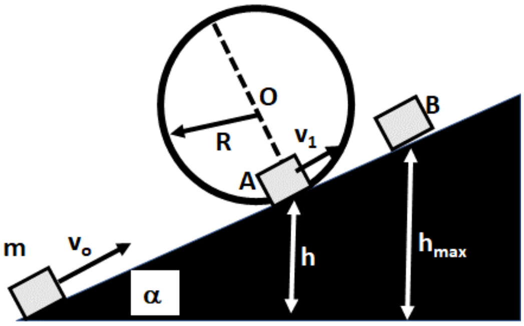
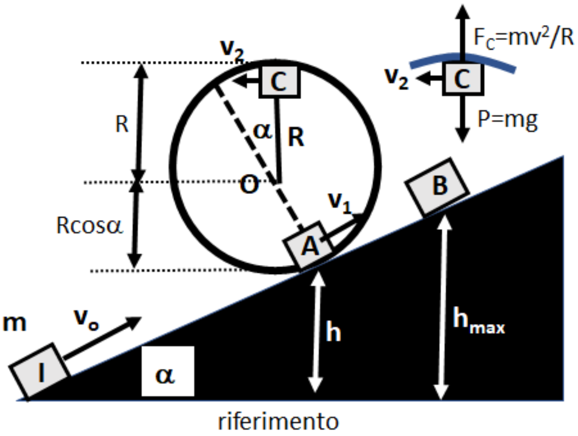
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2024-2025
Ingegneria Gestionale (L-Z)
Esonero del 5 Maggio 2025 – II turno – Testo e Soluzioni



1. Testo. Un blocco di massa m viene lanciato su un piano inclinato liscio angolato di α=30° rispetto all'orizzontale. Quando raggiunge la quota h=1m (nel punto A) il blocco devia su un tratto di guida cilindrica liscia di raggio R=80cm (tangente in A al piano inclinato). Il blocco percorre integralmente la guida cilindrica per poi ridiscendere nel punto A e riprendendo la sua traiettoria originale in salita sul piano inclinato, raggiungendo infine quota massima h_{max} nel punto B. Determinare quale sia la velocità minima v_o per poter percorrere integralmente la guida cilindrica. Determinare con tali valori la velocità minima nel punto A e la quota massima h_{max}.



1. Soluzione
Il valore della velocità minima di lancio v_o è strettamente dipendente dal valore della velocità minima v_2 che il blocco dovrà avere nel punto più alto C della guida per poter percorrere regolarmente la guida effettuando l'intero "*giro della morte*".

Nel punto C il blocco rimane attaccato alla guida quando la forza centrifuga F_c è almeno pari alla forza peso P (vedi fig.)

In sintesi la **velocità minima v_2 nel punto C** si ottiene
a partire da $F_c = P \rightarrow \frac{mv_2^2}{R} = mg \rightarrow v_2 = \sqrt{gR}$ =**2.8 m/s**
In queste condizioni si può facilmente determinare l'espressione
dell'energia meccanica in C: $E_{mC} = \frac{mv_2^2}{2} + mg(h + Rcos\alpha + R) = mg\left[h + R\left(\frac{3}{2} + cos\alpha\right)\right]$
(avendo utilizzato $v_2 = \sqrt{gR}$)

Tutte le incognite del problema si trovano a partire dalle espressioni dell'energia meccanica nei punti I, A, B ed imponendo la conservazione dell'energia con quella calcolata in precedenza nel punto C:

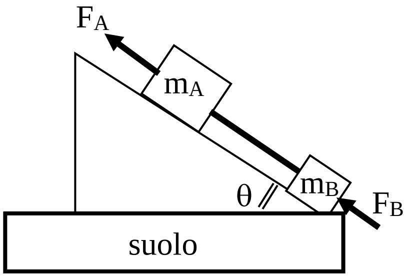
i) **Energia meccanica** in **I** (integralmente cinetica): $E_{mI} = \frac{mv_o^2}{2}$
ii) **Energia meccanica** in **A**: $E_{mA} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh$
iii) **Energia meccanica** in **B (**integralmente potenziale**)**: $E_{mB} = mgh_{max}$

Dalla conservazione dell'energia meccanica E_{m1}=E_{mC} (punti I e C) si ricava
la **velocità minima v_o di lancio** in **I** $v_o = \sqrt{2g\left[h + R\left(\frac{3}{2} + cos\alpha\right)\right]}$=**7.53 m/s**

Dalla conservazione dell'energia meccanica $E_{mA}=E_{mC}$ (punti A e C) si ricava la **velocità minima v2** in **A** $v_A = \sqrt{2gR\left(\frac{3}{2}+cos\alpha\right)}$=**6.09 m/s**

Dalla conservazione dell'energia meccanica $E_{mB}=E_{mC}$ (punti B e C) si ricava la **quota massima** h_{max} in **B** $h_{max} = h + R\left(\frac{3}{2}+cos\alpha\right)$=**2.89 m**

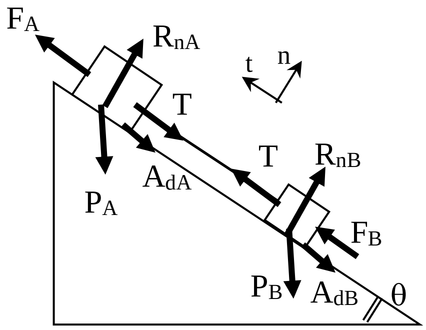
2. Testo. Due blocchi rispettivamente di massa m_A=3 kg ed m_B=2 kg sono collegati da una fune e posti su di un piano inclinato di θ=20° rispetto all'orizzontale. Per far procedere in salita il gruppo si rende necessario applicare due forze parallele al piano rispettivamente F_A applicata al blocco in testa ed F_B al blocco in coda. Conoscendo il valore del coefficiente degli attriti dinamici dei due blocchi con il piano inclinato μ_{dA}=0.4 e μ_{dB}=0.5 determinare l'accelerazione del sistema e la tensione della fune. [F_A=30N, F_B= 15N]



2. Soluzione

Scomponendo le forze che agiscono sui due blocchi lungo gli assi n, t si ottiene:

blocco A: $\begin{matrix} n) \\ t) \end{matrix}\begin{cases} R_{nA} - P_A \cos\theta = 0 \\ F_A - T - P_A \sin\theta - A_{dA} = m_A a \end{cases}$



blocco B: $\begin{matrix} n) \\ t) \end{matrix}\begin{cases} R_{nB} - P_B \cos\theta = 0 \\ F_B + T - P_B \sin\theta - A_{dB} = m_B a \end{cases}$

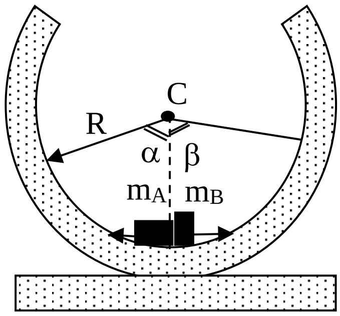
Sommando le espressioni lungo l'asse t si ottiene

$$F_A + F_B - (P_A + P_B)\sin\theta - (A_{dA} + A_{dB}) = (m_A + m_B)a$$

da cui l'**accelerazione** $a = \dfrac{F_A + F_B - (m_A + m_B)g\sin\theta - (\mu_{dA}m_A + \mu_{dB}m_B)g\cos\theta}{m_A + m_B}$ = **1.6 m/s²**

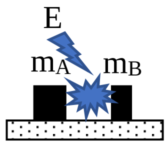
e la tensione $T = F_A - m_A[a + g(\sin\theta + \mu_{dA}\cos\theta)]$ = **4.1 N**

3. Testo. Un blocco di massa m=50g è posizionato sul fondo di una guida cilindrica liscia il cui profilo è una circonferenza di raggio R=2m. A causa di una piccola esplosione dove si sprigiona una energia di 0.5 J il blocco originario si spezza in due blocchi m_A=30g e m_B=20g che partono con velocità dirette orizzontalmente ma in senso opposto in modo che entrambi i blocchi risalgano lo scivolo. Determinare gli angoli α e β raggiunti dai blocchi nei punti di inversione del moto e le relative reazioni normali fornite dallo scivolo.

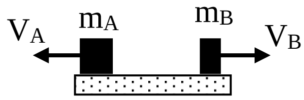


3. Soluzione

3a) Calcolo della velocità iniziale successiva all'esplosione



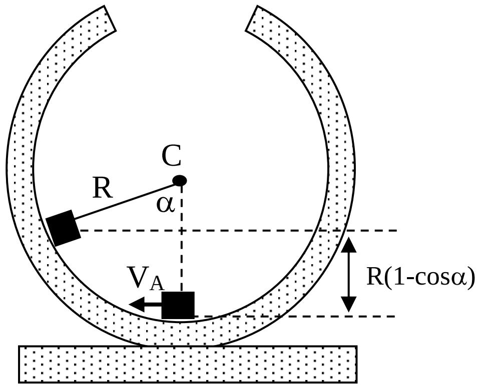
Conservazione dell'energia $E = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2$
(l'energia sprigionata dall'esplosione si trasforma in energia cinetica)



Conservazione della quantità di moto $0 = m_A V_A + m_B V_B$
(lungo l'asse del moto agisce solo la forza elastica che è una forza interna)

combinando le due equazioni: $E = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B \left(\frac{m_A^2}{m_B^2} V_A^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{m_A (m_B + m_A)}{m_B} V_A^2$

da cui $\begin{cases} |V_A| = \sqrt{\frac{2 m_B E}{m_A (m_A + m_B)}} = \mathbf{3.65\, m/s} \\ |V_B| = \sqrt{\frac{2 m_A E}{m_B (m_A + m_B)}} = \mathbf{5.48\, m/s} \end{cases}$



3b) Determinazione degli angoli massimi

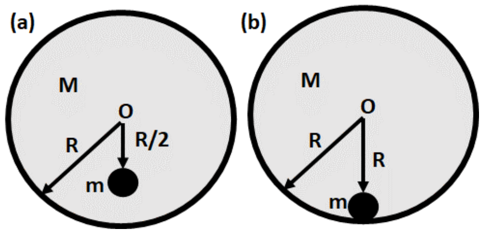
Conservazione dell'energia meccanica $\frac{1}{2} m_A V_A^2 = m_A g R (1 - \cos\alpha)$

da cui l'angolo $\alpha = \boldsymbol{arccos} \left(1 - \frac{V_A^2}{2gR} \right)$ =**0.85 rad = 48° 43'**

con la corrispondente reazione normale $R_{nA} = m_A g \cos\alpha =$ **0.194 N**

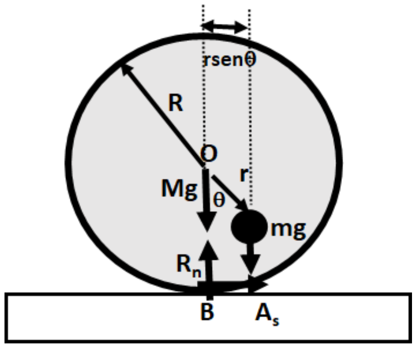
Per analogia $\beta = arccos \left(1 - \frac{V_B^2}{2gR} \right)$ =**1.33 rad** = **76° 26'**

con la corrispondente reazione normale $R_{nB} = m_B g \cos\beta = \mathbf{0.046\, N}$



4. Testo. Un cilindro di lunghezza L, di raggio R=1m e di massa M=10kg è libero di rotolare sul piano orizzontale. Nel cilindro è incastrata una massa m in una posizione decentrata a distanza R/2 dall'asse del cilindro che rende il sistema adatto all'instaurarsi di piccole oscillazioni periodiche come avviene nel pendolo. Sapendo che il periodo di oscillazione del sistema in figura (a) T_a aumenta del 50 % rispetto al periodo T_b quando la massa m viene spostata più perifericamente a distanza R dall'asse come in figura (b), determinare il valore della massa m.

4. Soluzione



Dall'analisi delle forze vengono individuate la forza peso del cilindro **Mg**, la forza peso **mg** della massa puntiforme incastrata nel cilindro, la reazione normale $\mathbf{R}_n$ e l'attrito statico $\mathbf{A}_s$ nel punto di contatto con il terreno B

Il sistema si comporta come un pendolo composto che oscilla intorno all'asse istantaneo di rotazione per il punto B. In questo caso è opportuno applicare solo la II equazione cardinale proprio sull'asse di rotazione per il punto B. La forza peso **Mg**, la reazione normale $\mathbf{R}_n$ e l'attrito statico $\mathbf{A}_s$ non producono alcun momento essendo nullo il braccio rispetto al punto B. E' invece negativo il momento della forza peso **mg** della massa puntiforme

$$M_B = -mg(rsen\theta) \cong -mgr\theta$$

Applicando la II equazione cardinale $M_B \cong -mgr\theta = I_B \frac{d^2\theta}{dt^2}$

che ammette piccole oscillazioni di periodo $T(r) = 2\pi\sqrt{\frac{I_B}{mgr}}$

Il momento di inerzia complessivo rispetto al punto decentrato B si compone di due termini:

momento di inerzia del cilindro $I_B^{cil} = I_O^{cil} + M\overline{OB}^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

momento di inerzia della massa puntiforme $I_B^m = m[(rsen\theta)^2 + (R - rcos\theta)^2] = m(R^2 + r^2 - 2Rrcos\theta) \cong m(R-r)^2$

per cui il periodo di oscillazione diviene $T(r) = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}MR^2 + m(R-r)^2}{mgr}}$

Nel caso (a) dove ***r*=*R*/2** il periodo vale $T_a = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}\frac{6M+m}{m}}$

Nel caso (b) dove ***r*=*R*** il periodo vale $T_b = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}\frac{3M}{m}}$

Poiché un dato del problema riporta che $\mathbf{T_a/T_b=x=1.5}$ si ricava $\frac{T_a}{T_b} = \sqrt{\frac{6M+m}{3M}} = \sqrt{2 + \frac{m}{3M}} = x$

da cui la **massa incognita** vale $\mathbf{m=3M(x^2-2)= 7.5\ kg}$