



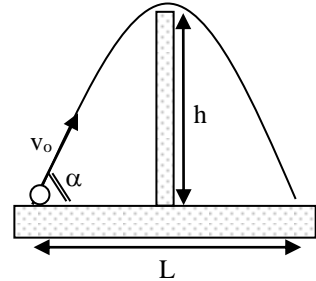
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA

A.A. 2020-2021

Ingegneria Gestionale (M-Z)

Soluzione Esonero del 30 Aprile 2021 - gruppi A e B

1. Testo. Quando un proiettile viene sparato da terra con velocità v_0 e con un alzo α (angolo di lancio rispetto all'orizzontale) le due fondamentali quantità che vengono usualmente determinate sono la quota massima h raggiunta dal proiettile e la sua gittata L . Supponendo di trovarci nel caso particolare in cui il moto parabolico presenta la peculiarità espressa dalla relazione $h=L=5\text{m}$, determinare l'alzo che deve essere applicato e la velocità di lancio v_0 .



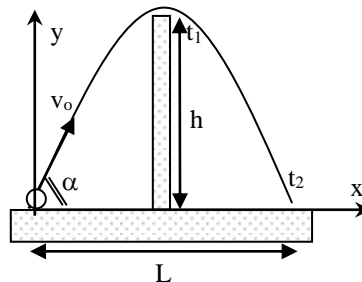
1. Soluzione. Equazioni del moto del proiettile

Lungo asse x

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ v_x = v_0 \cos \alpha \\ a_x = 0 \end{cases}$$

Lungo asse y

$$\begin{cases} y = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2 \\ v_y = v_0 \sin \alpha - gt \\ a_y = -g \end{cases}$$



Per determinare la gittata bisogna imporre $y(t_2)=0$ per ottenere il tempo di volo $t_2 = 2v_0 \sin \alpha / g$

da cui la **gittata**: $L = x(t_2) = v_0 t_2 \cos \alpha = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$;

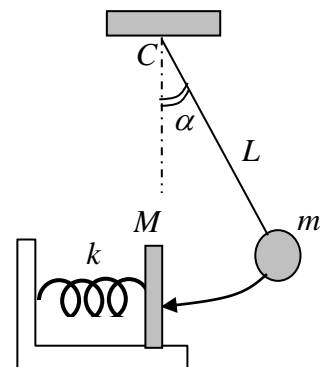
per determinare l'altezza massima occorre imporre $v_y=0$ per ottenere il tempo $t_1 = v_0 \sin \alpha / g$

da cui l'**altezza massima**: $h = y(t_1) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

Il rapporto **altezza/gittata** vale: $\frac{h}{L} = \frac{tg\alpha}{4}$ da cui l'**alzo** $\alpha = \arctan(4h/L) = 1.326 \text{ rad} = 76^\circ$

e la **velocità iniziale di lancio** (invertendo la formula dell'altezza massima) $v_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin \alpha} = 10.2 \text{ m/s}$

2. Testo. Un pendolo di massa $m=2 \text{ kg}$, incardinato al soffitto tramite un filo inestensibile di lunghezza $L=30 \text{ cm}$ e di massa trascurabile è inclinato di un angolo $\alpha=40^\circ$ rispetto alla verticale. Quando viene lasciato oscillare liberamente raggiunge dopo breve la posizione verticale impattando anelasticamente contro un piattello di massa $M=10 \text{ kg}$ collegato con una molla di costante $k=100 \text{ N/m}$ ad una parete verticale. Sapendo che il pendolo a seguito dell'urto torna indietro inclinandosi al massimo di un angolo $\beta=20^\circ$ determinare la massima compressione della molla e la perdita di energia a seguito dell'urto.

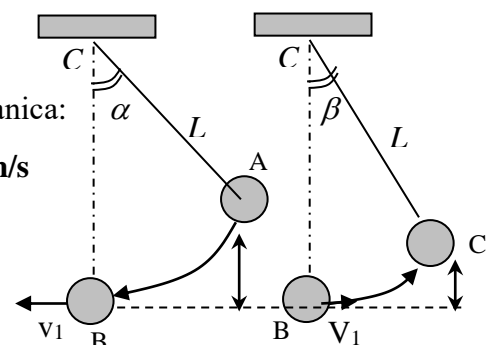


2. Soluzione. Calcolo delle velocità prima e dopo l'urto del pendolo

Prima dell'urto, durante la discesa da A a B si conserva l'energia meccanica:

$$E_{mA} = E_{mB} \Rightarrow mgL(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)} = 1.17 \text{ m/s}$$

L'energia meccanica vale: $E_{\text{pendolo}}^{\text{prima}} = mgL(1 - \cos \alpha) = 1.376 \text{ J}$



Dopo l'urto il pendolo ha acquisito in B una nuova velocità V_1 , e la nuova energia meccanica del pendolo si conserva durante tutta la fase di risalita dal punto B al punto C:

$$E_{mB} = E_{mC} \Rightarrow \frac{1}{2} mV_1^2 = mgL(1 - \cos\beta) \Rightarrow V_1 = \sqrt{2gL(1 - \cos\beta)} = \mathbf{0.59 \text{ m/s}}$$

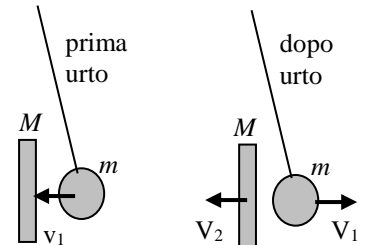
L'energia meccanica del pendolo in questa fase vale invece $E_{pendolo}^{dopo} = mgL(1 - \cos\beta) = \mathbf{0.355 \text{ J}}$

Calcolo della velocità iniziale del piattello

Imponendo la conservazione della quantità di moto durante l'urto anelastico

$$mv_1 = MV_2 - mV_1$$

Si ottiene $V_2 = \frac{m}{M}(v_1 + V_1) = \frac{m}{M}\sqrt{2gL}(\sqrt{1 - \cos\alpha} + \sqrt{1 - \cos\beta}) = \mathbf{0.35 \text{ m/s}}$

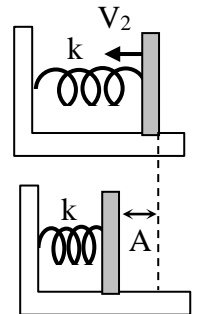


Conservazione della massima compressione della molla

Imponendo la conservazione della energia meccanica del piattello tra l'istante immediatamente successivo all'urto in cui il piattello ha solo energia cinetica, e l'istante di massima compressione A in cui il piattello inverte il moto ed ha solo energia potenziale si ha:

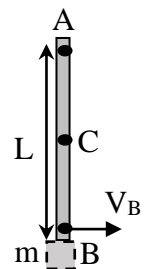
$$E_{piattello} = \frac{1}{2} MV_2^2 = \frac{1}{2} kA^2 = \mathbf{0.625 \text{ J}}$$

dalla quale l'ampiezza di oscillazione $A = V_2 \sqrt{\frac{M}{k}} = \mathbf{11.2 \text{ cm}}$



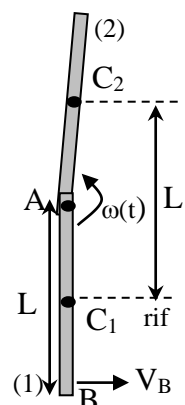
Infine l'energia persa durante l'urto si calcola da $E_{persa} = E_{pendolo}^{prima} - (E_{pendolo}^{dopo} + E_{piattello}) = \mathbf{0.396 \text{ J}}$

3. Testo. Una barra di massa $M=3 \text{ kg}$ e lunghezza $L=75 \text{ cm}$ è libera di ruotare senza attriti nel piano verticale indicato in figura intorno al suo estremo A. Inizialmente la barra si trova in quiete nella posizione di equilibrio stabile. Determinare la velocità minima che è necessario dare all'estremo B affinché la barra possa descrivere un giro completo. Ripetere l'esercizio incastrando nella barra una massa $m=1 \text{ kg}$ nell'estremo B. Determinare la variazione della velocità ΔV_B in B tra i due casi. [Il momento di inerzia della barra rispetto al cardine A è $I_A = M L^2/3$].



3. Soluzione. L'energia meccanica si conserva durante il moto della barra. In particolare si analizza l'energia meccanica nel punto iniziale (1) e nel punto di massima altezza (2) e scegliendo come riferimento per l'energia potenziale la posizione iniziale del centro di massa C_1 è possibile scrivere in generale

$$E_{m1} = E_{m2} \text{ da cui } U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \text{ ossia } \frac{1}{2} I_A \omega_1^2 = MgL + \frac{1}{2} I_A \omega_2^2$$



Vengono inoltre aggiunte le seguenti condizioni:

a) per descrivere un giro completo la barra deve riuscire a raggiungere il punto (2) con una velocità angolare limite almeno nulla $\omega_2=0$.

b) la velocità minima inizialmente fornita al punto B corrisponde ad una velocità angolare data a tutta la barra nel punto (1) secondo la formula del moto circolare: $\omega_{1min}=V_B/L$

Ciò comporta nella equazione di conservazione dell'energia $\frac{1}{2} I_A \left(\frac{V_B}{L} \right)^2 = MgL$

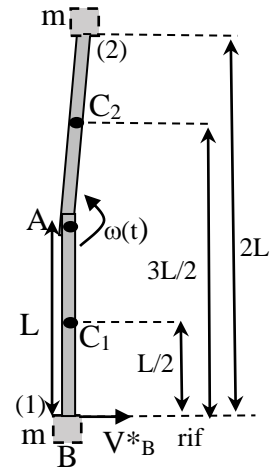
da cui la **velocità minima** fornita in B vale $V_B = \sqrt{\frac{2MgL^3}{I_A}} = \sqrt{6gL} = \mathbf{6.64 \text{ m/s}}$

Nel secondo caso incastrando nella barra una massa m nell'estremo B il momento di inerzia complessivo rispetto ad A aumenta secondo

$$I_A^{tot} = I_A^{barra} + I_A^{massa} = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2 = \frac{M+3m}{3}L^2$$

Imponendo la conservazione di energia meccanica tra (1) e (2) questa diviene:

$$\frac{1}{2} I_A^{tot} \omega_1^2 + Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} I_A^{tot} \omega_2^2 + Mg \left(\frac{3}{2}L \right) + mg(2L)$$



dove imponendo le condizioni al limite di velocità nulla in (2) oltre alla solita $\omega_1 = \frac{V_B^*}{L}$:

$$\frac{1}{2} I_A^{tot} \left(\frac{V_B^*}{L} \right)^2 + Mg \frac{L}{2} = Mg \left(\frac{3}{2}L \right) + mg(2L) \quad \text{da cui} \quad \frac{1}{2} I_A^{tot} \left(\frac{V_B^*}{L} \right)^2 = (M+2m)gL$$

da cui la nuova **velocità minima** in B vale $V_B^* = \sqrt{\frac{2(M+2m)gL^3}{I_A^{tot}}} = \sqrt{6gL \left(\frac{M+2m}{M+3m} \right)} = \mathbf{6.06 \text{ m/s}}$

la **variazione di velocità in B fra i due casi** è $\Delta V_B = V_B^* - V_B = \mathbf{-0.58 \text{ m/s}}$
(ossia nel secondo caso c'è una velocità minima inferiore!)