocità angolare $\omega = 100$ s^{-1} attorno ad un asse perpendicolare alla barretta stessa e passante per un suo estremo, ed è immersa in un campo d'induzione parallelo all'asse di rotazione e di modulo $B = 2$ T. L'altro estremo della barretta striscia su un contatto circolare. Fra un punto dell'asse ed uno del contatto circolare è inserita una resistenza $R = 9$ Ω. Sapendo che la resistenza di barretta e contatti è $r = 1$ Ω, calcolare a) la corrente che circola in R; b) l'energia meccanica trasformata in energia elettrica nell'intervallo di tempo in cui nel circuito passa una carica $q = 1$ μC. [Risposta: a) $i = \omega B l^2/[2(r+R)] = 0.1$ A; b) $E = 1$ μJ.]



Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 9

9.1 $$|q| = \left|\int_0^\infty i\,dt\right| = \left|\int_0^\infty -\frac{1}{R}\frac{d\phi(B)}{dt}\,dt\right| = \frac{1}{R}\left|\phi_{finale} - \phi_{iniz}\right| = \frac{1}{R}B_0 h \Delta x = 10^{-4}\,C$$

9.2 $$q = \int_0^\infty i\,dt = \int_0^\infty -\frac{(d\phi/dt)}{R}\,dt = -\frac{1}{R}\int_{\phi_{iniziale}}^{\phi_{finale}} d\phi = \frac{\phi_{iniziale} - \phi_{fin}}{R} = \frac{\phi_{iniziale}}{R}$$

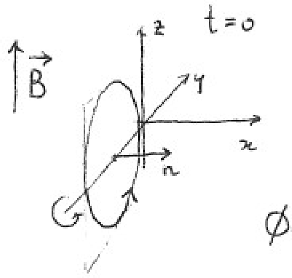
resistenza della spira

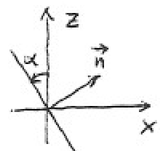
$$R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{2\pi r}{S}$$

$$\phi_{iniziale} = B\pi r^2$$

$$\longrightarrow \quad q = \frac{B\pi r^2}{2\rho\pi r}S = \frac{BrS}{2\rho} = 1.47\ C$$

9.3



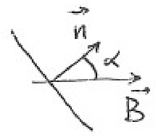


$$\alpha = \omega t = \frac{2\pi}{T_r}t$$

$$\phi(t) = N\,\vec{B}\cdot\vec{n}(t)\,\pi R^2 = NB\sin\alpha\ \pi R^2$$
$$= NB\pi R^2\sin\omega t$$

$$f = -\frac{d\phi}{dt} = -NB\omega\pi R^2\cos\omega t \qquad f_{MAX} = NB\frac{2\pi^2}{T_r}R^2 = 98.7\ V$$

9.4 $i = -\frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}(B_0 S \cos\omega t) = \frac{B_0}{R} S\omega \sin\omega t$



$\alpha = \omega t$

$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0 = iS\,\vec{n} \times \vec{B}_0 = (iSB_0 \sin\omega t)\,\hat{\omega} =$

$= \underline{(B_0^2 S^2 \omega / R)} \sin^2\omega t\,\hat{\omega} \longrightarrow 2.5 \times 10^{-6}$ Nm

---

9.5 A causa della rotazione della barretta, una carica q su di essa è soggetta alla forza di Lorentz, diretta lungo la barretta stessa e di modulo pari a $F = qvB$; ad essa corrisponde un campo elettrico $E = vB = \omega rB$. Sulla barretta si induce quindi una forza elettromotrice

$$f_i = \int_{\text{barretta}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l \omega r B dr = \frac{\omega B l^2}{2} = \frac{100 \times 2 \times 10^{-2}}{2} = 1 \text{ V}.$$

a) Per la legge di Ohm, nel circuito di resistenza $r + R$ circola una corrente

$$I = \frac{f_i}{r + R} = \frac{1}{1 + 9} = 0.1 \text{ A}.$$

b) L'energia meccanica trasformata in energia elettrica è pari al lavoro compiuto dalla forza elettromotrice; si ha quindi

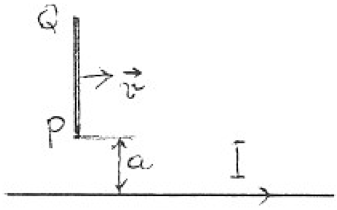
$$E = L = f_i q = 1 \times 10^{-6} = 1\ \mu\text{J}.$$

Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

Foglio di Esercizi n. 10

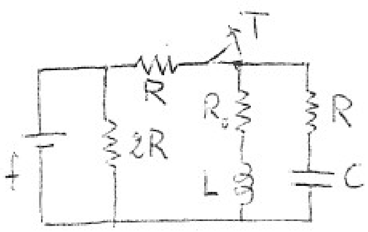
10.1. (**) Una sbarretta conduttrice PQ, di lunghezza L, si muove di moto traslatorio con velocità costante $\mathbf{v}$, mantenendosi perpendicolare ad un filo rettilineo percorso da una corrente stazionaria I. Sia a la distanza dell'estremo P della barretta dal filo. Ricavare l'espressione della differenza di potenziale ΔV che si stabilisce fra gli estremi della sbarretta.



[Risposta: $\Delta V = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$.]
(Es. n. 4 - Fisica II per Ing. Civ. del 16.11.2001.)

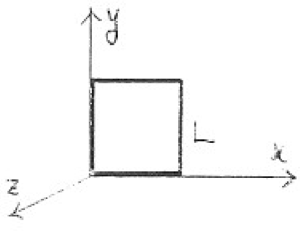
10.2. (**) Una spira circolare di raggio $a = 1$ cm è percorsa da una corrente $i = i_0 \cos(\omega t)$, dove $\omega = 10^4$ rad/s e $i_0 = 1$ A. Ricavare l'espressione della corrente indotta in una seconda spira, di raggio $b = 1$ m, complanare e concentrica con la prima, e avente una resistenza $R = 1\ \Omega$. Calcolare inoltre il valore numerico della corrente stessa al tempo $t = \pi/(2\omega)$.
(Suggerimenti: a) per calcolare il flusso concatenato con la spira di raggio b, utilizzare il coefficiente di mutua induzione fra i due circuiti; b) per calcolare quest'ultimo, notare che, essendo $a \ll b$, possiamo considerare costante, e pari al valore al centro della spira, il campo generato nel cerchio delimitato dalla spira di raggio a da una corrente che circola nella spira di raggio b.)
[Risposta: a) $i_{i(b)}(t) = i_0\omega\mu_0\frac{\pi a^2}{2bR}\sin(\omega t)$; b) $i_{i(b)}(t = \frac{\pi}{2\omega}) = 2\ \mu$A.]
(Es. n. 4 della prova scritta di Fisica Generale II del 16.4.1998)

10.3. (**) Il circuito in figura è in condizioni stazionarie quando viene aperto l'interruttore T. Sapendo che nel transitorio che segue l'apertura dell'interruttore, sulla resistenza R_0 viene dissipata un'energia E, calcolare la capacità C del condensatore. Dati: $E = 2.5 \times 10^{-5}$ J; $f = 20$ V; $R = R_0 = 50\ \Omega$; $L = 10^{-3}$ H.



[Risposta: $C = (16E/f^2) - (L/R^2) = 0.6\ \mu$F.]
(Es. n. 3 della prova scritta di Fisica Generale II del 15.6.1998)

10.4. (**) Un'onda elettromagnetica piana, polarizzata linearmente, si propaga nel vuoto, con lunghezza d'onda $\lambda = 20$ cm e campo di induzione magnetica descritto, in un riferimento cartesiano, da $B_z = B_0 \cos(kx - \omega t)$, dove t è il tempo e $B_0 = 1$ nT. Si chiedono il valore massimo e l'andamento temporale della corrente indotta in una spira quadrata di lato $L = \lambda/2$, disposta nel piano x-y come indicato in figura, e avente resistenza $R = 60\ \Omega$.



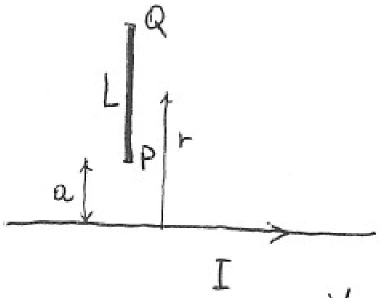
[Risposta: $i_{max} = B_0 c\lambda/R = 1$ mA; $i = -i_{max}\cos(\omega t)$; c: velocità della luce.]
(Es. A.3 della prova scritta di Elettromagnetismo del 5.12.2001.)

Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 10

10.1



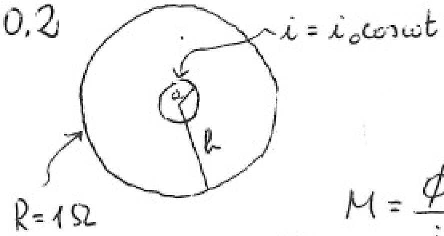
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \text{(Biot e Savart)}$$

$$F = q v B(r)$$

$$E(r) = \frac{F}{q} = v B(r)$$

$$\Delta V = |V(Q) - V(P)| = \left| \int_a^{a+L} E(r)\, dr \right| = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

10.2



$$i_{i(b)} = -\frac{1}{R}\frac{d\phi_b}{dt} = -\frac{1}{R} M \frac{di}{dt} = i_0 \frac{\omega}{R} M \sin\omega t$$

$$M = \frac{\phi_a}{i_b} =$$

flusso concatenato con a, causato da una corrente i_b in b

$$M \cong \frac{\pi a^2 \left(\frac{\mu_0 i_b}{2b}\right)}{i_b} = \mu_0 \frac{\pi a^2}{2b}$$

valore di $|\vec{B}|$ al centro della spira. Poiché $a \ll b$ posso supporre $\simeq$ costante all'interno della spira "a"

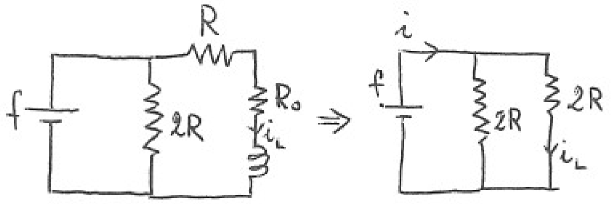
Quindi $i_{i(b)} = \boxed{i_0 \omega \mu_0 \frac{\pi a^2}{2bR}} \sin\omega t \rightarrow 2\mu A$

$$i_{i(b)}\left(t = \frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{i_0 \omega \mu_0 \pi a^2}{2bR} = 2\mu A$$

10.3 a interruttore chiuso, in condiz. stazionarie

Energia immagazzinata in L e C: $E_{TOT} = \frac{1}{2} L i_L^2 + \frac{1}{2} C V_c^2$

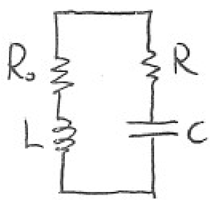
corrente in L   d.d.p. ai capi di C



$$\Rightarrow i_L = \frac{i}{2} = \frac{f}{2R}$$

$$V_c = f - R i_R = \frac{f}{2}$$

a interruttore chiuso



con $R = R_o \Rightarrow E_{dissipata} = E_{TOT} = 2E$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} E_{TOT} = \frac{1}{16} f^2 \left(\frac{L}{R^2} + C \right)$$

$$C = \frac{16E}{f^2} - \frac{L}{R^2} = 6 \times 10^{-7} \, F = 0.6 \, \mu F$$

10.4 Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz $\quad f_i = -\frac{d\phi(B)}{dt} \; ; \; i_i = \frac{f_i}{R}$

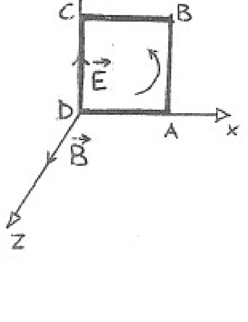
$$\phi(B) = L \int_0^{L=\lambda/2} B_o \cos(Kx - \omega t) dx = \frac{LB_o}{K} \left[\sin(Kx - \omega t) \right]_0^{\lambda/2} =$$

$$= \frac{LB_o}{K} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} - \omega t \right) - \sin(-\omega t) \right] = \frac{2 L B_o}{K} \sin \omega t = \frac{\lambda B_o}{K} \sin\omega t$$

$$f_i = -\lambda B_o \frac{\omega}{K} \cos\omega t = -\lambda B_o c \cos\omega t$$

$$i_i = \frac{f_i}{R} = -i_{Max} \cos\omega t \quad , \quad \text{con} \quad i_{Max} = B_o c \lambda / R = 1 \, mA$$

Soluzione alternativa: $\quad f_i = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \vec{E} = E_y \hat{j} = B_z c \, \hat{j} = B_o c \cos(Kx - \omega t) \, \hat{j}$



quindi $f_i = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} = L E_y(x = \frac{\lambda}{2}) - L E_y(x = 0) =$

$$= L B_o c \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} - \omega t \right) - L B_o c \cos(-\omega t) =$$

$$= \underset{\lambda/2}{L} B_o c \left[-\cos(\omega t) - \cos\omega t \right] = -\lambda B_o c \cos\omega t ,$$

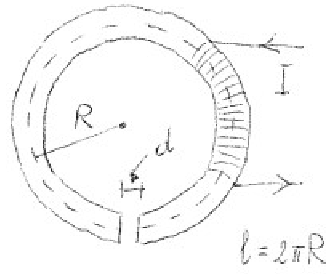
etc

Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

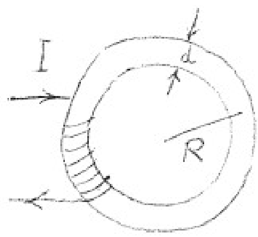
A cura del Prof. S. Atzeni

Foglio di Esercizi n. 11

11.1. (**) Un elettromagnete toroidale (vedi figura) è costituito da un nucleo di ferro (con $\mu_r = 5000$, costante), di lunghezza (media) $l = 1$ m e sezione circolare di area $S = 100$ cm^2, e da un avvolgimento di $N = 1000$ spire, attraverso cui scorre una corrente I. Calcolare
a) il valore di I affinché nel traferro di spessore $d = 2$ cm si abbia un campo di induzione magnetica $B = 1$ T;
b) la potenza dissipata nell'avvolgimento, sapendo che esso è costituito da un filo di rame di raggio $r = 0.5$ mm e resistività $\rho = 1.7 \times 10^{-8}$ Ωm.
[Risposta: a) $I = 16.1$ A; b) $P = 1990$ W.]



11.2. (**) Su un anello di ferro di raggio medio $R = 20$ cm, (con $d \ll R$, vedi figura), sono avvolte $N = 100$ spire. Si determini la permeabilità relativa del ferro, sapendo che l'intensità di magnetizzazione è $M = 2 \times 10^5$ Aspire/m e che nelle spire scorre una corrente $I = 0.5$ A.
[Risposta: $\mu_r = 1 + [(2\pi MR)/(NI)] \simeq 5000.$]
(Es. n. 3 della prova scritta di Fis. Gen. II del 21.10.2000)



11.3. (**) Su un anello di ferro a forma di toro, con raggio mediano $R = 10$ cm e sezione circolare, sono avvolte $N = 314$ spire, in cui circola una corrente continua $I = 2$ A. Calcolare l'intensità di magnetizzazione nell'anello, sapendo che la permeabilità relativa del ferro è $\mu_r = 1000$.
[Risposta: $M = (\mu_r - 1)NI/(2\pi R) = 10^6$ Aspire/m]
(Es. A.2 della prova scritta di Elettromagnetismo del 18.12.2001)

Fisica II - C. L. Ing. Aerospaziale

A cura del Prof. S. Atzeni

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 11

11.1 Per la legge di Hopkinson $NI = \mathcal{R}\phi$ $\quad \phi \simeq BS$

$\mathcal{R}$ = riluttanza = $\mathcal{R}_{magnete} + \mathcal{R}_{traferro} = \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{d}{\mu_0 S}$

$$I = \frac{\mathcal{R} BS}{N} = \frac{B\ell}{N\mu_0\mu_r}\left(1 + \frac{d}{\ell}\mu_r\right) = 16.1 \text{ A}$$

$$P_{Joule} = R I^2 = \rho \frac{\ell_{filo}}{S_{filo}} I^2 = \rho \frac{2\pi (S/\pi)^{1/2} N}{\pi r^2} I^2 \simeq 1990 \text{ W}$$

11.2. $\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} \Rightarrow \mu_r = 1 + (M/H)$

Si applica il teorema della circuitazione: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = Ni$,

da cui $H \cdot 2\pi R = NI \Rightarrow H = NI/2\pi R$

$$\mu_r = 1 + \frac{2\pi M R}{NI} \simeq 5000$$

11.3 Le relazioni $B = \mu_0 (H + M)$ e $B = \mu_r \mu_0 H$,

consentono di scrivere

$$M = (\mu_r - 1) H. \qquad (1)$$

Inoltre, dal teorema della circuitazione, $NI = H\ell$,

abbiamo $H = NI/\ell = NI/2\pi R$, che sostituito nell'Eq. (1)

conduce all'espressione finale

$$M = (\mu_r - 1)\frac{NI}{2\pi R} \simeq 10^6 \text{ Aspire/m}$$