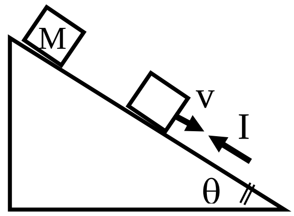
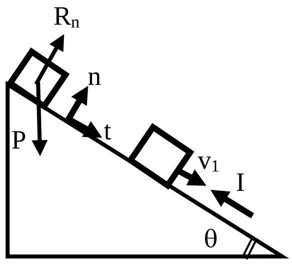
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2019-2020
Ingegneria Gestionale (A-L)
Esonero del 8 Maggio 2020: Gruppi A e B



1. Un blocco di massa **M=2kg** viene lasciato scivolare lungo un piano liscio inclinato di **θ=30°** rispetto all'orizzontale. Trascorso un tempo di **t_o=6s** sul blocco viene applicato un impulso di intensità **I=98 kgm/s** nel verso opposto alla velocità del blocco, sufficiente a produrre una inversione del moto. Calcolare dopo **quanto tempo** (a partire dall'impulso) il blocco invertirà nuovamente il moto riprendendo la sua discesa naturale. Ripetere l'esercizio ipotizzando che il tempo di discesa prima dell'impulso sia **t_o=8s.**

1 Soluzione. Studio delle forze agenti sul blocco



Scomponendo le forze agenti lungo gli assi *t,n*

$$\begin{cases} t) & Mg\sin\theta = Ma \\ n) & R_n - Mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$ si ottiene $a = g\sin\theta$

le equazioni del moto divengono quindi $\begin{cases} s = \left(gt^2\sin\theta\right)/2 \\ v = gt\sin\theta \\ a = g\sin\theta \end{cases}$

la velocità del blocco immediatamente prima dell'impulso è $v_1 = gt_o\sin\theta$=**29.4 m/s**

L'impulso fa bruscamente variare la quantità di moto $-I = Mv_2 - Mv_1$

(il segno preposto ad I è negativo perché l'impulso è contrario all'asse t)

la velocità del blocco dopo l'urto è quindi $v_2 = v_1 - \dfrac{I}{M} = gt_o\sin\theta - \dfrac{I}{M} =$ **-19.6 m/s**

(il segno negativo dimostra che il blocco risale il piano inclinato dopo l'impulso)

Durante la fase di risalita l'accelerazione è sempre diretta lungo l'asse t con valore $a = g\sin\theta$

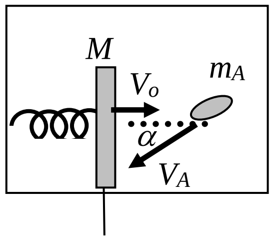
le equazioni del moto sono quindi $\begin{cases} s = ... \\ v = v_2 + gt\sin\theta \\ a = g\sin\theta \end{cases}$ dove il tempo t è sincronizzato con l'impulso la velocità è quindi

$$v(t) = v_2 + gt\sin\theta = gt_o\sin\theta - \frac{I}{M} + gt\sin\theta = (t + t_o)g\sin\theta - \frac{I}{M}$$

essa cambia di segno (inversione del moto) quando $t = \frac{I}{Mg\sin\theta} - t_o = \mathbf{4s}$

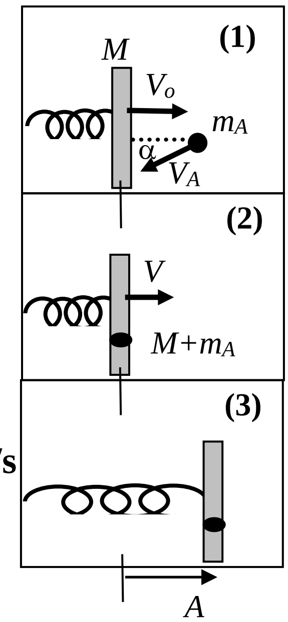
Se invece t_o=**8s** allora t=**2s**

2. Un piattello di massa **M=3 kg**, attaccato ad una molla di massa trascurabile di costante elastica **k=20 N/m**, è messo in oscillazione lungo un piano liscio orizzontale. Una proiettile di massa **m_A=100g** viaggia alla velocità **V_A=100m/s** con una inclinazione **α=30°** rispetto all'orizzontale impattando contro il piattello quando esso transita nella sua posizione di equilibrio con una velocità **V_o=5m/s**. L'urto è perfettamente anelastico ed il piattello prosegue il suo moto vincolato lungo l'asse orizzontale. Determinare la nuova **velocità del sistema piattello proiettile, la nuova ampiezza di oscillazione, l'energia persa durante l'urto**.



2. L'intero processo viene scomposto in due fenomeni distinti consecutivi:
l'urto anelastico tra il proiettile ed il piattello in cui viene conservata la quantità di moto del sistema (particolari 1 e 2 in figura);
fenomeno di oscillazione del sistema in cui viene conservata l'energia meccanica (particolari 2 e 3).

a) **nuova velocità del sistema piattello/proiettile**
V_A: velocità proiettile prima dell'urto
V_o: velocità blocco prima dell'urto
V: velocità del sistema piattello/proiettile dopo l'urto
Il sistema è vincolato a muoversi solo lungo l'asse orizzontale (x)
In questo caso si conserva solo la quantità di moto lungo x
perché durante l'urto c'è un impulso della reazione normale
sul piattello (lungo y) fornito dal piano d'appoggio (forza esterna)



$MV_o - m_A V_A \cos\alpha = (M + m_A)V$ da cui $V = \frac{MV_o - m_A V_A \cos\alpha}{M + m_A} =$ **2.045 m/s**

(nella direzione dell'asse x)

b) **energia persa a causa dell'urto**

Energia cinetica prima dell'urto: $K_1 = \frac{1}{2}MV_o^2 + \frac{1}{2}m_A V_A^2 =$ **537.5 J**

Energia cinetica dopo l'urto: $K_2 = \frac{1}{2}(M + m_A)V^2$ **= 6.5 J**

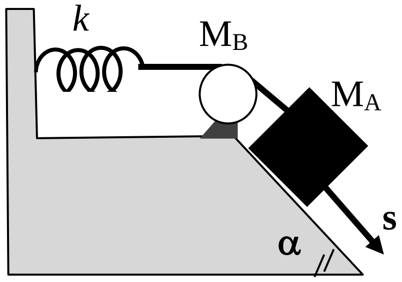
Perdita di energia a causa dell'urto: $K_1 - K_2$ **= 531 J**

c) **nuova ampiezza di oscillazione del sistema piattello/proiettile**

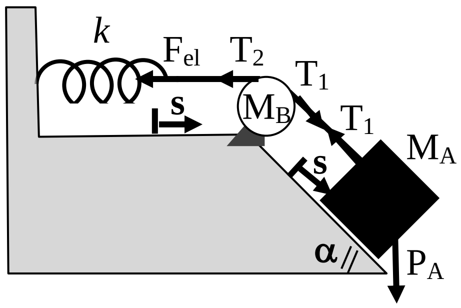
E_2: energia meccanica (tutta cinetica) immediatamente dopo urto: $E_2 = \frac{1}{2}(M + m_A)V^2$

E_3: energia meccanica (tutta potenziale) alla massima elongazione : $E_3 = \frac{1}{2}kA^2$

Imponendo $E_2 = E_3$ si ottiene la **massima elongazione** $A = V\sqrt{\frac{M + m_A}{k}}$ =**80.5 cm**



3. Un blocco di massa **M_A=3 kg** è situato su di un piano liscio inclinato di **α=30°** rispetto all'orizzontale. Esso è connesso tramite un sistema di funi e con puleggia di massa **M_B=4 kg** ad una molla di massa trascurabile e di costante elastica **k=100 N/m** incardinata ad una parete verticale. Inizialmente la molla non è elongata (s=0), ma la massa M_A scende lungo l'asse s ed il sistema comincia ad oscillare.
Determinare il **periodo di oscillazione**, **l'ampiezza di oscillazione** e **l'energia cinetica massima** (Il momento di inerzia della puleggia rispetto al suo asse di rotazione è $I_c=M_Br^{2/}2$ dove r è il raggio della ruota).

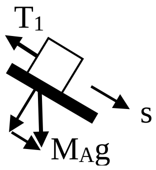


3. Studio delle forze agenti su ciascun elemento del sistema

La tensione della fune T_2 dal lato della molla è causata dalla forza elastica della molla che subisce una elongazione s(t) variabile nel tempo

$T_2 = F_{el} = k \cdot s$

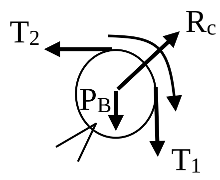
(il verso delle forze è opposto a quello dello spostamento s)



Applicando il 2 principio sulla massa M_A lungo l'asse del moto

$$M_A g \cdot sen\alpha - T_1 = M_A a = M_A \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Applicando l'equazione dei momenti sull'asse della puleggia M_B
Solo le tensioni T1 e T2 della fune hanno un braccio non nullo



$$T_1 r - T_2 r = I_c \frac{a}{r} = \left(\frac{1}{2}M_B r^2\right)\left(\frac{a}{r}\right)$$

da cui $T_1 - T_2 = \frac{M_B}{2} a = \frac{M_B}{2}\frac{d^2 s}{dt^2}$

Sommando le tre equazioni sopra descritte: $M_A g sen\alpha = \left(M_A + \frac{M_B}{2}\right)\frac{d^2 s}{dt^2} + k \cdot s$

che ha soluzione $s(t) = s_p + s_{omo} = \frac{M_A g sen\alpha}{k} + A\cos(\omega t + \phi) = \frac{M_A g sen\alpha}{k}[1 - \cos(\omega t)]$

dove i valori di A e ϕ sono ottenuti dalla condizione al contorno s(t=0)=0 e v(t=0)=0

L'ampiezza di oscillazione è quindi $A = \frac{M_A g sen\alpha}{k} =$ **14.7 cm**

$\omega = \sqrt{\frac{k}{M_A + M_B/2}} =$ **4.47 rad/s** ed il **periodo** $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M_A + M_B/2}{k}} =$ **1.405 s**

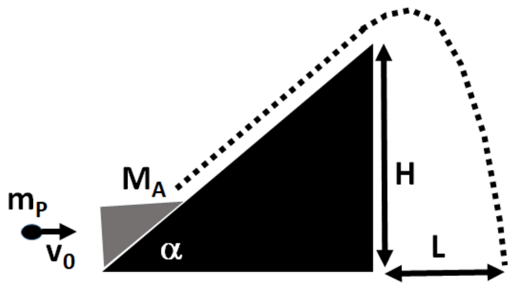
La velocità massima vale $v_{\max} = A\omega =$ **0.657 m/s**

L'energia cinetica massima è data da $K_{\max} = K_{trasl} + K_{rot} = \frac{1}{2}M_A v_{\max}^2 + \frac{1}{2}I_c\omega_{rot}^2$

$$K_{\max} = \frac{1}{2}M_A v_{\max}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M_B r^2\right)\left(\frac{v_{\max}}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(M_A + \frac{M_B}{2}\right)v_{\max}^2 = \textbf{1.08 J}$$

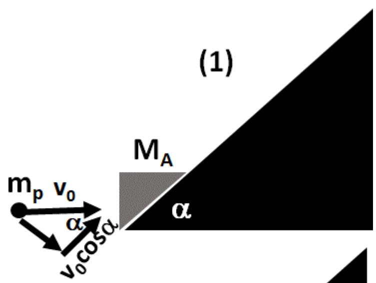
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2019-2020
Ingegneria Gestionale (A-L)
Esonero del 8 Maggio 2020. Gruppi C e D

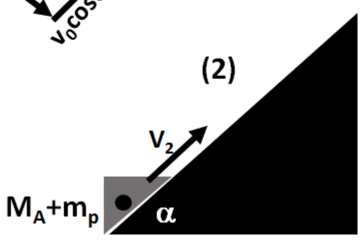
1. Un piccolo cuneo di massa $\mathbf{M_A=1\ kg}$ è inizialmente fermo alla base di un piano inclinato di $\boldsymbol{\alpha=30°}$ rispetto alla orizzontale. Un proiettile di massa $\mathbf{m_p=50\ g}$ viaggia alla velocità $\mathbf{V_0=100\ m/s}$ lungo l'asse orizzontale in rotta di collisione con il cuneo. A seguito dell'urto perfettamente anelastico il cuneo, vincolato al piano inclinato scabro ($\boldsymbol{\mu_d=0.2}$), si muove in salita lungo il pendio. Determinare la **velocità iniziale** immediatamente dopo l'urto, e la **velocità con cui arriva sulla sommità del piano inclinato** alla quota **H=50 cm** prima del distacco e caduta libera. Determinare infine anche la **distanza L,** calcolata dalla base del piano inclinato, alla quale il cuneo ricade al suolo.



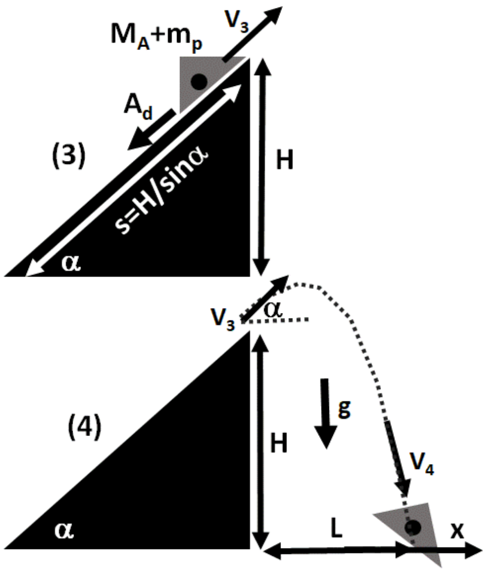
1. Il problema complessivo può essere scomposto in una sequenza di problemi semplici corrispondenti alle differenti fasi temporali.

Urto perfettamente anelastico vincolato (fig.1-2)
Durante questa fase il proiettile si conficca nel cuneo ed il sistema cuneo+propiettile acquista una velocità di salita lungo il piano inclinato. L'urto è perfettamente anelastico ma il moto è vincolato lungo l'asse di salita. In queste condizioni la quantità di moto prima dell'urto $m_p\vec{v}_0$ non ha la direzione della quantità di moto finale $(M_A+m_p)\vec{V}_2$ e non si conserva a causa dell'impulso fornito all'atto dell'urto dalla reazione normale del piano inclinato (forza esterna). Ma in queste condizioni di urto vincloato si può applicare la conservazione della componente della quantità di moto lungo l'asse libero (asse tangenziale t) di salita sul quale non gravano impulsi di forze esterne.





Quindi $p_t^{prima}=p_t^{dopo}$ da cui $m_p v_0\cos\alpha=(M_A+m_p)V_2$ dal quale si ricava la **velocità iniziale del sistema** dopo l'urto $V_2=\dfrac{m_p v_0\cos\alpha}{M_A+m_p}$=**4.124 m/s**



Salita lungo il piano inclinato scabro (fig.2-3)
Durante questa fase il sistema cuneo+proiettile che ha inizialmente una velocità V_2 (figura 2) sale lungo il piano inclinato scabro fino a raggiungere l'apice con una velocità V_3 (figura 3) da determinare. L'attrito è l'unica forza non conservativa che compie lavoro ed il bilancio energetico si scrive

$$L_A = \Delta E_m = E_{m3} - E_{m2}$$

dove il lavoro della forza di attrito è negativo e vale

$$L_A = \vec{A}_d \cdot \vec{s} = -A_d s = -(\mu_d R_n)\left(\frac{H}{\sin\alpha}\right) = -[\mu_d (M_A + m_p) g \cos\alpha]\left(\frac{H}{\sin\alpha}\right)$$

mentre la differenza di energia meccanica del sistema fra la figura 3 e la figura 2 vale

$$\Delta E_m = E_{m3} - E_{m2} = \left[\frac{1}{2}(M_A + m_p)V_3^2 + (M_A + m_p)gH\right] - \frac{1}{2}(M_A + m_p)V_2^2$$

Imponendo $L_A = \Delta E_m$ e semplificando il termine della massa del sistema (M_A+m_p) si ottiene $-\frac{\mu_d}{\tan\alpha} gH = \left[\frac{1}{2}V_3^2 + gH\right] - \frac{1}{2}V_2^2$ da cui si ricava **la velocità con cui arriva sulla sommità del piano inclinato** $V_3 = \sqrt{V_2^2 - 2gH\left(1 + \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)} =$ **1.952 m/s**

Lancio e moto parabolico del grave (fig.3-4)
Nella fase finale il sistema cuneo+proiettile, raggiunta la sommità di coordinate (0, H) con una velocità V_3 inclinata di α rispetto all'orizzontale, diventa libero di muoversi nel piano x,y soggetto alla sola accelerazione di gravità e descrivendo una traiettoria parabolica secondo le equazioni della cinematica scomposte lungo gli assi x ed y

Equazioni della cinematica:

lungo l'asse x $\begin{cases} x = V_3 t \cos\alpha \\ v_x = V_3 \cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases}$ lungo l'asse y $\begin{cases} y = H + V_3 t \sin\alpha - g\,t^2/2 \\ v_y = V_3 \sin\alpha - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

Imponendo la condizione y(t*)=0 di caduta in terra si ricava una equazione di secondo grado nel tempo che dà due valori del tempo di volo t* (il valore del tempo negativo va scartato)

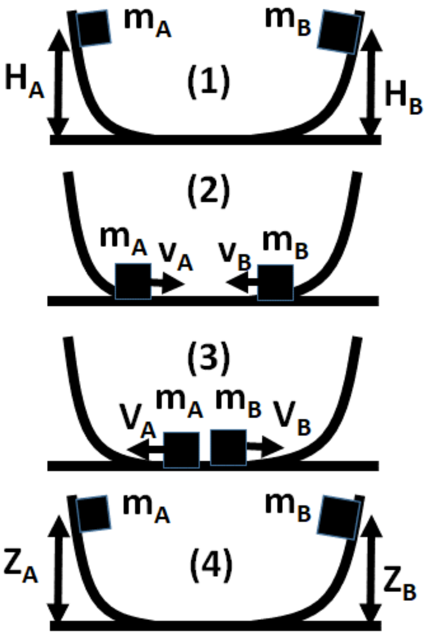
da cui il **tempo di volo** $t* = \dfrac{V_3 \sin\alpha + \sqrt{V_3^2 \sin^2\alpha + 2gH}}{g}$ **=0.434 s**

Inserendo infine il tempo di volo nel moto componente x(t*) si ottiene la **distanza L** calcolata dalla base del piano inclinato, alla quale il cuneo ricade al suolo.

$L = x(t*) = V_3 \cos\alpha \cdot t* =$ **73.4 cm**

2. Due blocchi di massa $\mathbf{m_A=3kg}$ e $\mathbf{m_B=1kg}$ sono inizialmente posizionati su due scivoli alle quote $\mathbf{H_A=36cm}$ e $\mathbf{H_B=64cm}$. I blocchi scivolando senza attriti a valle acquistano velocità ed entrano in collisione su un tratto piano comune dando luogo ad un urto elastico. Determinare le **velocità dopo l'urto** dei due blocchi e le **nuove quote massime** cui giungeranno risalendo gli scivoli.

2. Discesa dei blocchi lungo gli scivoli (fig. 1 e 2)
La discesa lungo uno scivolo privo di attrito avviene in condizioni di conservazione di energia meccanica.
Per ciascun blocco l'energia potenziale iniziale **U=mgH** si trasforma in energia cinetica $\mathbf{K=mv^2/2}$
La **velocità iniziale** dei blocchi si calcola imponendo la conservazione dell'energia $v = \sqrt{2gH}$
La velocità del blocco m_A: $v_A = \sqrt{2gH_A} =$ **2.66 m/s**
La velocità del blocco m_B: $v_B = -\sqrt{2gH_B} =$ **-3.54 m/s**
(*la velocità di m_B è contrario all'asse delle x*)



Urto elastico lungo il piano orizzontale (fig. 2 e 3)
In queste condizioni si conserva la quantità di moto e l'energia cinetica. Nel caso di urto lungo l'asse x le **velocità successive all'urto** dei due blocchi possono essere espresse in funzione delle velocità precedenti all'urto come segue

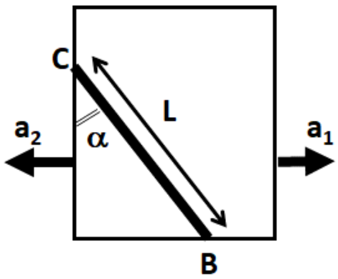
$$\begin{cases} V_A = \left(\dfrac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) v_A + \left(\dfrac{2m_B}{m_A + m_B}\right) v_B & = \left(\dfrac{2}{4}\right)\sqrt{2gH_A} + \left(\dfrac{2}{4}\right)\left(-\sqrt{2gH_B}\right) = -0.443\, m/s \\ V_B = \left(\dfrac{2m_A}{m_A + m_B}\right) v_A + \left(\dfrac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\right) v_b & = \left(\dfrac{6}{4}\right)\sqrt{2gH_A} + \left(\dfrac{-2}{4}\right)\left(-\sqrt{2gH_B}\right) = 5.755\, m/s \end{cases}$$

Risalita dei blocchi lungo gli scivoli (fig. 3 e 4)
La risalita lungo uno scivolo privo di attrito avviene in condizioni di conservazione di energia meccanica. Per ciascun blocco l'energia cinetica iniziale **$K=mV^2/2$** si ritrasforma in energia potenziale **$U=mgZ$.** La **quota finale** dei blocchi si calcola imponendo la conservazione dell'energia $Z = V^2/2g$

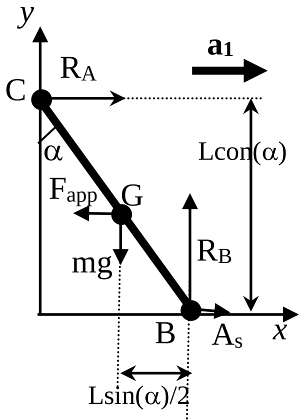
La quota cui risale il blocco m_A: $Z_A = \dfrac{V_A^2}{2g} = \dfrac{\left(\sqrt{H_A} - \sqrt{H_B}\right)^2}{4}$ **=1 cm**

La quota cui risale il blocco m_B: $Z_B = \dfrac{V_B^2}{2g} = \dfrac{\left(3\sqrt{H_A} + \sqrt{H_B}\right)^2}{4}$ **=169 cm**

3. Una scala è poggiata all'interno di una cabina montata in un sistema mobile. Essa è inclinata di un angolo **α=25°** rispetto alla verticale, appoggiandosi sulla parete verticale liscia nel punto C, e sul piano orizzontale scabro nel punto B (**μ_s=0.4**), in modo da restare in equilibrio. Nel caso la cabina acceleri determinare quali siano le **massime accelerazioni ammissibili** verso destra **a_1** e verso sinistra **a_2** affinché la scala permanga in equilibrio.



3. Analisi delle forze.
Nel caso il sistema abbia accelerazione **a_1 verso destra** le forze agenti sulla scala sono le seguenti: nel baricentro G sono applicate il peso della scala **P=mg,** e la forza apparente **F_{app}=ma_1** (nel verso contrario alla accelerazione **a_1**).
Nel punto di contatto B sono applicate la reazione normale **R_B** e la forza di attrito statico orizzontale **A_s** (nel caso di elevata F_{app} l'attrito si orienta nella direzione opposta a F_{app}**).** Infine la reazione **R_A** è applicata nel punto C



In condizioni statiche la somma di tutte le forze deve annullarsi (1^a equazione cardinale) come anche la somma di tutti i momenti delle forze (2^a equazione cardinale).

1^a equazione cardinale: $\begin{matrix} x) \\ y) \end{matrix} \begin{cases} R_A - F_{app} + A_s = 0 \\ R_B - P = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} A_s = -R_A + F_{app} \\ R_B = mg \end{cases}$

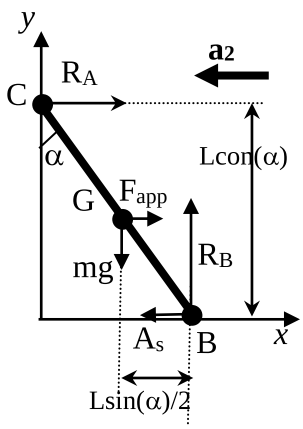
2ª equazione cardinale (calcolata rispetto a B)

$M_P + M_{Fapp} + M_{RA} = 0$ da cui $mg\frac{L}{2}\sin\alpha + F_{app}\frac{L}{2}\cos\alpha - R_A L\cos\alpha = 0$

da cui $R_A = \frac{m}{2}(g\tan\alpha + a_1)$, e **l'attrito** $A_s = \frac{m}{2}(a_1 - g\tan\alpha) \le A_{max} = \mu_s R_B = \mu_s mg$

da cui l'**accelerazione massima verso destra** risulta $a_1 \le g(2\mu_s + \tan\alpha)$=**12.4 m/s²**

Quando l'**accelerazione del sistema a₂** è **diretta verso sinistra** la forza apparente cambia verso così come anche l'attrito statico orizzontale **A$_s$**. Applicando nuovamente le condizioni statiche si ha



1ª equazione cardinale: $\begin{matrix} x) \\ y) \end{matrix}\begin{cases} R_A + F_{app} - A_s = 0 \\ R_B - P = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} A_s = R_A + F_{app} \\ R_B = mg \end{cases}$

2ª equazione cardinale (calcolata rispetto a B)

$M_P + M_{Fapp} + M_{RA} = 0$ da cui $mg\frac{L}{2}\sin\alpha - F_{app}\frac{L}{2}\cos\alpha - R_A L\cos\alpha = 0$

da cui $R_A = \frac{m}{2}(g\tan\alpha - a_2)$, e **l'attrito** $A_s = \frac{m}{2}(g\tan\alpha + a_2) \le A_{max} = \mu_s R_B = \mu_s mg$

da cui l'**accelerazione massima verso sinistra** risulta $a_2 \le g(2\mu_s - \tan\alpha)$=**3.27 m/s²**