

Si consideri l'integrale doppio in $Q_R \doteq (-R, R) \times (-R, R)$

$$I_{Q_R} \doteq \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-R}^R e^{-y^2} dy \right) = (I_R)^2$$

dove $I_R \doteq \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$. Si noti che se $R \rightarrow +\infty$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = (I_\infty)^2, \quad I_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

dove l'ultimo integrale improprio, ovviamente, esiste.

Poiché l'integrandolo è positivo si ha che:

$$I_{B_R} \leq I_{Q_R} \leq I_{B(\sqrt{2}R)}$$

$$\text{dove } I_{B_R} = \iint_{B_R} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

$$\text{e } B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Si noti che $|I_{B(\sqrt{2}R)} - I_{B_R}| \leq e^{-R^2} \pi R^2 \rightarrow 0$

quando $R \rightarrow +\infty$. Ne consegue che, se il limite per $R \rightarrow +\infty$ esiste,

$I_{B_{\sqrt{2}R}}$ e I_{B_R} hanno lo stesso limite e, quindi, per il teorema del confronto, lo stesso vale per I_{Q_R} .

Tuttavia, passando alle coordinate polari:

$$I_{B_R} = \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq R}} e^{-\rho^2} d\rho d\theta = 2\pi \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho =$$

$$= -\pi e^{-\rho^2} \Big|_0^R = \pi (1 - e^{-R^2}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \pi.$$

Ne consegue che:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_{Q_R} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$$

e quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Perciò, per esempio, la distribuzione di probabilità gaussiana è $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$, in modo tale che il suo integrale su $\mathbb{R}$ sia 1.