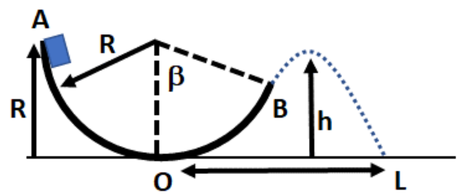
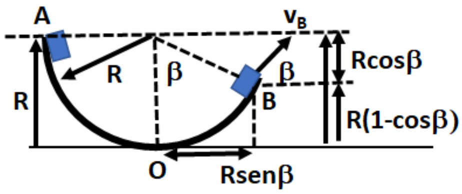
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2024-2025
Ingegneria Gestionale (L-Z)
Esonero del 5 Maggio 2025 – I turno – Testo e Soluzioni



1. Testo. Un blocco viene lasciato cadere dal punto A lungo una guida cilindrica liscia di raggio R=2m. Il blocco passa per l'origine O alla quota minima. Successivamente il blocco raggiunge il punto terminale della guida cilindrica B (β=60°) a partire dal quale il blocco prosegue in un volo libero per effetto della gravità. Determinare l'altezza massima h raggiunta durante il volo e la gittata L nel punto di ricaduta al suolo.

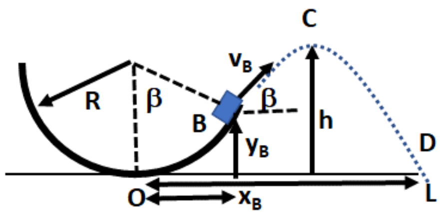
1. Soluzione.



1a) Velocità acquisita nel punto terminale della guida B
Poiché il blocco percorre tutta la guida liscia, in assenza di attriti è possibile imporre la conservazione dell'energia meccanica fra gli estremi della guida A e B:

Energia meccanica nel punto **A** (solo potenziale): $E_{mA} = U_A = mgR$
Energia meccanica nel punto **B**: $E_{mB} = m\, v_B^2/2 + mgR(1 - cos\beta)$

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ricava
la velocità nel punto B $v_B = \sqrt{2gRcos\beta}$= **4.43 m/s**



1b) Studio della cinematica del volo libero
Nell'istante in cui il blocco lascia la guida nel punto B di coordinate [**x_B=Rsenβ=1.73m; y_B=R(1-cosβ)=1m**] rispetto ad O inizia un volo libero parabolico per effetto della sola accelerazione di gravità. Scomponendo le grandezze cinematiche lungo gli assi orizzontale (x) e verticale (y) si ottiene:

$$asse\ x \begin{cases} x = Rsen\beta + v_B t cos\beta \\ v_x = v_B cos\beta \\ a_x = 0 \end{cases} ;\ asse\ y \begin{cases} y = R(1 - cos\beta) + v_B t sen\beta - gt^2/2 \\ v_y = v_B sen\beta - gt \\ a_y = -g \end{cases}$$

Dove il tempo è misurato a partire dal punto B. Il **tempo di volo t_C** per raggiungere il punto C di massima quota si ottiene annullando la componente ascensionale della velocità **v_y=0** da cui
$t_C = \frac{v_B sen\beta}{g} = \frac{\sqrt{2gRcos\beta}\cdot sen\beta}{g}$ =**0.39 s**

Inserendo il tempo t_C nella equazione y si ottiene la **massima quota h**=y(t_C) come segue:
$$h = y(t_C) = R(1 - cos\beta) + \frac{v_B^2 sen^2\beta}{g} - \frac{v_B^2 sen^2\beta}{2g} = R(1 - cos\beta) + \frac{v_B^2 sen^2\beta}{2g} = 1m + 0.75m$$
oppure con ulteriori passaggi algebrici
$h = R(1 - cos\beta) + R\, cos\beta sen^2\beta = R(1 - cos^3\beta) = R\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = \frac{7}{8}R$ =**1.75 m**

Il **tempo di volo complessivo t_D** (quando cioè il blocco ricade al suolo) si ottiene annullando $y(t_D)=0$ e risolvendo l'equazione di 2° grado

$t^2 - 2\frac{v_B sen\beta}{g}t - \frac{2R}{g}(1-cos\beta) = 0$ che ha l'unica soluzione positiva accettabile

$$t_D = \frac{v_B sen\beta + \sqrt{v_B^2 sen^2\beta + 2gR(1-cos\beta)}}{g} = \frac{\sqrt{2gRcos\beta}\cdot sen\beta + \sqrt{2gR(1-cos^3\beta)}}{g} =$$

$$= \sqrt{\frac{2R}{g}}\left(\sqrt{cos\beta(1-cos^2\beta)} + \sqrt{1-cos^3\beta}\right) = \sqrt{\frac{2R}{g}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)} + \sqrt{1-\frac{1}{8}}\right) = \sqrt{\frac{2R}{g}}\left(\sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{7}{8}}\right) =$$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)$=**0.989 s**

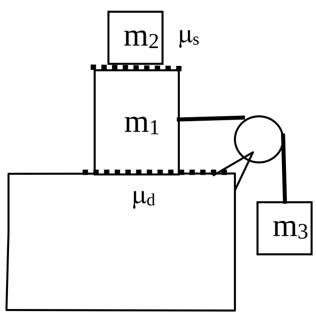
La gittata L, ossia l'ascissa del punto di ricaduta D calcolato dall'origine O, si calcola come $L=x(t_D)$ come segue:

$L = x(t_D) = Rsen\beta + v_B t_D cos\beta$ =**3.92 m**

oppure con ulteriori passaggi algebrici

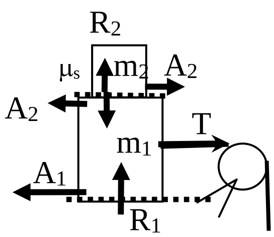
$$L = Rsen\beta + \sqrt{2gRcos\beta}\sqrt{\frac{2R}{g}}\left(\sqrt{cos\beta(1-cos^2\beta)} + \sqrt{1-cos^3\beta}\right)cos\beta =$$
$$= Rsen\beta + 2R\left(\sqrt{cos\beta(1-cos^2\beta)} + \sqrt{1-cos^3\beta}\right)\sqrt{cos^3\beta} =$$
$$= R\frac{\sqrt{3}}{2} + 2R\left(\sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{7}{8}}\right)\sqrt{\frac{1}{8}} = R\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4}$$ =**3.92 m**

2. Testo. Un blocco di massa m_1=10 kg è posto su di un piano orizzontale scabro caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico μ_d=0.2. Sopra al blocco si trova un secondo blocco m_2=5 kg immobile rispetto ad m_1 grazie ad un elevato coefficiente di attrito μ_s. Il blocco m_1 è poi collegato ad una fune, ad una puleggia di massa trascurabile, e ad un blocco di massa m_3=8 kg appeso in verticale. Determinate il valore dell'accelerazione con cui si muove il sistema e determinare inoltre il valore minimo deve avere il coefficiente di attrito μ_s che garantisce un moto solidale dei blocchi m_1 e m_2.



2. Soluzione.

2a) Equazioni per il blocco n.1 proiettate lungo gli assi n,t

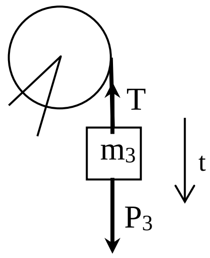


Non sono riportate le forze peso

$$\begin{matrix}\hat{n} \\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_1 - P_1 - R_2 = 0 \\ T - A_1 - A_2 = m_1 a \end{cases}$$

2b) Equazioni per il blocco n.2 proiettate lungo gli assi n,t

$$\begin{cases} \hat{n} & R_2 - P_2 = 0 \\ \hat{t} & A_2 = m_2 a \end{cases}$$



2c) Equazione per il blocco n.3 lungo l'asse del moto t

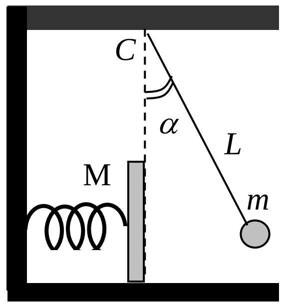
$$m_3 g - T = m_3 a$$

Sommando tutte le equazioni lungo l'asse del moto t si ottiene
$(m_1 + m_2 + m_3)a = g\big(m_3 - \mu_d(m_1 + m_2)\big)$

da cui **l'accelerazione del sistema** $a = g\left(\frac{m_3 - \mu_d(m_1+m_2)}{m_2+m_1+m_3}\right)$ **=2.13 m/s²**

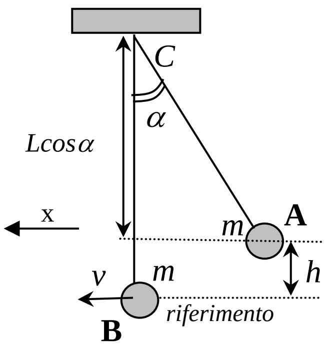
la staticità di m2 è garantita se: $A_2 = m_2 a \le \mu_s m_2 g$ **ossia** $\mu_s \ge a/g =$ **0.22**

3. Testo. Un pendolo semplice é costituito da un filo inestensibile di L=1m, collegato alla massa m=200 g ed incardinato in C. Il pendolo, inizialmente inclinato di un angolo α=30° rispetto alla verticale, viene lasciato oscillare liberamente urtando centralmente ed elasticamente un piattello di massa M=800 g attaccato ad una molla di massa trascurabile. Sapendo che il piattello si mette ad oscillare con periodo T=0.8 s si determinino: a) l'angolo massimo β di risalita del pendolo; b) l'ampiezza delle oscillazioni del piattello.



3. Soluzione. La risoluzione dell'esercizio si divide nelle seguenti 4 fasi:

3a) Calcolo della velocità di impatto del pendolo



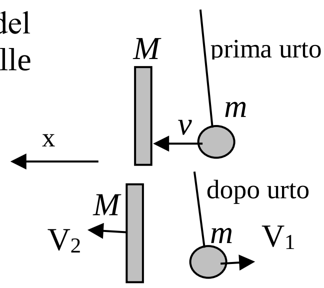
Energia meccanica nel punto **A** : E_{mA}=Mgh=MgL(1-cosα)
Energia meccanica nel punto **B** di minima quota: $E_{mB}=Mv^2/2$
Dalla conservazione dell'energia meccanica si ricava la velocità di impatto

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)} = \mathbf{1.62\ m/s}$$

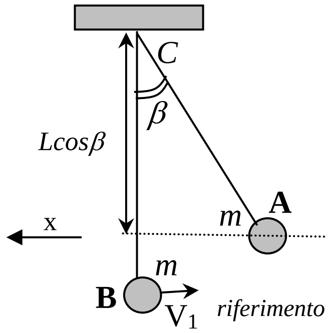
3b) Urto normale centrale elastico con il piattello

In questo processo d'urto si conservano la quantità di moto e l'energia cinetica del sistema. Le **velocità successive all'urto** possono essere espresse in funzione delle velocità precedenti all'urto

$$\begin{cases} V_1 = \left(\frac{m-M}{m+M}\right) v = -0.6\sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)} = \mathbf{-0.97\,\frac{m}{s}} \\ V_2 = \left(\frac{2m}{m+M}\right) v = 0.4\sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)} = \mathbf{+0.65\,\frac{m}{s}} \end{cases}$$



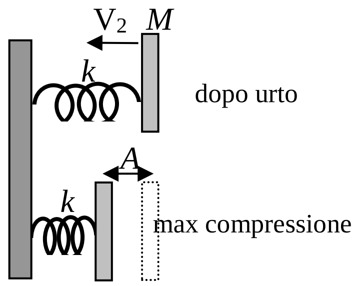
3c) angolo massimo di risalita del pendolo



Per analogia alla relazione già ottenuta nella fase 3a) di discesa imponendo la conservazione dell'energia

$$V_1^2 = 2gL(1-\cos\beta) \quad \text{da cui} \quad \beta = arccos\left(1 - \frac{V_1^2}{2gL}\right) =$$
$$= arccos[1 - 0.6^2(1 - cos\,\alpha)] = 0.31\,rad = \mathbf{17° \; 52'}$$

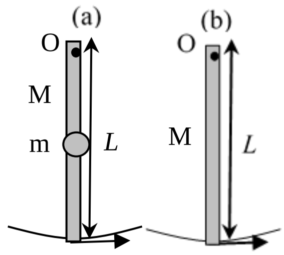
3d) Ampiezza massima delle oscillazioni del piattello



Dalla conservazione dell'energia meccanica $\frac{1}{2}MV_2^2 = \frac{1}{2}kA^2$

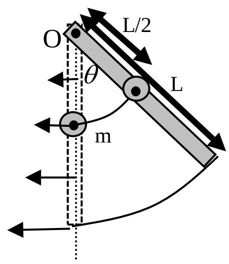
da cui la massima ampiezza $A = V_2\sqrt{M/k} = V_2/\omega = V_2T/2\pi =$ **8.25 cm**

4. Testo. Un pendolo composto è formato da un'asta rigida omogenea di massa M=9 kg, di lunghezza L=50 cm, libera di ruotare intorno al cardine O. A metà dell'asta è anche alloggiata una piccola massa m. Inclinando la barra di un piccolo angolo il pendolo prende ad oscillare con periodo T_a. Staccando la massa dall'alloggiamento e ripetendo la misura del periodo delle piccole oscillazioni esce un valore T_b del 3% superiore a T_a. Determinare il valore della massa m, e dei periodi T_a e T_b. [Suggerimento: $I_{asta}=ML^2/3$]



4. Soluzione.

4a) Calcolo del momento di inerzia



Il sistema è dotato di un momento di inerzia complessivo dato dalla somma del momento di inerzia di una barra di lunghezza L che ruota intorno ad un asse orizzontale per il suo estremo O, sommato a quello di una massa concentrata nel baricentro alla distanza L/2 dall'asse di rotazione in O:

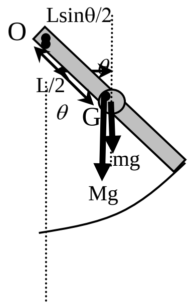
$$I_{tot}^{(a)} = I_{barra} + I_m = \frac{ML^2}{3} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{12}(4M + 3m)$$

Nel caso in cui la massa m fosse rimossa il momento di inerzia si riduce invece a

$$I_{tot}^{(b)} = I_{barra} = \frac{ML^2}{3}$$

4b) Calcolo del periodo di oscillazione:

Quando il pendolo composto è fuori dalla sua posizione di equilibrio, il momento delle due forze peso (applicate enrambe nel baricentro G) tende a far ruotare il sistema verso la posizione di equilibrio



Applicando la seconda equazione cardinale $M_O^{ext} = \frac{db_O}{dt} = I_{tot}^{(a)} \frac{d^2\theta}{dt^2}$
dove $M_O^{ext} = -\frac{(Mg+mg)L \sin\theta}{2} \cong -(M+m)g\frac{L}{2}\theta$

L'equazione differenziale è quindi $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{(M+m)g\frac{L}{2}}{I_{tot}^{(a)}}\right)\theta = 0$

che prevede un periodo delle piccole oscillazioni $T_a = \boldsymbol{2\pi}\sqrt{\frac{I_{tot}^{(a)}}{(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{m})g\frac{L}{2}}} = \boldsymbol{2\pi}\sqrt{\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{6g}}\left(\frac{\boldsymbol{4M+3m}}{\boldsymbol{M+m}}\right)}$

In assenza della massa m il **periodo T_b** diviene (ponendo m=0) $T_b = \boldsymbol{2\pi}\sqrt{\frac{I_{tot}^{(b)}}{Mg\frac{L}{2}}} = \boldsymbol{2\pi}\sqrt{\frac{\boldsymbol{2L}}{\boldsymbol{3g}}}$ **= 1.16 s**

(da cui il **periodo nel primo caso è invece T_a**=T_b/1.03=**1.12 s**)

Imponendo che il rapporto T_b/T_a sia x=1.03 si ottiene $\frac{T_b}{T_a} = x = \sqrt{4\left(\frac{M+m}{4M+3m}\right)}$ da cui
$4M + 4m = x^2(4M + 3m)$ che permette di calcolare il **valore della massa m**

$$m = \left(\frac{4x^2 - 4}{4 - 3x^2}\right)M = \left(\frac{x^2 - 1}{1 - \frac{3x^2}{4}}\right)M = 0.298 \cdot M = \boldsymbol{2.68\ kg}$$