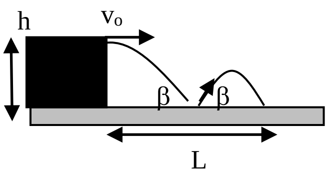
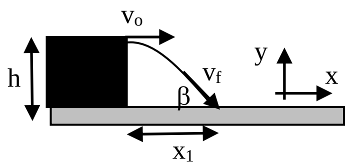
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2020-2021
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Soluzioni esonero del 30 Aprile 2021 – Gruppi C e D

1. **Testo.** Una palla viene lanciata da un muretto di altezza h=5m con una velocità orizzontale v_o=2m/s. La palla arriva sul terreno con un angolo β rispetto all'orizzontale, rimbalzando una volta, mantenendo lo stesso angolo β ma perdendo metà della sua velocità nel rimbalzo. Determinare in quale posizione arriverà il pallone al secondo rimbalzo (rispetto alla base del muretto) e stabilire i tempi corrispondenti al primo e secondo rimbalzo.



1. Soluzione. La traiettoria parabolica di un proiettile lanciato con velocità iniziale orizzontale v_o si scompone nei due moti componenti lungo x ed y

lungo x $\begin{cases} x(t) = v_o t \\ v_x = v_o \\ a_x = 0 \end{cases}$ e lungo y $\begin{cases} y(t) = h - gt^2/2 \\ v_y = -gt \\ a_y = -g \end{cases}$



il tempo di volo si ottiene imponendo y(t)=0 da cui $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ **= 1.01 s**

in quell'istante la palla tocca terra per la prima volta nella posizione $x_1 = v_o t_1 = v_o\sqrt{\frac{2h}{g}}$ =**2.02 m**

con la **velocità di caduta** $v_f = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_o^2 + 2gh}$ =**10.1 m/s**

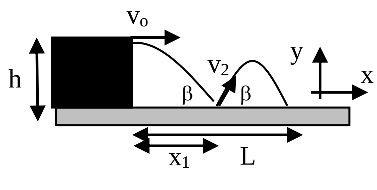
con **inclinazione rispetto all'orizzontale** $\beta = \arctan\left(\frac{|v_y|}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2gh}}{v_o}\right)$ = **78.6°**

Moto parabolico dopo il rimbalzo

La velocità dopo il rimbalzo si dimezza: $v_2 = \frac{v_f}{2}$ =**5.05 m/s,** mantenendo lo stesso alzo **β=78.6°**

Applicando l'equazioni della balistica per il secondo rimbalzo si ottiene:

lungo x $\begin{cases} x(t) = x_1 + v_2 t\cos\beta \\ v_x = v_2\cos\beta \\ a_x = 0 \end{cases}$ e lungo y $\begin{cases} y(t) = v_2 t\sin\beta - gt^2/2 \\ v_y = v_2\sin\beta - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

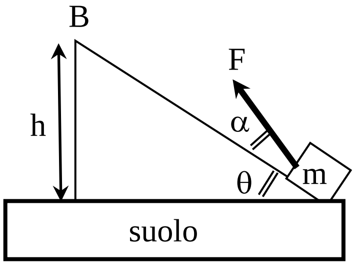


il tempo di volo al secondo rimbalzo si ottiene imponendo y=0: $t_2 = \frac{2v_2\sin\beta}{g}$ =**1.01 s**

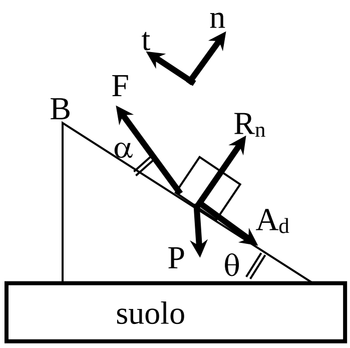
(il tempo dall'inizio è t_1+t_2=**2.02 s)**

La **gittata al secondo rimbalzo** è quindi: $L = x_1 + \frac{2v_2^2\sin\beta\cos\beta}{g}$ =**3.03 m**

2. Testo. Un blocco di massa m=2 kg è posto in quiete alla base di un cuneo inclinato di θ=30° rispetto all'orizzontale. Al blocco viene applicato una forza costante F=15N inclinata di un angolo α=10° rispetto al piano in modo da mettere in movimento il blocco e lanciarlo sulla rampa di altezza h. Conoscendo il valore del coefficiente di attrito dinamico μ_d=0.2 tra il blocco ed il cuneo, sapendo che la forza svanisce dopo soli 2s, determinare la quota massima raggiunta sul cuneo, l'istante di inversione del moto e dopo quanto tempo ritorna al suolo.



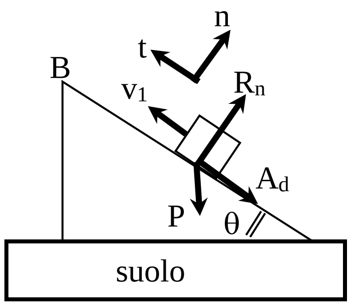
2. Soluzione. Fase di salita forzata
Scomponendo le forze secondo gli assi n, t



$$\begin{aligned} n)&\begin{cases} R_n - P\cos\theta + F\sin\alpha = 0 \\ F\cos\alpha - P\sin\theta - A_d = ma \end{cases} \\ t)& \end{aligned}$$

da cui
$$\begin{aligned} n)\ & \begin{cases} R_n = mg\cos\theta - F\sin\alpha \\ a_1 = \dfrac{F}{m}(\cos\alpha + \mu_d\sin\alpha) - g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta) = 1.049\, m/s^2 \end{cases} \\ t)\ & \end{aligned}$$

Il moto risultante è uniformemente accelerato lungo la diagonale di salita. Le grandezze cinematiche dopo t_1=2s valgono
$$\begin{cases} a_1 = 1.049\, m/s^2 \\ v_1 = a_1 \cdot t_1 = 2.098\, m/s \\ s_1 = \dfrac{1}{2} a_1 \cdot t_1^2 = 2.098\, m \end{cases}$$



Fase in assenza di forza esterna
Scomponendo le forze secondo gli assi n, t
(il tempo viene riazzerato dopo t_1=2s).

$$\begin{aligned} n)\ & \begin{cases} R_n - P\cos\theta = 0 \\ -P\sin\theta - A_d = ma \end{cases} \\ t)\ & \end{aligned} \quad \text{a cui} \quad \begin{aligned} n)\ & \begin{cases} R_n = mg\cos\theta \\ a_2 = -g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta) = -6.6\, m/s^2 \end{cases} \\ t)\ & \end{aligned}$$

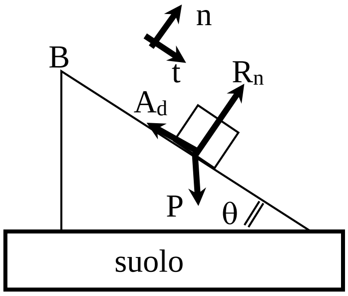
Il moto è uniformemente decelerato in salita. Le grandezze cinematiche
$$\begin{cases} a_2 = -6.6\, m/s^2 \\ v = v_1 + a_2 \cdot t \\ s = s_1 + v_1 \cdot t + \dfrac{1}{2} a_2 \cdot t^2 \end{cases}$$

(l'accelerazione a_2 è negativa ma può essere indicata con il valore assoluto come $-|a_2|$)

L'istante di inversione del moto si calcola imponendo v=0, da cui $t_2 = -\dfrac{v_1}{a_2} = \dfrac{v_1}{|a_2|}$ **= 0.318 s**

In quell'istante lo **spazio percorso** è $s_2 = s_1 + v_1 \cdot t_2 - \dfrac{|a_2| \cdot t_2^2}{2}$ **= 2.43 m,**

raggiungendo la **quota** $h = s_2 \cdot \sin\theta =$ **1.22 m**



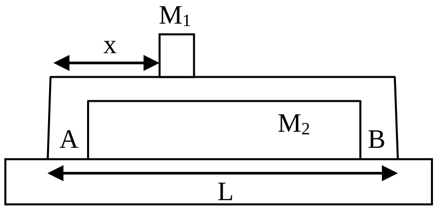
Fase di discesa
Scomponendo le forze secondo gli assi n, t
(All'inversione del moto lo spazio viene riazzerato ed il tempo viene anche riazzerato dopo t_1+t_2=2.32s)

$$n)\begin{cases} R_n - P\cos\theta = 0 \\ P\sin\theta - A_d = ma \end{cases} \quad \text{a cui} \quad n)\begin{cases} R_n = mg\cos\theta \\ a_3 = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = 3.20\, m/s^2 \end{cases}$$

Il moto è uniformemente accelerato in discesa. Le grandezze cinematiche $\begin{cases} a_3 = 3.2\, m/s^2 \\ v = a_3 \cdot t \\ s = \frac{1}{2} a_3 \cdot t^2 \end{cases}$

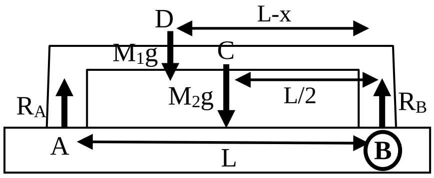
L'istante di ritorno a terra si calcola imponendo s=s_2=2.43 m da cui $t = \sqrt{\frac{2s_2}{a_3}}$ **= 1.23 s**

(tale tempo è quindi complessivamente **3.55 s** a partire dall'inizio dell'applicazione della forza)



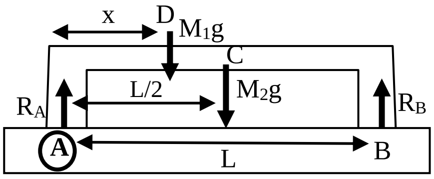
3. Testo. Un blocco di legno omogeneo di massa M_1=10kg è disposto sopra un tavolo omogeneo di massa M_2=20 kg e lunghezza L=3m. Determinare a quale distanza x occorre posizionare il tavolo di sopra in modo che la gamba A del tavolo sottostante scarichi sul pavimento una forza pari a 9/10 rispetto a quella scaricata dalla gamba B.

(*rispetto ad un asse per B*)



3. Soluzione. Statica del tavolo.
Sul sistema agiscono 4 forze esterne: la forza peso del tavolo M_2g applicata nel baricentro C, la forza peso del blocco M_1g concentrata nel punto D, e le due reazioni vincolari R_A ed R_B applicate nei punti di contatto con il pavimento A, B.
Per la statica devono essere simultaneamente nulle le due equazioni cardinali. In particolare l'annullamento della seconda equazione cardinale può essere imposto rispetto a qualsiasi punto.

(*rispetto ad un asse per A*)



Quando viene imposto rispetto ad un asse per il punto B

$$M^{ext} = M_{RA} + M_{P1} + M_{P2} = -R_A L + M_1 g(L-x) + M_2 g\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

(con la convenzione che il momento è positivo quando la forza imprime una rotazione antioraria)

da cui la **reazione nel punto A** diviene $R_A = M_1 g\left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{M_2 g}{2}$

Quando viene imposto rispetto ad un asse per il punto A

$$M^{ext} = M_{RB} + M_{P1} + M_{P2} = +R_B L - M_1 g x - M_2 g\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

(con la convenzione che il momento è positivo quando la forza imprime una rotazione antioraria) da cui la **reazione nel punto B** diviene $R_B = M_1 g\left(\dfrac{x}{L}\right) + \dfrac{M_2 g}{2}$

Imponendo $R_A = \dfrac{9}{10} R_B$ si ottiene $M_1 g\left(1 - \dfrac{x}{L}\right) + \dfrac{M_2 g}{2} = \left(\dfrac{9}{10}\right)\left[M_1 g\left(\dfrac{x}{L}\right) + \dfrac{M_2 g}{2}\right]$

e dopo qualche passaggio algebrico $M_1 g\left(\dfrac{19}{10}\dfrac{x}{L} - 1\right) = \dfrac{M_2 g}{2}\left(1 - \dfrac{9}{10}\right)$ da cui semplificando g ed esplicitando x si ottiene **la posizione di D rispetto alla gamba A**: $x = \dfrac{L}{2}\dfrac{M_2 + 20M_1}{19M_1} =$ **1.74 m**